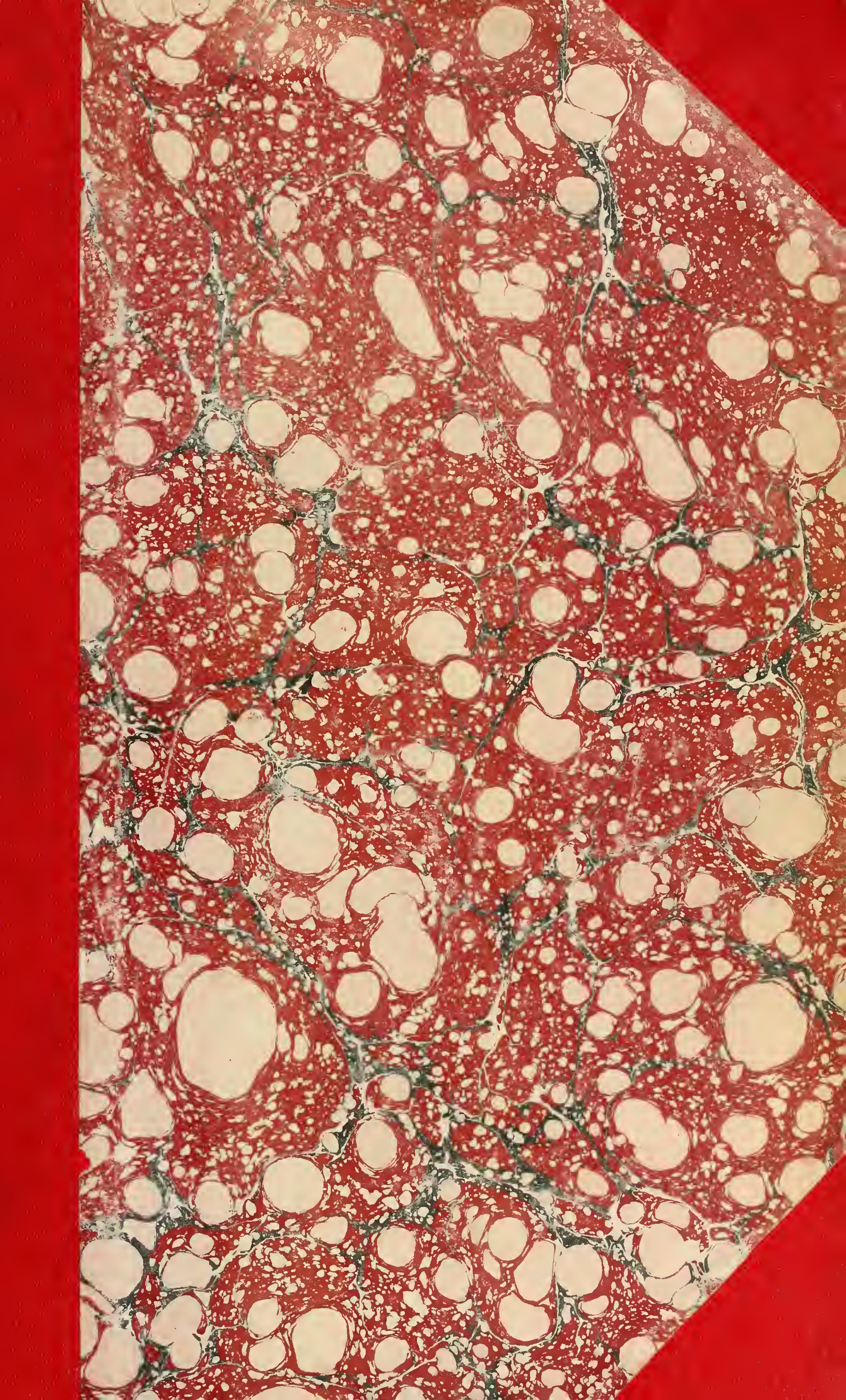


MEMORIAS

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

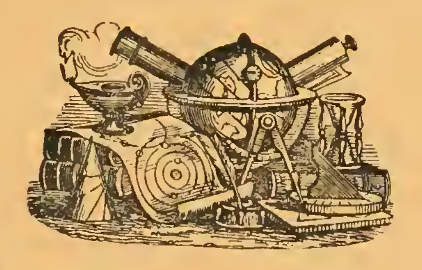
DE

MADRID

TOMO XXVI

J. DE VARGAS Y AGUIRRE.—CATALOGO GENERAL DE CURVAS

PRIMER FASCÍCULO



MADRID
IMPRENTA DE LA GACETA DE MADRID
Calle de Pontejos, núm. 8.

1908

MEMORIAS

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS

FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

Tomo XXVI

CATÁLOGO GENERAL

DE

CURVAS

Comprende sumariamente la historia, ecuación, forma, propiedades y bibliografía de todas las curvas de denominación especial,

MEMORIA

PREMIADA POR LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y NATURALES EN EL CONCURSO ORDINARIO Á PREMIOS DEL AÑO 1897,

POR EL

EXCMO. SR. D. JOAQUÍN DE VARGAS Y AGUIRRE

Arquitecto, Licenciado en Ciencias Exactas, Académico correspondiente de las Reales Academias de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales y de San Fernando, etc., etc.



MADRID
IMPRENTA DE LA "GACETA DE MADRID,,
Calle de Pontejos, núm. 8. — Teléfono 75.
1908





Aceleraciones (Curva de las).

Definición.—Trazada la curva de las velocidades (ver esta voz) $v = f'(t)$, como la aceleración tangencial, ó sea la proyección de la aceleración total sobre la tangente á la trayectoria en el punto que se considera, es una nueva función del tiempo,

$$j_t = f''(t); \qquad (1)$$

t'' será la segunda derivada de $s = f(t)$ que representa la curva de los espacios (ver esta voz) y la ley de variación de la aceleración tangencial se puede representar por la curva que expresa la ecuación (1) que se llama la *curva de las aceleraciones.*

—Cuando las tres curvas de los *espacios*, de las *velocidades* y de las *aceleraciones* se refieren á los mismos ejes, los máximos y mínimos de la una corresponden á los puntos de intersección de la siguiente con el eje de las t; los puntos de inflexión de la primera corresponden á los máximos ó mínimos de la segunda y á las intersecciones de la tercera con el eje de las t.

Acuerdo ó acordada.

Definición.—Se da el nombre de línea de acuerdo, en la construcción de los caminos, á las curvas que se emplean para unir dos alineaciones rectas, una recta con curva, etc., *la cual ha de ser tangente á las mismas para que la continuidad del eje de la vía no se interrumpa.*

Clasificación.—Los acuerdos pueden verificarse por medio del círculo, de la parábola y de la hipérbola equilátera, usándose, aunque rara vez, la elipse.

Historia.—El origen de los principios fundamentales para el tra-

zado de las curvas de acuerdo de forma circular no se puede precisar, por estar sólo fundados en las más sencillas proposiciones de la Geometría; pero aquellos otros que han servido de base para la construcción de los parabólicos son los siguientes: *En todo exágono circunscripto á una sección cónica, las tres diagonales principales se cruzan en un mismo punto;* teorema dado por primera vez en el cuaderno XIII del *Journal de l'Ecole Politecnique*, y del cual se deduce que las rectas que unen cada vértice de un triángulo circunscripto á una cónica con el punto de contacto del lado opuesto, se cruzan las tres en un mismo punto; propiedad que Maclaurin hizo conocer en su obra *De linearum geometricarum propietatibus generalibus tractatus.*

En una parábola se tiene que *un ángulo cualquiera que le sea circunscripto, la recta que une este ángulo con el medio de la cuerda de contacto es un diámetro de la curva.* Asimismo, *en todo triángulo circunscripto á una parábola, si por dos cualquiera de los ángulos se trazan paralelas á los lados opuestos, éstas se cortan sobre la cuerda de contacto del tercer ángulo.* Consecuencia de la proposición del exágono circunscripto y debida á M. Coste, *Annales de Mathématiques*, t. VIII. *Un ángulo cualquiera, circunscripto á una parábola, si se traza una tangente cualquiera, se cortan los lados del ángulo en segmentos inversamente proporcionales.* Este teorema es el 41 del libro III de *Coniques de Apollonius.* De aquí la regla práctica; divídanse los lados del ángulo en sus partes comprendidas entre el vértice y la parábola en un número cualquiera de partes iguales, numeradas en cada uno según el orden natural, inversamente á partir del vértice. Las rectas que unen los puntos de igual numeración son tangentes á la parábola.

Este principio ha servido de base al método á John Bonny Castle para dividir una línea de un número cualquiera de partes iguales. *Introduction to mensuration and practical geometry* (1791, Londres).

Por caminos distintos á los mencionados, han sido resueltas estas mismas cuestiones por Blondel en su obra *Apollonius des Tactions* (t. V de *Memoires de l'Academie.)*

Por último, para concluir este punto, citaremos á los principales autores que han escrito sobre esta clase de curvas y que son: Blondel, *Memoires de l'Academie des Sciences*, t. V; Lahire *(idem*, 1702); Wentzius, *Acta Helvética;* Blanchard, *Traité de la Coupe des bois;* Frezier, *Stereotomie* (t. II, pág. 103); Sganzin, *Geometrie descriptive appliquée;* Puissant, *Topographie;* Prony, *Journal de l'Ecole Politecnique* (cuaderno X); Gergonne, *Annales de Mathe.* (t. I, pág. 250 y t. IV, página 156), etc.

Ejemplos: Acuerdos por arcos de círculo.—Supongamos dos alinea-

ciones rectas, CA y DB. Medido el ángulo ω, como $AO = r$ es generalmente conocido según la configuración del suelo, la naturaleza é importancia de la vía; se pueden determinar los puntos de contacto A y B y su distancia t á T. El triángulo OAT nos da:

$$t = r \cdot \operatorname{tg} \cdot AOT = \frac{r}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \omega}$$

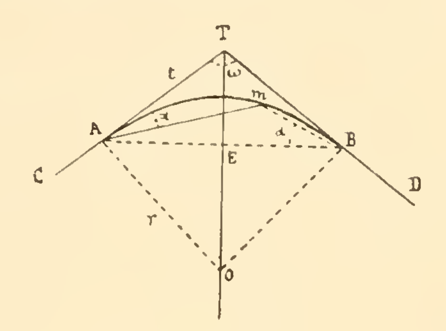


Figura 1.ª

la longitud t siendo conocida;

$$r = t \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} \omega.$$

Si $AB = 2c$,

$$c = \frac{rt}{\sqrt{r^2 + t^2}}.$$

El trazado de este arco es cuestión de Topografía.

—Se pueden también determinar los puntos de la curva por sus coordenadas. Sea OA el eje de las x (fig. 2.ª) y AT el de las y; se tendrá para un punto m

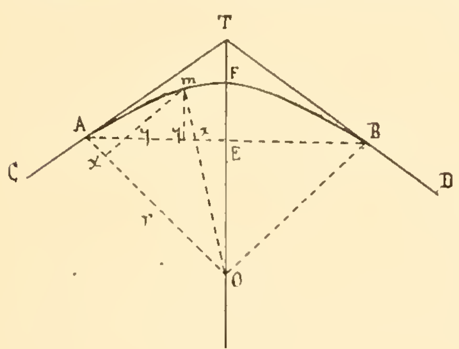


Figura 2.ª

$$y = \sqrt{x(2r - x)}.$$

Tomando AB por eje de las x y la bisectriz OT por eje de las y se tiene:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} - \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - t^2}}.$$

—Supongamos se trata del acuerdo de una recta AB (fig. 3.ª) con un arco de círculo DE. Si el radio del círculo auxiliar es dado, se dirige una paralela, HO á AB, á una distancia de esta recta igual al radio del círculo auxiliar. Desde el centro C del arco dado, con un radio igual al de este arco, aumentado del radio del círculo auxiliar, se describe un arco de círculo OK. El punto O, en que este arco en-

cuentra á la recta $H O$, será el centro del círculo auxiliar. Se bajará desde el punto O, sobre $A B$, la perpendicular $O P$ y se traza la $O C$, que encontrará el arco $D E$, en un punto F; los puntos P y F serán los puntos del acuerdo. Desde el punto O, como centro con el radio $O P$, se describirá un arco de círculo; este arco pasará por el punto F y será tangente á la recta $A P$ en P y el arco $F E$ en F.

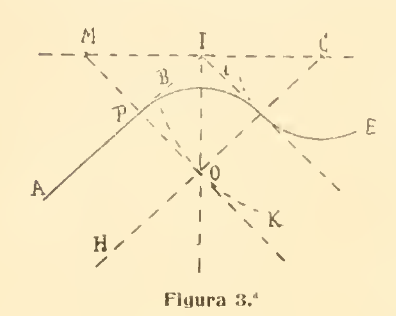


Figura 3.ª

Si el radio del círculo auxiliar no es conocido, lo será; bien el punto P, bien el F. Si lo fuera P, por dicho punto se trazará la recta OM perpendicular á AB y se tomará sobre esta recta una longitud PM igual al radio del arco DE; se traza la recta MC y en su punto medio se levanta la perpendicular IO; el punto O en que las perpendiculares MO é IO se encuentren será el centro del círculo buscado. Si el punto F es el conocido, se traza por este punto la tangente Fi; y el problema quedará reducido á hacer el acuerdo de las dos rectas AB y Fi, con la condición que el punto F sea uno de los puntos de acuerdo.

—Supongamos que sean dos arcos de círculo los que se tratan de acordar, por otro arco de círculo. Sean los arcos $A B$ y $D E$ (fig. 4.ª). Si el radio del círculo auxiliar es dado, se describe desde los puntos I y C como centros, con radios respectivamente iguales á los de los arcos AB y DE aumentados del radio del círculo auxiliar, dos arcos cuya intersección O será el centro del círculo buscado. Se trazan las rectas OI y $O C$, y éstas determinarán los puntos M y F del acuerdo.

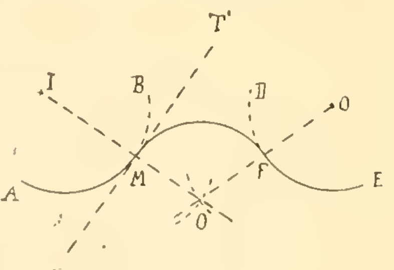


Figura 4.ª

Si, pues, desde O, como centro con el radio $O M$, se traza un arco de círculo, éste será el de acuerdo y en los puntos M y F será respectivamente tangente á los arcos $A B$ y $D E$. Si el radio del círculo auxiliar no es conocido y sí sólo uno de los puntos del acuerdo; el M, por ejemplo, se trazará por este punto la tangente $T T'$; y el problema quedará reducido á acordar la recta $T T'$ y el arco de círculo $D E$.

Acuerdos por arcos de parábola.—Sean $A B$ y $C D$ las dos rectas (fig. 5.ª) que se tratan de acordar; se las considera como tangen-

tes en B y en C á una misma parábola que se trata de trazar. Si se prolongan estas tangentes hasta su punto de encuentro T y se une este punto al medio de la recta $B\,C$, se tendrá, como se sabe, un diámetro de la parábola; el punto medio O de la distancia $I\,T$ será un punto de la curva; y la recta $O\,Y$ trazada por este punto, paralela á la $B\,C$ será la tangente en O. Ahora bien; refiriendo la parábola al diámetro $O\,I$ y á la tangente $O\,Y$, su ecuación será de la forma

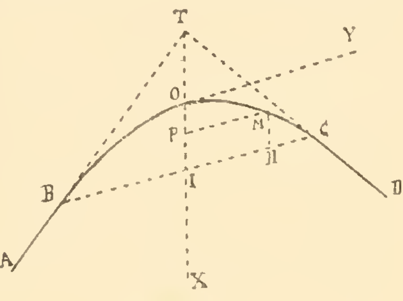


Figura 5.ª

$$y^2 = 2p\,.\,x,$$

y si se designa por a la distancia $O\,I$ y por b la $I\,C$; como estas dos magnitudes son las coordenadas del punto C, se tendrá

$$b^2 = 2p\,.\,a.$$

y, por consiguiente,

$$y^2 = \frac{b^2}{a}\,x,$$

de donde

$$x = a\,\frac{y^2}{b^2}.$$

Si, pues, se nos da una ordenada cualquiera $I\,H = y$, esta ecuación hará conocer la abscisa correspondiente $OP = x$ y se podrá construir el punto M correspondiente. Se obtendrán, de esta manera, tantos puntos de la parábola como se quieran, y se podrá trazar esta curva.

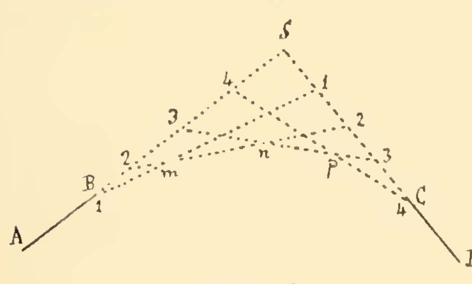


Figura 6.ª

Sin recurrir al cálculo se puede construir la parábola, teniendo en cuenta las propiedades de esta curva, señaladas al principio. Así, pues (fig. 6.ª), se empieza por dividir las distancias TB y TC en igual número de partes iguales y se numeran inversa-

mente de B á T y de T á C, se unen los puntos de igual numeración y los puntos m, n, p..., intersección de estas líneas, serán puntos de la parábola de acuerdo.

Aplicaciones.—Los acuerdos circulares se usan en los caminos de hierro, los parabólicos se suelen emplear en los ordinarios y sus radios de curvatura no deben bajar de ciertos límites, pues podían colocar al motor en condiciones desfavorables, variando con la clase de caminos y carruajes que por él han de transitar.

En muchos casos, los accidentes del terreno y las condiciones del trazado fijan el radio de las curvas de unión, que se obtienen entonces por medio de tablas especiales. En general, no es fácil precisar el mínimum de los radios de las curvas que deben emplearse en los trazados de las vías de comunicación; pero se puede indicar que en carreteras no suele bajarse de 25 metros, y en ferrocarriles de 250 á 300.

Por último, diremos que sobre estos particulares pueden ser consultadas, entre otras, las obras siguientes: *Tablas para proyectos y nivelación de caminos* (S. de la Rua, Madrid, 1853); *Trazado de las curvas circulares en el terreno* (Cuadernos de Topografía y Geodesia, de la Escuela de Ingenieros civiles, 1858); *Tablas calculadas para el trazado de las curvas en el terreno* (Madrid, 1863); *Trazado de las curvas circulares y parabólicas en el terreno* y *Efectos de las curvas en los caminos de hierro* (J. López del Rivero, Madrid, 1863). W. M.; *Pendientes y curvas en los ferrocarriles* (Revista de Obras públicas, 1866); *Tabla que presenta calculada la distancia entre el vértice, las tangentes y el del arco de círculo comprendido por ellas* (P. Salcedo de las Heras, Madrid, 1866).

Adiabáticas.

Del griego ἀδιάβατος (impenetrable).

Definición.—Dada la unidad de masa de una substancia, si se hace variar su volumen, evitando todo cambio de calor con los cuerpos próximos (por ejemplo, efectuando la operación en un cilindro absolutamente impermeable al calor), la operación se llama *adiabática*. El punto representativo del estado del cuerpo, describe sobre el diagrama de los volúmenes y de las presiones una cierta curva que se llama *línea adiabática*.

Ecuación.—En los gases perfectos, la ecuación de estas líneas es:

$$pv^{\frac{C}{c}} = \text{constante}; \qquad (1)$$

siendo p y v, la presión y el volumen del gas á la temperatura t; C, el calor específico verdadero, bajo una presión constante y c el calor específico del cuerpo, bajo un volumen constante y siendo, como se sabe, $C - c =$ *Constante*, para los gases.

Historia.—La denominación de adiabáticas, ha sido introducida en la ciencia por Rankine. La ecuación (1) de estas líneas se llama ecuación de Laplace ó ecuación de Poisson, los cuales la habían establecido, independientemente de la Termodinámica, admitiendo que la relación $\frac{C}{c}$ era independiente de la temperatura y de la presión, lo que parece deducirse de las experiencias de Gay-Lussac y Welter. Se encuentran estos estudios: los de Laplace, *Mécánique celeste* (t. V, pág. 153), y los de Poisson en *Mécánique rationnelle* (tomo II, pág. 64) y en XIV cahier del *Journal de l'Ecole Politechnique.*

Forma y propiedades.—La ecuación (1) representa una curva de naturaleza hiperbólica RS (figura 1.ª), que se aproxima más rápidamente al eje de los volúmenes que al eje de las presiones. Cuando el punto figurativo del estado del gas se mueve sobre esta curva en el sentido RS de las abscisas crecientes, el gas ejecuta un trabajo exterior positivo y se enfría; cuando el punto figurativo se mueve en sentido contrario, el trabajo exterior es negativo y el gas se calienta.

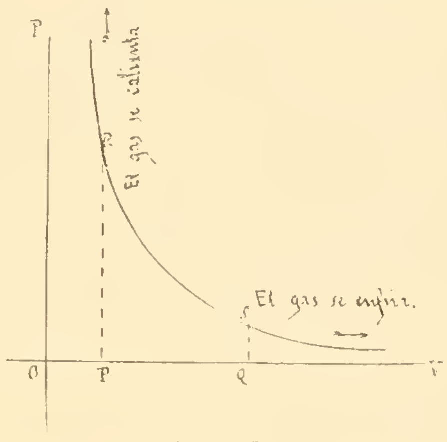


Figura 1.ª

—Se puede partir de un estado inicial cualquiera del cuerpo que se considera para hacerle sufrir una transformación adiabática; ó en otros términos, por cada punto del diagrama se puede hacer pasar una línea adiabática.

—Si por un punto se dirige la línea isoterma (ver esta voz) y la línea adiabática que pasan por este punto, la tangente á la línea adiabática forma siempre con el eje de los volúmenes un ángulo agudo mayor que la tangente á la línea isoterma, ó bien que para disminuir el volumen de un cuerpo en una cierta cantidad comprimiéndolo, es necesario un aumento de mayor presión si se le permite cambiar de calor que si se mantiene la temperatura constante.

—Una línea adiabática dada, encuentra á todas las líneas isotermas é inversamente; y dos líneas adiabáticas, lo mismo que dos isotermas, no se pueden encontrar.

—Los dos sistemas de líneas, las isotermas y las adiabáticas, dividen el plano figurativo del estado del cuerpo en paralelogramos equivalentes infinitamente pequeños. Maurice Lévy, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. LXXXIV, páginas 442 y 491, 1877).

Propiedad que es una expresión geométrica muy sencilla de los dos principios fundamentales de la Teoría del calor.

Adjunta.

Definición.—Se denomina adjunta á la curva que pasa una vez por todos los puntos dobles y los puntos de retroceso de una curva fija, ó más generalmente, que pasa $i - 1$ vez por todo punto múltiplo del orden i, sin que, en general, las ramas particulares de las dos curvas se toquen.

Historia.—La particular teoría de estas líneas, ha sido indicada más especialmente por Brill y Nöther *Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie. (Göttinger Nachrichten*, 1873 y *Math. Annalen* (t. VII, pág. 269).

Propiedades y aplicaciones.—Entre los puntos de intersección de una curva adjunta del orden m^{esino} con una curva dada C_n no situada en los puntos singulares:

1.° Para $m > n - 3$, p ó más, están determinadas por las

$$nm - \Sigma \alpha_i (i - 1) - p = n\alpha + p - 2 \left| \alpha = m - (n - 3) \right|$$

restantes.

2.° Para $m = n - 2 - r$, $p - 1 - \frac{1}{2}(r + 2)(r - 1)$ ó más, están determinadas por las

$$\frac{1}{2} m (m + 3) - \frac{1}{2} \Sigma \alpha_i \,.\, i (i - 1)$$

restantes.

—Para hacer el examen de los sistemas de curvas adjuntas ó de los grupos de puntos determinados sobre C_n por sistemas semejantes, se consideran á estos últimos caracterizados por los siguientes elementos:

1.° El número Q de puntos que se encuentran en cada grupo del sistema, ó sea el número de puntos de intersecciones móviles de una curva adjunta del sistema considerado.

2.° La multiplicidad del sistema, ó sea el número q de parámetros arbitrarios de que dependen los coeficientes de una curva del sistema.

3.° El grado del sistema, ó sea la dimensión ó la forma, según la cual estos parámetros entran en la ecuación de la curva. Estos parámetros se suponen son racionales.

Así, por ejemplo: si C_n es una curva de tercer orden sin puntos singulares, todas las rectas del plano formarán un sistema doblemente infinito $\infty^2 (q = 2)$ de curvas adjuntas que dependen linealmente de dos parámetros; los grupos de puntos determinados por ellas sobre C_3, formarán, por consiguiente, un sistema lineal doblemente infinito de tres puntos ($Q = 3$), y, por otra parte, todas las líneas que pasen por un punto fijo de C_3 y que, por lo tanto, corten á esta curva en dos puntos móviles, determinan un sistema lineal simplemente infinito de dos puntos ($Q = 2$, $q = 1$).

—Si C_3 tiene un punto doble y consideramos el haz de radios que parten de este punto, cada uno de estos encontrará á C_3 en un punto móvil, y el haz en cuestión determina un sistema simplemente infinito de un solo punto ($Q = 1$).

—Una curva C_n puede ser transformada por medio de un haz de curvas adjuntas del orden C_{n-3}, como curvas de transformación, pudiéndose decir que es posible en general el transformar una curva f del género p en una curva de orden $p + 1$ á $\frac{1}{2} p (p - 3)$ puntos dobles, por una transformación del $(n - 3)^{mo}$ orden, en la cual todas las curvas sean adjuntas á f y pasen por $p - 3$ puntos arbitrariamente tomados sobre f.

Esta transformación ha sido indicada por Clebsch y Gordan, *Theorie der Abel'Schen Functionen* (Leipzig, 1866; pág. 65).

—La transformación indicada es imposible para el caso en que p tenga uno de los valores 0, 1 ó 2. En los demás casos, puede presentarse aún otra excepción, cuando dados $p - 3$ puntos cualesquiera, un cierto número de otros puntos de las curvas C_{n-3} se encuentran por la misma determinados, lo cual tiene lugar para las curvas hyperelécticas (ver esta voz).

—Como ejemplo de esta transformación, consideremos la curva de quinto orden ($p = 6$), la cual podrá considerarse como transformación de una curva especial del séptimo orden, de nueve puntos do-

bles; poseyendo la propiedad de que sobre ella puede determinarse de un número doblemente infinito de maneras 5 $(= p - 1)$, puntos por los cuales pase un infinito doble de curvas C_{n-3}, lo que no sería posible sobre una curva general C_y ó $p = 6$.

—Del propio modo, la curva de quinto orden con punto doble aparece como transformación de una curva especial de sexto orden, con cinco puntos dobles.

—Así, por consiguiente, la posibilidad de reducir el orden de una curva por medio de una transformación de determinación única, depende de conocer si sobre la curva en cuestión existen ó no grupos de puntos de un carácter especial.

Para más detalles, Clebsch *Integrales abeliennes et connexes.*

Agónica.

Definición.—Se da este nombre á la línea lugar de los puntos de la tierra en que la declinación es nula. (Ver isogónicas.)

Agua plana.

Definición.—Se ha dado el nombre de línea de *agua plana* á una cualquiera de las curvas descritas por moléculas de agua, franqueando *un cuerpo sólido moviéndose en un plano.*

Historia.—El estudio de estas líneas se debe, principalmente, á W. J. Macquorn Rankine, que lo dió á conocer en 1863 á la Asociación Británica, proponiendo se las asignara la denominación de curvas *neoides.* Se pueden consultar asimismo los trabajos hechos por Stokes sobre *El movimiento permanente de un flúido incomprensible* (Cambridge, 1842, *Transactions Philosophiques*) y los de William Thomson (1858), sobre el *Movimiento de los líquidos más allá de los obstáculos sólidos.*

Propiedades.—Todo sólido, á lo largo del cual un líquido puede deslizar dulcemente, engendra una serie de líneas de agua que vienen á ser más y más agudas, á medida que se alejan de la línea primitiva del agua del sólido.

—Las líneas de agua que han sido estudiadas de una manera completa son, hasta ahora, las engendradas por el cilindro en el caso de dos dimensiones y por la esfera en el de tres.

—Cuando un cilindro se mueve á través de un agua en reposo, la

curva descrita por cada molécula es una rama de curva elástica.
—El perfil de las olas ó curva *atriftaloide*, estudiada por Townsend, ha sido empleado con éxito como línea de agua por varios físicos y en particular por Scoll Russell.
—Estas curvas convienen para las líneas de agua de un navío, por ser durante el movimiento los desplazamientos verticales de las moléculas de agua muy pequeños, si se los compara con las dimensiones del navío; por lo cual la hipótesis de que el movimiento tiene lugar en un plano, aunque no rigurosamente exacta es suficientemente aproximada.
—La resistencia, debida al rozamiento, por los navíos cuyas líneas de agua son de esta especie, puede estudiarse en dos Memorias de W. J. M. Rankine, presentadas en 1861 á la Asociación Británica, impresa una en diversos periódicos de mecánica y la otra en 1862 en las *Philosophical Transactions*. El autor considera una clase de líneas de agua cuya variedad es infinita por la forma y las proporciones; en cada serie, la línea primitiva es una especie de óvalo particular caracterizado por la propiedad de que la ordenada en cada punto es proporcional al ángulo comprendido entre dos líneas trazadas desde este punto á los focos. Los óvalos de esta especie difieren de las elipses en que son más llenos en sus extremidades y aplanados en los costados. La longitud del óvalo ó de la oval puede estar en una relación cualquiera con su latitud; desde la igualdad (cuando la oval es un círculo) hasta el infinito. El autor estudia en dichas Memorias el caso de que la longitud y la latitud de la oval están en la relación de 17 : 6.

Cada óvalo engendra una serie infinita de líneas de agua que vienen á ser más y más finas á medida que se alejan de la oval, y á estas líneas les da el nombre particular de *ncoides oógenas*. En cada una de estas líneas derivadas, el exceso de la ordenada en un punto dado por cima de un cierto valor mínimo, es proporcional al ángulo comprendido entre dos líneas trazadas de este punto á los dos focos.

Se ve, pues, que hay un número indefinido de óvalos que engendra cada uno una serie indefinida de líneas de agua; entre todos se puede siempre encontrar una que tenga la relación que se desee entre la longitud y la latitud, desde cero hasta infinito, y presentando tal grado de plenitud ó de finura que se quiera, desde el espesor absoluto hasta el corte de un cuchillo.

La construcción de estas líneas se hace fácilmente sólo con la regla y el compás.

Aplicaciones. —Las líneas de agua así obtenidas tienen una seme-

janza admirable con las que la experiencia y la práctica han hecho adoptar á los ingenieros; y todos los tipos de navíos existentes y renombrados pueden ser exactamente imitados con estas líneas.

Alabeadas ó de doble curvatura.

Definición.—Se denominan *curvas alabeadas ó de doble curvatura* á las que por originarse *del encuentro de dos superficies cualesquiera, no se las puede ajustar un mismo plano en todos sus puntos.*

Advertiremos, como lo hace Gómez Santa María, que el nombre de curvas de *doble curvatura* es en este sentido inexacto; porque entendiendo por curvatura la desviación que cada elemento de una línea tiene con respecto al precedente, lo que hace medir esta separación por el ángulo que dos tangentes infinitamente próximas forman entre sí; el que uno de los elementos, sin variar *este ángulo* llamado de *contingencia*, gire alrededor del otro (originando una superficie cónica) y se sitúe en cualquiera de esta multitud de posiciones, no altera en lo menor la curvatura de aquel punto; luego el plegarse ó abrirse los elementos en otro sentido del de su curvatura, es independiente de ésta, y sólo está en relación con el giro del plano en que se halla un elemento con respecto al plano en que se encuentra su anterior. De lo que se deduce que, si la primera y verdadera curvatura se mide por *ángulos planos* ó rectilíneos, y la segunda por *ángulos diedros*, la calificación que se aplique á aquella condición no debe atribuirse á la otra; de aquí ha nacido el que M. Vallée y después otros geómetras hayan llamado á estas líneas, curvas *gauchas.*

Sin embargo, está tan admitida la frase de curvas de doble curvatura, que después de conocida la observación precedente, supone poco el aplicarlas la una ó la otra calificación, pues del mismo modo se hallan aceptadas otras denominaciones, cuya significación es diferente en cuestiones distintas.

Historia.—Archytas (—400, J. C.) nos da el primer ejemplo de una curva de doble curvatura entre los griegos; al querer resolver el problema de la duplicación del cubo, como intersección de un toro con un semicilindro.

En 1663, Pedro Courcier publicó la obra *Opusculum de sectione superficiei sphericae per superficiem sphaericam cylindricam atque conicam, etc.*, en la que estudia las curvas de doble curvatura formadas por las intersecciones que producen entre si la esfera, el cilindro y los conos de revolución.

Más tarde, Mr. Clairant publicó en 1732 la obra *Recherches sur les courbes á double courbure* en que se trata de las tangentes á estas curvas y su rectificación, siendo los métodos indicados por este autor los que hoy se exponen en todos los cursos.

La representación primera de estas curvas por sus proyecciones sobre dos planos, se debe á Mr. Frezier, ingeniero de Chambéry, que lo verifica en su obra *Theorie et practique de la coupe des pierres et du bois*, publicada en Strasbourg en 1738.

En estos últimos tiempos se encuentran, entre otros trabajos, los de MM. Hachette y Olivier, publicados en los tomos II y XV del *Journal de l'Ecole Politecnique* y las memorias de M. Chasles sobre la determinación de las curvas alabeadas de tercer orden, publicado en el *Journal de Liouville* correspondiente al año 1857, y otra en la misma publicación en el año, 1862, titulada *Sur les courbes à double courbure du quatriéme ordre, intersections de deux surfaces du second degré;* así como la notable obra de Serret, *Theorie géométrique et mécanique des lignes à double courbure.*

Ecuación.—Una curva de doble curvatura está representada por las dos ecuaciones:

$$f(x, y, z) = 0; \qquad F(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

que pertenecen á las dos superficies, de las cuales esta curva es su intersección.

La *ecuación de la tangente* en un punto cuyas coordenadas sean X, Y, Z, es dada por la expresión:

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz}; \tag{2}$$

y diferenciando las ecuaciones de la curva, se tendrá:

$$\left.\begin{aligned} \frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy + \frac{df}{dz} dz = 0 \\ \frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy + \frac{dF}{dz} dz = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

por tanto; eliminando dx, dy y dz entre (2) y (3) se tendrá para ecuación de la tangente;

$$\frac{df}{dx}(X-x)+\frac{df}{dy}(Y-y)+\frac{df}{dz}(Z-z)=0,$$

$$\frac{dF}{dx}(X-x)+\frac{dF}{dy}(Y-y)+\frac{dF}{dz}(Z-z)=0.$$

de aquí la regla, de que para obtener la ecuación de la tangente á una curva alabeada, bastará diferenciar sus ecuaciones (1) y reemplazar dx, dy y dz por $X-x$, $Y-y$ y $Z-z$ en estas ecuaciones. —Si α, β y γ representan los valores de los ángulos que la tangente forma con los ejes coordenados, sus valores estarán dados por las expresiones:

$$\cos\alpha=\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}};\quad \cos\beta=\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}};$$

$$\cos\gamma=\frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}.$$

La longitud del arco de una curva ds tiene por valor:

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

El plano normal á la curva en un punto, lo será á la tangente en este mismo punto. La ecuación de este plano será de la forma

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0,$$

y siendo perpendicular á la tangente, cuya ecuación es (2), tendremos:

$$\frac{A}{dx}=\frac{B}{dy}=\frac{C}{dz},$$

y por consiguiente, la ecuación del plano normal será:

$$(X-x)\,dx+(Y-y)\,dy+(Z-z)\,dz=0,$$

la cual, teniendo en cuenta las ecuaciones (3) y eliminando las diferenciales dx, dy y dz se puede poner bajo la forma:

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ \frac{df}{dx} & \frac{df}{dy} & \frac{df}{dz} \\ \frac{dF}{dx} & \frac{dF}{dy} & \frac{dF}{dz} \end{vmatrix} = 0$$

La ecuación del *plano osculador* se obtiene por la consideración de tres puntos consecutivos de la curva, infinitamente próximos, cuyas coordenadas sean respectivamente (x, y, z); $(x + dx, y + dy, z + dz)$; $(x + dx + d(x + dx), y + dy + d(y + dy), z + dz + d(z + dz))$ y las X, Y y Z coordenadas variables de este plano osculador. La cuestión se reduce á encontrar la ecuación del plano que pasa por aquellos tres puntos. Se tendrá, por consiguiente, para ecuación del plano osculador:

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ x & y & z & 1 \\ x + dx & y + dy & z + dz & 1 \\ x + 2dx + d^2x & y + 2dy + d^2y & z + 2dz + d^2z & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

que simplificada se reduce á

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0,$$

ó bien;

$$(X - x)(dy\, d^2z - dz\, d^2y) - (Y - y)(dx\, d^2z - dz\, d^2x) + \\ + (Z - z)(dx\, d^2y - dy\, d^2x) = 0. \qquad (4).$$

La *normal principal*, en un punto de la curva deberá ser perpendicular á la tangente á la curva en este punto y estar dirigida en el plano osculador. Por tanto, teniendo en cuenta la ecuación (2) de la tangente y la (4) del plano osculador y llamando a, b y c á cantidades proporcionales á los cosenos de los ángulos de la normal prin-

cipal con los ejes, tendremos, que las ecuaciones de esta normal serán:

$$\frac{X-x}{a}=\frac{Y-y}{b}=\frac{Z-z}{c};$$

y por tanto:

$$\frac{X-x}{d\frac{dx}{ds}}=\frac{Y-y}{d\frac{dy}{ds}}=\frac{Z-z}{d\frac{dz}{ds}};$$

ó bien

$$\frac{X-x}{d\,.\cos\alpha}=\frac{Y-y}{d\,.\cos\beta}=\frac{Z-z}{d\,.\cos\gamma}.$$

El *ángulo de contingencia* ó sea el que forman entre si las dos tangentes dirigidas al extremo de un arco infinitamente pequeño ds, está dado por la ecuación

$$d\theta=\sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}$$

ó bien

$$d\theta=\frac{1}{ds}\sqrt{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2}.$$

La *curvatura* será medida por la relación entre el ángulo de contingencia y el arco infinitamente pequeño ds; y el *radio de curvatura* ρ por el valor de la fracción inversa de la que mide la curvatura, ó sea:

$$\rho=\frac{ds}{d\theta},$$

que nos dará

$$\rho=\frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2}}.$$

Esfera osculatriz. Siendo

$$(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2+(\gamma-z)^2=\rho^2$$

la ecuación de una esfera en la cual α, β, γ, sean las coordenadas del centro y ρ el radio; si ha de pasar por el punto de la curva cuyas coordenadas sean x', y', z', se tendrá:

$$(\alpha - x')^2 + (\beta - y')^2 + (\gamma - z')^2 = \rho^2;$$

y si ha de tocar á la curva, la ecuación diferencial de la anterior, ó sea la

$$(\alpha - x')\,dx' + (\beta - y')\,dy' + (\gamma - z')\,dz' = 0,$$

deberá quedar satisfecha por los valores de dx', dy', dz' que convengan á los puntos de la curva; y, por tanto, esta ecuación manifiesta que el centro de la superficie esférica debe hallarse sobre el plano normal á la curva dada.

Si la esfera ha de ser osculatríz, deberá tener un contacto de segundo orden con la curva propuesta, es decir, que la ecuación diferencial de segundo orden, deducida de la anterior, que es:

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - (\alpha - x')d^2x' - (\beta - y')\,d^2y' - (\gamma - z')d^2z' = 0,$$

queda satisfecha por los valores de las diferenciales de x', y', z', deducidas de la ecuación de la curva.

Dedúcese de aquí que el centro de la esfera osculatríz deberá estar situado sobre la línea recta, intersección de los dos planos normales correspondientes á dos puntos de la curva infinitamente próximos.

Segunda curvatura.—Angulo de torsión.—La segunda curvatura es el límite del cociente del ángulo de dos planos osculadores á la curva, infinitamente próximos, por el arco de la curva que separa los dos puntos de osculación.

El ángulo de los dos planos osculadores, infinitamente próximos, es análogo al ángulo de contingencia, y toma el nombre de *ángulo de torsión*. Este ángulo está expresado por

$$d\omega = \frac{dx(d^2yd^3z - d^2zd^3y) + dy(d^2zd^3x - d^2xd^3z) + dz(d^2xd^3y - d^2yd^3x)}{(dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)^2}\,ds,$$

y la segunda curvatura es:

$$\frac{d\omega}{ds}.$$

Radio de torsión.—Se da el nombre de radio de torsión, á la relación entre la diferencial del arco y el ángulo de torsión; llamando ρ_1 á este radio, será:

$$\rho_1 = \frac{ds}{d\omega},$$

ó bien

$$\rho_1 = \frac{ds^2((d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}{dx(d^2yd^3z - d^2zd^3y) + dy(d^2zd^3x - d^2xd^3z) + dz(d^2xd^3y - d^2yd^3x)}.$$

Propiedades.—Los centros de la primera curvatura de una curva alabeada están situados en la superficie desarrollable, lugar de los centros de las esferas osculatrices.

—Los centros de todas las esferas que tienen contacto de tercer orden con la curva propuesta, estarán colocados sobre *la arista de retroceso* de la superficie, lugar de los centros de las esferas osculatrices.

—M. Fourier ha demostrado: «que el ángulo de dos tangentes consecutivas es igual al de dos planos osculadores consecutivos, correspondientes de la arista de retroceso de la superficie, lugar de los centros de las esferas osculatrices. Y que el ángulo de dos planos osculadores de la curva es igual al ángulo de las dos tangentes consecutivas correspondientes de la arista de retroceso».

—La doble curvatura se conocerá también cuando lo sea su *radio de curvatura* y su *paso*, entendiendo por *paso* aquel de la hélice circular que tiene la misma curvatura que la curva, y, por tanto, un contacto de segundo orden con ella y la misma torsión que esta curva.

—Los radios de torsión y de curvatura para un punto m de una curva de doble curvatura, están en relación inversa de los ángulos de contingencia y de torsión que existen en los mismos puntos de la curva; ó mejor dicho, el producto del radio de curvatura y del ángulo de contingencia, es igual al del radio y del ángulo de torsión.

—La relación que existe entre el ángulo de contingencia y el de torsión en un punto, está medida por la tangente del ángulo de inclinación de la hélice cilíndrica circular, que tiene un contacto de segundo orden en el mismo punto de la curva dada.

—La recta intersección de dos planos normales consecutivos se denomina *línea de polos*. No hay ningún punto de esta recta que no pueda ser considerado como el vértice de un cono recto, cuyo eje seria la recta misma y la base un círculo tangente á la curva.

—La superficie, lugar geométrico de las evolventes de una curva de doble curvatura, es desarrollable, puesto que tiene por arista de retroceso la curva de doble curvatura, y por característica las tangentes á esta curva.

—Si se conciben por todos los puntos de una curva de doble curvatura planos que le sean normales. Se dirige en el primer plano una normal á la curva; el segundo plano encontrará esta normal en un punto por el cual se podrá elevar una segunda normal á la curva; el tercer plano encontrará la segunda normal en otro punto, por el cual se puede elevar una tercera normal á la curva y así sucesivamente. Es evidente que la curva tocada por todas las normales es una evoluta de la de doble curvatura, considerada como evolvente, porque todas las tangentes de la una son normales á la otra. Se construirán así tantas evolutas como se puedan dirigir de normales en el primer plano normal; y como el número de aquéllas es infinito, se deduce que una curva de doble curvatura tiene una infinidad de evolutas. La superficie, que es el lugar geométrico envolvente del espacio recorrido por un plano móvil constantemente normal á la curva, es desarrollable; cada una de éstas características es la intersección de dos planos normales consecutivos ó de una línea de polos.

Por último, significaremos que Mr. Bouquet ha demostrado en el tomo XI del *Journal de Mr. Liouville* (pág. 125-1816), que la distancia de dos tangentes consecutivas á una curva alabeada es un infinitamente pequeño de tercer orden con relación á las distancias entre los puntos de contacto; T. Olivier en el *Journal de l'Ecole Politecnique*, 1836, que para que dos curvas tengan un contacto de tercer orden, deben tener el mismo círculo osculador, el mismo paso y la misma esfera osculatriz de tercer orden, y Mr. Hachette en la propia obra t. II, de los diferentes géneros de inflexión, simple ó doble

Algebraicas.

Definición.—Se llaman líneas algebraicas, aquellas cuya ecuación no contiene más que funciones algebraicas.

Historia.—Descartes, *Geometría* (1637), fué el primero que nos dió los medios de determinar las curvas por sus ecuaciones, introduciendo el uso de las coordenadas, creando así un instrumento, por virtud del cual, se pueden expresar los problemas geométricos, sirviéndonos de una forma algebraica, representando todas las líneas y las superficies curvas por medio de ecuaciones.

Este modo de considerar la Geometría, se distingue esencialmente del empleo del cálculo, tal como, por ejemplo, es usado en la enseñanza de las proporciones; mientras que el cálculo geométrico es muy antiguo, la Geometría analítica, propiamente dicha, no data sino de la época de Descartes, mediados del siglo XVII.

Descartes llamó geométricas á las curvas algebraicas y las consideró como las únicas que debían ser empleadas en la solución de los problemas de geometría; pero Newton, y después Leibnitz y Wolf, pensaron, que para resolver un problema, una curva no debía ser preferida á otra, porque su ecuación fuera más sencilla, sino porque su construcción fuera más simple. *(Arithmetique universelle de Newton.)*

Euler, en su *Introductio in analysin infinitorum*, con el talento que caracteriza todas sus producciones, se ocupó de la teoría general de las líneas curvas; pero la obra más notable que sobre la clase de línea que nos ocupa, se ha escrito en el siglo pasado, y cuyo conocimiento es de utilidad á todo aquel que á este ramo de los conocimientos humanos se dedique, es la que Cramer intitula modestamente *Introduction á l'analyse des lignes courbes algébriques.* (Génova, 1750, en 4.°)

Después de estas obras, otras muchas han sido escritas sobre las curvas algebraicas cuya enumeración sería prolija. Sin embargo, no podemos menos de citar la obra *Melanges analytiques sur les equations algébriques et les propietes des Courbes*, de E. Waring (Cambridge 1762), geómetra inglés que tuvo la gloria de sumarse, en esta clase de estudios, á los descubrimientos de Bernouilli, Clairant y Euler. Asimismo señalaremos por lo singular, la de José-Maximiliano-Lamberg titulada *Reflexions sur les propietes d'une courbe algébrique donts les contours marqueraient les traits d'un visage.* (Livourne, 1770.)

Al estudio de la Geometría analítica, ha seguido el de la Geometría sintética moderna que se basa sobre el de las series de los puntos y de los haces de radios, figuras las más sencillas de todas y que forman en general las bases de una generación puramente geométrica de las curvas algebraicas, sea que se la considera descrita por sus puntos ó como envueltas por sus tangentes. Clebsch *Theorie der binären algebraischen Formen.* (Leipzig, 1872; pág. 58 y siguientes.)

La noción de relación anarmónica (*Möbius Calcul barycentrique*, 1827) y (*Chasles, Aperçu historique sur l'origine et le developpement des méthodes*, 1837), aplicada á los principios antes expuestos, se funda esencialmente en la concepción de la recta como serie de puntos, del punto como haz de radios y sobre la relación proyectiva de estas

figuras elementales, relación obtenida por el intermedio de la perspectiva. Ahora bien; á consecuencia de la introducción de las coordenadas-líneas, y del principio de dualidad, estas ideas caben con una claridad completa en los resultados analíticos, y la diferencia entre la Geometría analítica y la Geometría sintética, no debe considerarse como substancial; las dos ramas de la ciencia operan exactamente con las mismas nociones, y la primera da una forma de expresión precisa á la segunda (Steiner, *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander* (Berlín, 1832) y aún mejor por ser la exposición más lógica, la obra de Von Standt *Geometrie der Lage (Nürnberg*, 1847.)

La consideración de las coordenadas homogéneas, se encuentra por primera vez en la obra citada de Möbius, si bien su importancia fundamental en Geometría data de Plucker *Journal de Crelle* (t. V, 1829), que desarrolló su aplicación en el sentido de la teoría de las funciones homogéneas.

La *teoría de las formas algebraicas* empleada en servicio de la Geometría Analítica, ha ido, gradualmente, elevándose al rango de ciencia independiente. La primera impulsión en este sentido, fué dada por Hesse, con respecto á las curvas planas de tercer orden; pero el estado de esta teoría en la época actual, es debido á los trabajos de los matemáticos ingleses, entre los cuales deberemos señalar, principalmente, á Cayley y Sylvester, y también á Aronhold, en Alemania.

No permitiendo la índole de esta obra ser más extenso en la exposición de estas teorías, sólo nos resta señalar al lector aquellas obras en que puede encontrar sus desarrollos y que son principalmente las siguientes: Cayley, *Fourth and fifth Memoir upon quantics* (Philosophical Transactions, t. CXLVIII, 1858).—Salmon, *Lessons introductory to the modern Algebra* (Third. edition, Dublin 1876).—Fiedler, *Elemente der neueren Geometrie* (Leipzig, 1862).—Clebsch, *Theorie der binären algebraischen Formen* (Leipzig, 1872).—Aronhold, *Ueber eine fundamentale Begründung der Invariantentheorie (Journal de Crelle*, t. LXII), etc.

Clasificación.—Las líneas de primer orden son las comprendidas en la ecuación

$$Ax + By + C = 0,$$

que expresa solamente rectas; no pueden, propiamente hablando, ser consideradas en el rango de curvas; así, pues, las líneas de *se-*

gundo orden reciben el nombre de *curvas de primer orden;* son expresadas por la ecuación:

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

Estas curvas, llamadas *secciones cónicas* ó simplemente *cónicas,* comprenden el círculo, la elipse, la hipérbola y la parábola (ver estas voces).

Las *líneas de tercer orden* ó *curvas de segundo* son expresadas por la ecuación:

$$Ay^3 + By^2x + Cx^2y + Dx^3 + Ey^2 + Fxy + Gx^2 + Hy + Kx + L = 0.$$

Las líneas de *cuarto orden* ó curvas de tercero, por la:

$$Ay^4 + Bxy^3 + Cx^2y^2 + Dx^3y + Ex^4 + Fy^3 + Gxy^2 + Hx^2y +$$
$$+ Kx^3 + Ly^2 + Mxy + Nx^2 + Py + Qx + R = 0;$$

y así sucesivamente.

Nos ocuparemos de las curvas del orden m, ó sea de las de un orden general, puesto que las del primero no representan curvas y las de segundo, tercero y cuarto, que son las únicas particularmente estudiadas, se detallan separadamente en otros lugares de este catálogo.

Curvas de m^{mo} orden. —La ecuación general de m^{mo} grado en x é y es de la forma:

$$Ay^m + (A_1x + A_2)y^{m-1} + (B_1x^2 + B_2x + B_3)y^{m-2} + \dots + $$
$$+ (R_1x^{m-1} + R_2x^{m-2} + \dots + R_m)y + S_1x^m + S_2x^{m-1} + \dots +$$
$$+ S_mx + S_{m+1} = 0,$$

ó bien;

$$Ay^m + A_1y^{m-1}x + B_1y^{m-2}x^2 + \dots + S_1x^m + A_2'y^{m-1} + B^2y^{m-2}x + \dots +$$
$$+ S_2x^{m-1} + \dots + (R_my + S_mx) + S_{m+1} = 0,$$

ecuación que encierra un término del grado m con relación á y, dos terminos del grado $m - 1$, tres del grado $m - 2$...., y $m + 1$ términos del grado 0.

El número de términos del primer miembro es, por consiguiente:

$$1 + 2 + 3 + \dots + m + (m+1) = \frac{(m+1)(m+2)}{2},$$

y por tanto, el número de parámetros arbitrarios estará dado por la expresión:

$$\frac{(m+1)(m+2)}{2} - 1 = \frac{m(m+3)}{2};$$

y es necesario, en general, un número de puntos igual á $\frac{m(m+3)}{2}$ para determinar una curva del orden m.

Propiedades. — *Dos curvas de* m^{mo} *y de* n^{mo} orden *se cortan* en mn *puntos.* Esta propiedad se conoce con el nombre de Teorema de Bezout *Théorie générale des équations algébriques*, 1769. Este teorema es fácil de demostrar por medio del principio de correspondencia. Chasles, *Comptes rendus* (t. LXXV, 1872) y Fouret, *Bulletin de la Societé mathematique de France*, t. I.

—Todas las curvas del grado m que pasan por $\frac{m(m+3)}{2} - 1$ puntos del plano, pasan por $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ puntos fijos.

—Si entre los m^2 puntos de intersección de dos líneas del orden m se tienen mn situados sobre una curva del orden n, los otros puntos restantes en número de $m(m-n)$ pertenecerán á una curva del orden $(m-n)$.

—Si mn, puntos de intersección de dos sistemas de m rectas situados en un plano, pertenecen á una curva del orden n, los otros puntos de intersección en número de $(m-n)$ estarán sobre una curva del orden $(m-n)$.

—Dos sistemas de m rectas que están trazadas sobre un plano, si, entre los puntos de intersección de las rectas del primer sistema con las del segundo, existen $2m$ situados sobre una cónica, los $m(m-2)$ puntos restantes pertenecerán á una línea del orden $(m-2)$.

—Un polígono de $2m$ lados inscrito en una cónica, tiene los $m(m-2)$ puntos de intersección de los lados del orden par, con los lados no adyacentes del orden impar, situados sobre una curva del orden $(m-2)$.

—Si por los m puntos de intersección de una secante cualquiera con

una curva del grado m, se dirigen dos tangentes á esta curva, los $m\ (m-2)$ puntos de intersección de estas tangentes con la curva pertenecen á una línea del orden $(m-2)$.

—Los puntos de contacto de las tangentes á una curva del orden m dirigidas por un punto cualquiera de su plano, pertenecen á una curva del orden $(m-1)$.

—Los puntos dobles de una curva del grado m se encuentran sobre la primera polar de un punto cualquiera del plano.

—Las primeras polares de un punto del plano con relación á todas las curvas del grado m que pasan por m^2 puntos fijos, pasan asimismo por $(m-1)^2$ puntos fijos.

—El número de puntos múltiplos del orden k de una curva de m^{mo} orden no puede ser mayor que

$$\frac{r\ (2m-r-3)}{2\ (K-1)},$$

siendo r un número entero inmediatamente superior á $\frac{2m}{K}-3$.

—El grado de la polar recíproca de una curva de m^{mo} orden que tienen S puntos dobles es igual á $m\ (m-1)-2\ S$.

—Una curva cualquiera de m^{mo} orden trazada por $mp-\frac{1}{2}\ (p-1)\ (p-2)$ puntos de una línea de p^{mo} orden, siendo $p<m$, encuentra á esta curva en $\frac{1}{2}\ (p-1)\ (p-2)$ puntos fijos.

—Si se corta una linea algebraica por un polígono $ABC... R$. Si recorriendo este polígono en un sentido, se forma el producto de los segmentos comprendidos entre los vértices sucesivos y la curva, así como el producto análogo, recorriendo el polígono en sentido contrario, los productos que se obtienen son iguales.

—Dadas tres curvas del orden m, S, S', S'', si se consideran dos curvas S_1 y S_2 del mismo orden, que pase la una por los puntos de intersección de S y de S' y la otra por los de S con S'', los m^2 puntos de intersección de las curvas S_1 y S_2 así como los de S' y de S'' pertenecen á una misma línea del orden m.

—Se puede consultar la obra *Propietés générales des courbes algebriques, Journal de Crelle*, 1857, de Woepcke y la titulada *Higher plane Curves*, de Salmon, así como los trabajos de Bobillier *Annales de Gergonne* (t. XVIII).

—Para los puntos singulares puede verse una Memoria de Stoltz. *Math. Annalen* (t. VIII).

—Cayley dió á conocer, *Journal de Crelle* (t. XXXIV, pág. 37), la curva que pasa por los puntos de contacto de las tangentes dobles; y puede verse también sobre esta cuestión un trabajo de Jacobi, *Journal de Crelle* (t. XL, pág. 37), y otro de Clebsch en el t. LXIII.

—Para el conocimiento de los *sistemas de curvas* puede consultarse, Cremona, *Einleitung in die Theorie ebener Curven.*; Gordan y Nöther, *Math. Annalen*, t. X; Hesse, *Journal de Crelle*, t. XLI, pág. 286, y para aquellos que dependen de un parámetro arbitrario, cuyo estudio, en la época contemporánea, se ha elevado á la categoría de una rama especial de la Geometría designada con el nombre de *Geometría del número,* en la que tan particular papel desempeña la *Teoría de las características*, números introducidos en la ciencia por Chasles, puede consultarse los trabajos de este autor y los de Cayley, *On the curves which satisfy given conditions* (Philos. Transaction-London, 1868, t. CLVIII); Cremona, *Einleitung in die Theorie der algebraischen Curvem*; Painvin, *Bulletin des Sciences Mathematiques* (t. III, pág. 155); Clebsch, *Zur Theorie der Charakteristiken* (Math. Annalen, t. VI); Halphen, *Journal de Liouville* (tercera serie, t. II, 1876), etc.

La teoría de contactos de las curvas algebraicas puede estudiarse en *Sur les problémes de contact des courbes algébriques;* Jouquieres, *Journal de Crelle* (t. LXVI, 1866); *Philosophical Transactions* (t. CLVIII), Cayley; *Journal de Crelle*, t. LVI; Bischoff y también *Math. Annalen*, t. VI, Brill.

Por último, para intersección de curvas algebraicas y principio de correspondencia pueden consultarse, entre otros, los trabajos siguientes: Clebsch y Gordan, *Theorie der Abelschen Functionem* (Leipzig, 1866); Cayley (*Cambrigge and Dublin mathematical Journal*, t. III); Brill y Nöther (*Gotinggcr Nachrichten*, 1873 y *Math. Annalem*, t. VII; Lindemann, *Journal de Crelle*, t. LXXXIV); Chasles, *Comptes rendus* (t. LXII, 1866); Zeuthen (*Math. Annalen*, t. III), etc.

Almicantáradas.

Del árabe *ál-moganttarát* que significa *formando bóveda*, en *forma de arcada* ó de *puente.*

Definición.—Se denominan así á círculos de la esfera celeste paralelos al horizonte, tanto por encima, como por debajo de él.

Propiedades.—Estos círculos son tanto más pequeños, cuanto más se alejan del horizonte.

—Se distinguen principalmente el almicantárada *crepuscular,* que se imagina á los 18° por debajo del horizonte, llamado así porque sirve para determinar el comienzo del crepúsculo de la mañana y la terminación del crepúsculo de la tarde.

—También se da á estos círculos el nombre de *paralelos de altura,* porque sirven para marcar todos los puntos del cielo que tienen una misma altura ó una igual depresión. Sus centros están situados en la vertical que une el zenit con el nadir.

—En la Gnomónica se hace uso de estos círculos para el trazado de los cuadrantes solares.

Altura.

Definición.—Se llama altura de un astro, el arco de círculo vertical, comprendido entre el horizonte y el centro de dicho arco.

Clasificación.— Las alturas de los astros se distinguen en *aparentes* y en *verdaderas.*

Propiedades.— Para obtener la altura aparente se procede por medio de los instrumentos y para deducir de ésta la verdadera, se precisa restar á aquélla la refracción, añadirle la paralaje, restarle la depresión, y, por último, sumarle ó restarle el semidiámetro aparente del astro, según se haya observado su borde inferior ó su borde superior. Operaciones inversas nos darán la altura aparente, conociendo la altura verdadera del centro del astro.

—La altura de un astro, en un momento dado cualesquiera, puede ser obtenida por el cálculo cuando se conoce la hora exacta, en tiempo medio y las coordenadas geográficas del lugar donde se encuentra.

Altura meridiana.—Se llama así á la altura de un astro en el momento que pasa por el meridiano; está, pues, medida por el arco de este circulo, comprendido entre el astro y el horizonte. Es la mayor de todas y su observación es esencial, en un gran número de cuestiones astronómicas y principalmente para encontrar la declinación del astro.

Altura del ecuador. —Es la más pequeña de sus dos distancias al horizonte, medidas sobre el meridiano. Es igual al complemento de la altura de polo.

Altura del polo es igual á la latitud terrestre del lugar.

—Se llaman *alturas correspondientes* á dos alturas iguales de un mis-

mo astro, observadas una antes y otra después del paso de este astro por el meridiano. La observación de estas dos alturas constituye el método más ordinario para confrontar la marcha de los relojes. Estas observaciones no son aplicables al sol, porque su trayectoria diurna no es exactamente paralela al ecuador, y, por tanto, no recorre, en tiempos iguales, arcos iguales de un lado y otro del meridiano. Se puede hacer una corrección que se llama *ecuación de las alturas correspondientes*.

—Los antiguos astrónomos no conocían otro medio, para conocer la hora, que servirse de la altura de un astro. Se puede asimismo resolver el problema de hallar la altura de un astro correspondiente á una hora dada.

—En Hidráulica se distinguen dos clases de curvas de *altura*, á saber: aquellas que están tomadas en función del tiempo y dan á conocer las alturas del agua en una corriente, y las que determinan la altura del agua en un depósito.

—La curva de *altura de aguas en función del tiempo* es la que se obtiene llevando sobre un eje (el de abcisas) los tiempos diferentes en que se observan las alturas del agua sobre el lecho de una corriente,

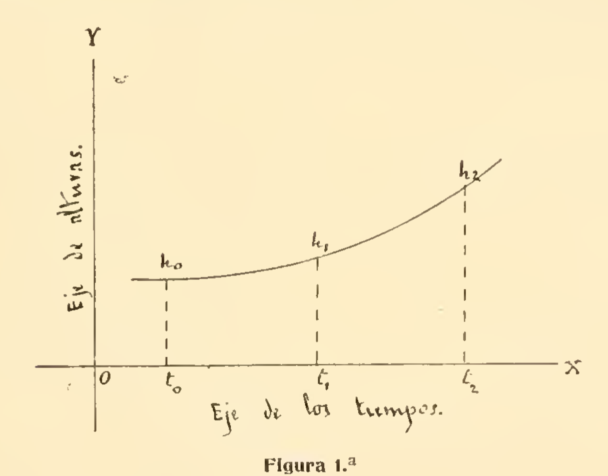


Figura 1.ª

las cuales se tomarán sobre las ordenadas correspondientes á los distintos tiempos de la observación (fig. 1.ª).

Estas líneas son de importancia, pues se usan para la determina-

ción de las curvas de los gastos en función de los tiempos. (Ver la voz *Gastos*).

—La curva de las alturas de agua en un depósito es la que se obtiene llevando sobre un eje (el de abcisas) los tiempos diferentes en que se observan las alturas del agua en el depósito, las cuales se tomarán sobre las ordenadas correspondientes á los distintos tiempos de observación (fig. 2.ª).

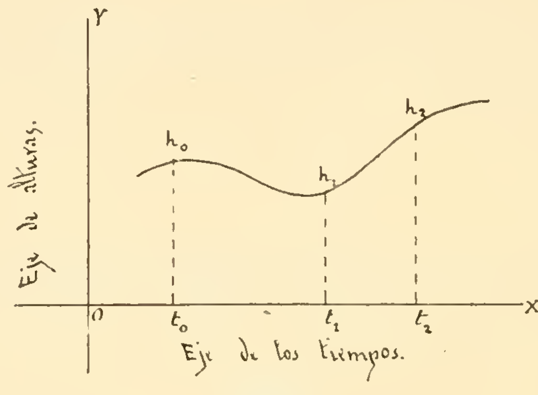


Figura 2.ª

Estas líneas son de importancia, porque ellas se usan para facilitar la determinación de las curvas de los gastos correspondientes á la entrada y salida del agua en el depósito.

Ambigena.

Definición. Curva hiperbólica de tercer orden en que una de sus ramas infinitas está situada fuera de las asíntotas.

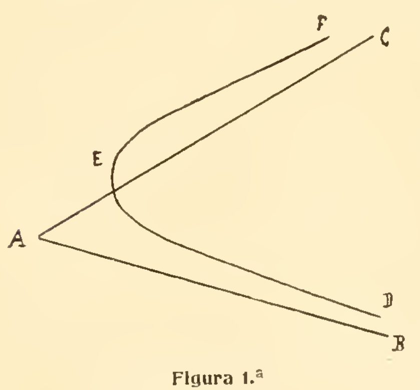


Figura 1.ª

Historia. –Newton fué el primero que dió á esta curva el nombre con que se la distingue, *Enumeratio linearum tertii ordinis* (1704).

Forma.—La forma que afecta esta hipérbola, con relación á las asíntotas, se señala en la figura; la rama DE es inscrita á la asíntota AB, y la otra rama EF es circunscrita á la asintota AC.

Amplitud.

Definición.—Se denomina *amplitud* de un astro, el arco de horizonte comprendido entre el primer vertical y el punto de salida ó puesta de este astro.

Clasificación.—La amplitud se llama *ortiva* ú *oriental*, si está comprendida entre el verdadero punto de Levante y el centro de un astro cuando sale, y *ocasa* ú *occidental* cuando se la cuenta desde el verdadero punto de Poniente para un astro que se pone.

Propiedades.—La amplitud, sea ortiva, sea ocasa, es siempre septentrional para todos los astros situados entre el ecuador celeste y el polo N., y meridional para los que lo están entre el ecuador y el polo S. Así la amplitud del sol es septentrional después del equinoccio de primavera hasta el de otoño, y meridional después de éste hasta aquél.

—El ángulo esférico, formado en el zenit por el primer vertical y por aquel que pasa por el centro del astro á su salida ó cuando se pone, se denomina *ángulo de amplitud.* Este ángulo es igual al rectilíneo formado por dos visuales que, partiendo del ojo del observador, vayan respectivamente: la una, al verdadero punto de E ú O, y la otra, al centro del astro, en el instante en que éste salga ó se ponga.

Determinación de la amplitud.—Sean $ROMS$ el círculo del horizonte verdadero, $RZPS$ el meridiano del lugar, Z el zenit, P el polo, O el punto del E. ó del O. y M el lugar de un astro que sale ó se pone. Para calcular el arco de la amplitud, haciendo abstracción de la altura del ojo del observador sobre el nivel del mar y de la refracción, que son dos causas que hacen sea la amplitud *aparente* distinta de la *verdadera,* se considera el triángulo esférico MPS, rectángulo en S, en el cual se tiene PM igual al complemento de la declinación del astro en el momento dado, y PS igual á la latitud del lugar, y en él se tendrá:

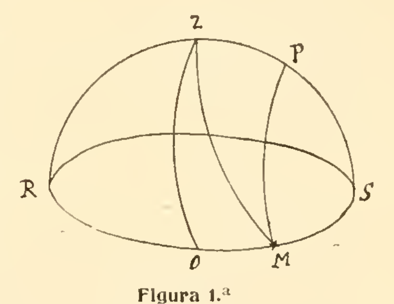


Figura 1.ª

$$\cos MS = \frac{R \times \cos PM}{\cos PS};$$

pero siendo

$$MS = 90^\circ - OM,$$

será

$$\cos MS = \text{sen } OM,$$

y designando por d la declinación del astro, por l la latitud del lugar, y desechando R, que en todas las fórmulas de trigonometria se supone igual á la unidad, se tendrá:

$$\text{sen (amplitud)} = \frac{\text{sen } d}{\cos l}.$$

—La amplitud de un astro es el complemento de su azimut, de manera que uno de estos arcos determinado, se obtiene inmediatamente el otro. (Ver azimut.)

Aplicaciones.—Los marinos se sirven de la amplitud para encontrar la declinación de la aguja imanada ó la variación del compás. A este efecto, observan, por medio del compás de variación, la amplitud del borde inferior del sol, en el momento de su salida ó de su puesta; luego calculan la amplitud aparente de este mismo borde, y la diferencia entre la amplitud calculada y la observada, le dan la variación.

—Se denomina *amplitud magnética* al arco de horizonte comprendido entre el centro del arco y el punto de intersección de la prolongación de la línea *E. O.* de la aguja con aquel círculo.

Anacámptica.

Del griego ἀνακάμπτειν, doblarse.

Definición.—Curvas producidas por la reflexión de rayos luminosos ó sonoros sobre una superficie, ocupando el ojo ú oido una posición especial.

Este nombre se da, á veces, á la parte de la Óptica que trata de la reflexión de la luz en general. Es sinónima de Catóptrica.

También se da este nombre á los *ecos* como sonidos reflejados y se dice *sonidos anacámpticos.*

Anaclástica.

Del griego ανακλαστος, que se refracta.

Definición.—Curva aparente que forma una superficie plana vista al través del agua que la cubre.

Tales son, por ejemplo, las que se forman en el fondo de un vaso lleno de agua, cundo *el ojo* del observador está colocado por encima.

Historia.—Este nombre fué dado por Mairau, pudiéndose consultar á este efecto su trabajo «*Sur la reflexión des corps*», inserto en *Memoires de l'Academie des Sciences* (1740).

Analagmáticas.

Definición.—A la curva, que es ella misma su transformada con respecto á un sistema de transformación determinado, se llama *analagmática del sistema.*

Historia.—Busmester: «*Kinematisch geometrische Untersuchunger der Bewegung affin verändlicher und collinear verändlicher Systeme*» (*Schlömilch's Zeitschrift*, t. XIX y XX), llamó á estas curvas *Selbsthüllcurven*, ó curvas que son sus propias envolventes.

—Con la denominación de *analagmáticas* las encontramos en Ocagne, Kœhler y otros autores.

—La transformación de cónicas y cúbicas en sí mismas puede estudiarse en Klein «*Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische*», Geometrie (*Mathematische Annalem*, t. IV), así como la transformación de las cúbicas se encuentra también tratada por Harnack (*Mathe. Ann.* t. IX, pág. 42), y la manera de ser engendradas las analagmáticas en el sistema de transformación octotangencial en D'Ocagne, *Coordonnées paralleles et axiales* (pág. 90).

Aplicaciones.—Las tienen en Cinemática, donde según un teorema muy conocido, se sabe que estas curvas consisten en círculos si la transformación es equivalente á un movimiento del plano sobre sí mismo.

Analema.

Del griego ἀνά, arriba y λέμμα, por extensión, apoyo.

Definición.—Recibe este nombre la proyección ortográfica de la esfera sobre el coluro del meridiano, suponiéndose el ojo del observador á una distancia infinita, y colocado en el punto oriental ú occidental del horizonte.

Aplicaciones.—En las esferas celestes se suele grabar, en particular por los cartógrafos ingleses, la figura en forma de 8 que se nombra analema, y la cual sirve para indicar la declinación del Sol para todos los días del año, en reemplazo de la eclíptica, por más que es frecuente trazar además este círculo.

—También sirve para averiguar, por medio de una sencilla operación gráfica, la altura del Sol en cualquier hora del día y el momento de su salida y ocaso en latitud y días determinados.

—Hoy se prefiere á los usos del analema las tablas de declinación del Sol.

Anemometrógrafas.

Del griego, *anemos*, viento; *metrón*, medida; *grapho*, yo describo.

Definición.—Reciben este nombre las líneas indicatrices de las intensidades de los fenómenos de dirección y velocidad del viento, señalados por los aparatos *anemometrógrafos.*

Historia.—La principal disposición de los anemometrógrafos ó anemómetros ordinarios que van acompañados de un aparato que registra ó señala él sólo las distintas indicaciones del anemómetro, es debida á M. Tampenot, de Paris.

Aplicaciones.—Estas curvas ponen de manifiesto las variaciones experimentadas en la dirección y velocidad del viento en las distintas horas del día.

Angrelado.

Definición.—Arco cuyo contorno está compuesto de varios arcos de círculo que en sus intersecciones forman ángulos agudos.

Clasificación.—Se distinguen con diferentes nombres según el número de arcos, generalmente impar, que los forman; si son tres, se llama *trebolado*, y si muchos, *multilobulado* y *polilobulado.* Cuando los arcos son muy pequeños se dice *festonado.*

Historia.—Caveda: *Ensayo histórico sobre la Arq. Española* (página 286), denomina *angrelados* á estos arcos, y en la (pág. 178) *lobulados;* y Villaamil: *Arqueología Sagrada* (pág. 35), *angrelado* y *polilobulado* á los compuestos de varios arcos de círculo, y *festonado* si éstos son muchos y menudos.

Uso.—Esta especie de arco fué muy usada en la arquitectura árabe y algo, aunque poco, en el último período del románico, encon-

trándosele también en el estilo ojival, si bien perdiendo su carácter de arco para convertirse en un adorno accesorio y sobrepuesto.

Anguínea.

Definición.—Curva hiperbólica de tercer orden que presenta dos puntos de inflexión, serpenteando alrededor de sus asíntotas.

Historia.—Newton fué el primero que dió á esta curva el nombre con que se la distingue: *Enumeratio linearum tertii ordinis* (1704).

Antevoluta

Definición.—Curva que es el lugar de los puntos que se obtienen prolongando los radios de los círculos osculadores por cima de la curva á que aquéllos pertenecen, una longitud igual á la de dichos radios.

Historia.—La consideración de esta curva se debe á Jacobo Bernouilli: *Lineæ cycloidales, evolutæ, antevolutæ, cáusticæ, anticáusticæ, pericáusticæ.—Earum usus et simplex relatio ad se invicem,* que la estudia y da nombre con las demás expresadas en esta Memoria, no teniendo hoy aplicación ni uso alguno.

Anticáustica.

Definición.—Se ha dado este nombre á una cierta trayectoria octogonal de aquellos rayos, que emanados de un punto son reflejados por una curva, y que envuelven, verificada la reflexión, una catacáustica.

—Estas curvas no vienen á ser otra cosa que las *cáusticas secundarias* (Ver esta voz) de Quetelet.

Historia.—Estas líneas han sido consideradas y dadas este nombre por Jacobo Bernouilli, *Acta eruditorum*, 1693, y Mr. Mannheim extiende esta denominación al caso de la refracción, pudiendose ver un estudio de las propiedades de estas curvas en *Journal de l'Institut*, correspondiente al 27 de Diciembre de 1860.

Propiedades.—Si se consideran las anticáusticas como envolventes de círculos, cuyos centros describen la línea dirimante y cuyos radios son proporcionales á las distancias de sus centros al punto luminoso, se componen de dos partes que corresponden á dos índices

de refracción iguales y de signos contrarios. Estas dos partes pueden ser dos curvas distintas ó constituir una misma curva. A la envolvente completa de los círculos, Mannheim la llama *anticáustica completa.*

—Una curva M y su anticáustica N, correspondientes á un punto luminoso F, y á un índice l, tienen por transformada, estando el polo en F, una curva N' y su anticáustica M', siendo el punto luminoso y el índice los mismos.

—La anticáustica N de una curva M para un punto luminoso F y un índice l, tiene por anticáustica, para el mismo punto luminoso y el índice $-l$, una curva semejante á M. El punto F es el centro de semejanza, y $\frac{l^2-1}{l^2}$, es la razón.

—Cuando el punto luminoso es polo principal de la línea dirimante, es también polo principal de la anticáustica completa de esta curva la potencia de transformación siendo distinta.

Anticlinal.

De las voces griegas *anti* contra, y *kliné,* acción de acostarse.

Definición.—Llámase línea anticlinal en Geonomía, la que marca la intersección de capas salientes que se dirigen ó buzan en dirección opuesta.

Propiedades.—Se obtiene, uniendo los diferentes puntos de intersección de las líneas de máxima pendiente en las vertientes de una montaña, y viene á formar como su divisoria.

—Esta línea separa los puntos de una montaña que van á verter á mares ó ríos distintos. La que en nuestra península separa los mares Océano y Mediterráneo se llama *general.*

—Si se unen los puntos de levantamiento de cada estrato, se obtiene el *eje anticlinal*, que determina la dirección del levantamiento.

—Las anticlinales á cierta distancia de la desembocadura de los ríos, se dividen siempre en dos, siendo de notar que en estos sitios existen las plazas fortificadas ó se han dado grandes batallas; se les llama *partidas.*

Aplicaciones.—Estas líneas, juntamente con las sinclinales (Ver sinclinales), son de gran importancia su determinación para el trazado y dirección de los canales. Pueden consultarse, *Tratado de Geognosia*, de D'Anbuissons (Cap. III, t. I); Vilanova (*Ensayo de Diccionario geog. geológico*), y para sus aplicaciones, «*El trazado de los Canales*» (*Revista de obras públicas*, t. III, pág. I), F. G. Barra.

Antiparalelas (Secciones).

Definición.—Se da este nombre á las secciones obtenidas en un cilindro ó cono de base circular por planos dirigidos en sentido antiparalelo, y también en la esfera con respecto al Ecuador.

Cono oblicuo de base circular.—Consideremos la sección principal, ó sea la hecha por un plano que pase por el eje del cono perpendicular á su base, y sea VAB (figura 1.ª) esta sección. Cortemos el cono por un plano perpendicular á VAB y la sección obtenida, CMD, será una circunferencia.

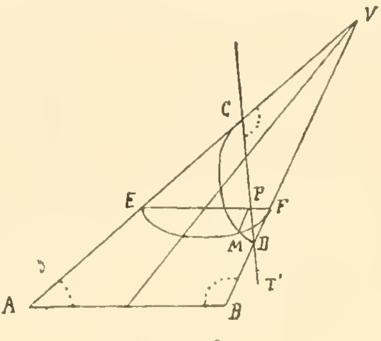


Figura 1.ª

En efecto; tomemos sobre CMD un punto M, por el cual tracemos un plano paralelo á la base, que cortará el cono, según la curva EMF, y el plano CMD, según la recta MP perpendicular al plano principal, se tendrá

$$\overline{MP}^2 = EP \times PF,$$

y para que CMD sea una circunferencia, siendo necesario que

$$\overline{MP}^2 = PC \times PD,$$

se tendrá

$$EP \times PF = PC \times PD$$

ó

$$\frac{EP}{PD} = \frac{PC}{PF};$$

relación que se verificará si los triángulos ECP y PDF son semejantes, ó lo que es lo mismo, si el ángulo en D es igual al ángulo en E.

Asi, pues, la sección hecha en un cono oblicuo de base circular, por un plano no paralelo á la base, será una circunferencia de círculo *si el plano de esta sección y el de la base del cono, forman con las gene-*

ratrices de la sección principal dos ángulos respectivamente iguales. La sección CMD, se llama *antiparalela.*

Cilindro oblicuo de base circular.—Determinemos la sección principal del cilindro y las dos secciones CMD y EMF en las mismas condiciones que el caso anterior. Del propio modo que allí, se demostrará que la sección CMD es una circunferencia, si el ángulo en D es igual al ángulo en E.

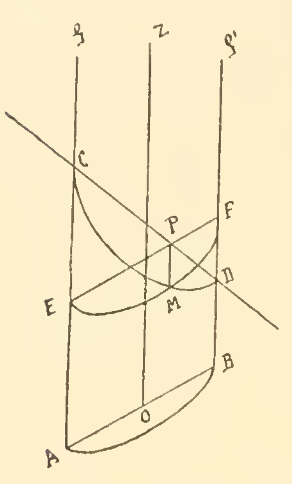


Figura 2.ª

Así, pues, la sección hecha en un cilindro oblicuo de base circular, por un plano no paralelo á la base, será una circunferencia de círculo *si el plano de esta sección y el de la base del cilindro forman con las generatrices de la sección principal dos ángulos respectivamente iguales.*

Esferas.—Lo propio se demuestra en la esfera respecto al ecuador.

Propiedad especial.—Los círculos obtenidos por dos secciones antiparalelas pertenecen á la misma esfera.—Sean (fig. 3) O, O', los centros de las dos secciones; las perpendiculares levantadas, en estos puntos, á los planos de las secciones, se cortan en un punto O, que se encuentra á igual distancia de los puntos de Δ y de Δ', puesto que viene á ser el centro del círculo que pasa por los puntos A, B; A', B'.

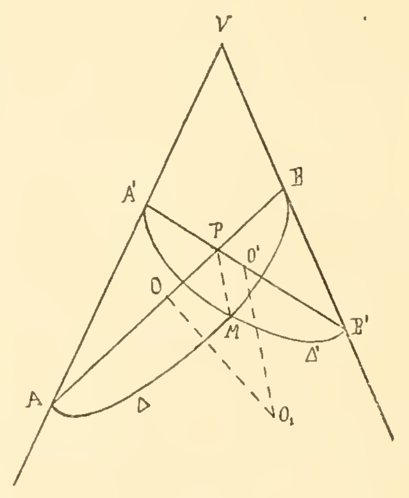


Figura 3.ª

Aplicaciones.—El método de las *proyecciones estereográficas* de que se hace uso en las construcciones de los mapamundis, está fundado sobre la propiedad de la sección antiparalela. Sea ASB la sección principal de un cono oblicuo de base circular; O, el centro de un círculo máximo de la esfera circunscrita á un cono determinado por el plano ASB. Tracemos el diámetro SK; todo plano perpendicular á SK, corta al cono según una circunferencia. En efecto: sea MN la traza sobre el plano ASB de un plano cualquiera perpendicular á SK.

El ángulo C tiene por medida la semisuma de los arcos AM y SN, y por ser $SN = SM$, la mitad del arco AS; pero el ángulo B, tiene por medida la mitad del arco AS; por consiguiente, el ángulo C es igual al ángulo B. La sección es antiparalela; luego es un círculo. Resulta, pues, que en este sistema de proyecciones, un círculo esté representado por un círculo.

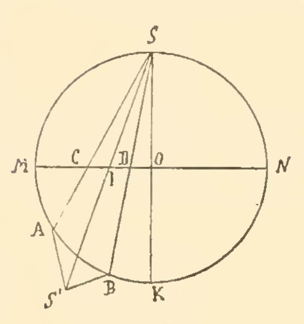


Figura 4.ª

Si se trazan las tangentes AS' y BS' y la línea SS', el punto I en que esta línea corta á MN, es el centro del círculo que tiene á CD por diámetro.

Aovada.

Definición.—Curva cerrada que presenta la forma de un huevo.

Historia.—La denominación de *aovada* se encuentra en diferentes pasajes antiguos; así, se lee en Pellicer, *Trad. del Argenis* (P. II, página 4): «Era el lugar, á modo de amphiteatro, en forma *aovada*...»; y «con su tapador *aobado* de lapi-lázuli...», en Zarco del Valle, *Doc. ind, para las B. A.* (pág. 195).

Trazado.—Se traza esta curva de la manera siguiente: sobre una recta, $A\ B$, como diámetro, se describe una semicircunferencia AMB. En el punto medio O de AB, se levanta la perpendicular ON á esta línea, y se toma sobre ella, á partir de O, una magnitud $OC = AO$.

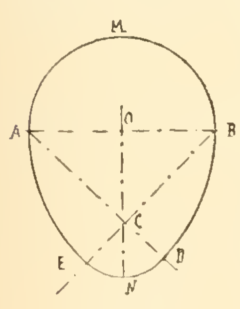


Figura 1.ª

Hecho esto, se trazan las rectas AC y CB, y desde el punto A como centro, con el radio AB se describe un arco BD, que se termina en la prolongación de BC. Siendo $AD = BE$ y $AC = BC$, será $CD = CE$. Por tanto, se puede desde el punto C, como centro, y con CD, por radio, describir un cuarto de círculo, el cual pasará por el punto E. Los arcos de esta manera trazados, se acordarán en los puntos A, B, D, E por contactos interiores y formará la curva cerrada de que nos ocupamos.

Aplicación.—Esta curva entra frecuentemente en la ornamentación arquitectónica.

Aplanéticas.

Definición.—Una línea aplanética es la envolvente de un círculo variable de magnitud y cuyo centro describe una línea plana nombrada *directriz*, y que toca constantemente una segunda línea situada en el mismo plano y que se la puede nombrar línea *polar*.

Historia.—El nombre de aplanéticas lo dió Strebor, aplicándolo á los óvalos de Descartes, puesto que ellos pueden considerarse engendrados (ver óvalo) de la manera que lo son estas curvas. El desarrollo de la teoría referente á las mismas, puede verse en el tomo IV, de los *Nouv. Ann. de Mathematiques*, y algunos casos particulares, tales como los que se exponen más abajo, han sido estudiados por Euler; el primero, en *Introductio in Analysin infinitorum* (t. II, página 415), y el segundo, que corresponde á la segunda especie de Euler, se encuentra en la misma obra (lib. II, cap. IX), siendo esta curva la que Newton señaló con el número cuarenta y cuatro, perteneciente al grupo que llamó hipérbolas concoidales, *Enumeratio linearum tertii ordinis.*

Propiedades.—Si conservando la misma directriz, se toma la línea aplanética por línea polar, ésta es aplanética respecto de la primera. Por tanto, estas dos líneas son conjugadas relativamente á la directriz.

—Estando dadas dos líneas planas cualesquiera, se las puede, generalmente hablando, considerar como conjugadas relativamente á una línea directriz. Así, pues, dos rectas son *aplanéticamente* conjugadas, relativamente á su directriz; dos círculos son aplanéticamente conjugados, tomando por directriz una hipérbola, etc.

Tangente.—Para trazar una tangente ó una línea aplanética, por un punto situado sobre la línea, basta trazar una tangente al círculo móvil correspondiente á este punto.

Ejemplos.—1.° El lugar de los vértices de las parábolas que tienen un punto y el foco común es una curva aplanética.

Su ecuación es:

$$\left.\begin{array}{r} y^4 + 2x^2 \\ -4Rx \\ -4R^2 \end{array}\right| \begin{array}{l} y^2 + x^4 \\ -4Rx^3 = 0 \\ \end{array}$$

y en coordenadas polares

$$\rho = \frac{R}{2}(1 - \cos\omega),$$

siendo

$$\omega = \widehat{FEN}.$$

—Se obtiene esta curva, tomando sobre el radio móvil de una circunferencia, á partir del centro, la mitad del senoverso del arco comprendido entre este radio y un radio fijo.

—El perímetro de toda la curva es igual al doble del diámetro de la circunferencia.

—Su área es igual á los $\frac{3}{8}$ del área del círculo.

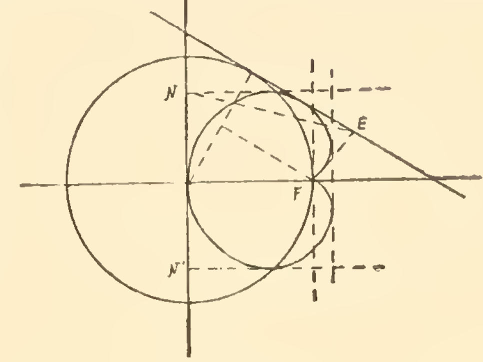


Figura 1.ª

2.° La curva

$$y^3 - y^2x + yx^2 - x^3 + y^2 - yx + x^2 = 0$$

Figura 2.ª

es asimismo una curva aplanética, siendo su forma la marcada en la

figura 2.ª; teniendo por asíntota la recta $O'Y''$, que forma con $O'X'$ un ángulo de 45.°

—Esta curva es el lugar de los pies de las perpendiculares dirigidas desde los vértices C de una serie de rectángulos, cuyos lados tienen una diferencia constante y se apoyan en las dos rectas OX y OY, perpendiculares entre sí, sobre las diagonales de los mismos.

—Asimismo se puede considerar esta curva como la podar, formada por los pies de las perpendiculares bajadas desde un mismo punto O' sobre las tangentes á la parábola.

—Su ecuación polar con respecto al polo O', centro de las coordenadas rectangulares, es:

$$\rho = \frac{\operatorname{sen}\omega \cos\omega - 1}{\operatorname{sen}\omega - \cos\omega},$$

que nos da para $\left| \begin{array}{l} \omega = 0 \;\ldots\; \rho = 1 \\ \omega = \frac{\pi}{4} \;\ldots\; \rho = \infty \end{array} \right|$

Aplicada ó trasportada.

Del latín *applicare.*

Definición.—Se dice *aplicada ó trasportada* á una curva; cuando se la coloca sobre el perímetro de otra.

Aplicación.—Usase de estas líneas á propósito de la demostración de alguna de las propiedades de igualdad, semejanza, homotecía, etcétera, entre una misma clase de curvas generalmente.

Apofige.


Figura 1.ª

Del griego ἀπό, lejos, y φυγή, huida.

Definición.—Se denomina así á la pequeña curva que enlaza el principio y el fin del fuste de la columna con las molduras de su basa y capitel.

Forma.—Presenta generalmente la forma de un cuarto de círculo, como se ve en la figura adjunta.

Apoloniana.

Definición.—Se denominan curvas *apolonianas* á la hipérbola y parábola ordinarias, para distinguirlas de otras curvas que también se les ha dado el nombre de hipérbolas y parábolas.

Así, por ejemplo: la curva cuya ecuación es $y^2 = Ax$ es la parábola *apoloniana* y aquella que representa la ecuación $A^2 = xy$ es la hipérbola *apoloniana*; mientras que las curvas expresadas por las ecuaciones $y^3 = A^2x$ y $A^3 = xy^2$ son parábolas é hipérbolas de tercer orden.

Historia.—El nombre de *apolonianas* viene desde el célebre matemático Apollonius de Perge (244, (a J. C)), cuya obra más célebre es su *Tratado de las cónicas*, de la cual no se conocen más que los cuatro primeros libros del texto original griego; los otros tres han sido conocidos por un manuscrito árabe.

Esta obra fué comentada y anotada por Pappus, Hypatia y Eutocius y traducida al árabe en tiempos del califa El-Mâmoun, no siendo apreciada en el Occidente hasta fines del siglo XV

Memmius ó Memmo (Juan Bautista) dió la primera traducción de las Cónicas de Apolonio, ó mejor dicho, de los cuatro primeros libros, bajo el título de *Apollonii Pergei philosophi mathematicique opera* (Venecia, 1537), y también Commandius la tradujo y publicó en 1566, con los comentarios de Eutocius y los lemas de Pappus, pero éstas y otras diferentes traducciones fueron imperfectas, debiéndose á Viviani el primer esfuerzo para la publicación completa, bajo el título de *Divinatio in V Apollonii conicorun.*

Roselli en 1658 la traduce de un manuscrito árabe encontrado en Florencia, en la Biblioteca de los Médicis, y la publicó en latín en 1661; pero sólo contiene los siete primeros libros. En 1710, Gregory y Halley la publicaron en Oxford reconstruyendo el libro octavo y último, mediante el estudio de las indicaciones de Pappus, considerándose ésta como la mejor edición de la obra de Apolonio, la cual forma época en la Historia de las Matemáticas y por cuyos méritos las curvas que nos ocupan llevan su nombre.

Arco.

Del latino, *arcus*, igual sentido.

Definición.—Una porción cualquiera de curva, es un arco de esta curva.

El *arco*, como la *rama* (ver esta voz), no son realmente curvas especiales, sino porciones de curvas, y bajo este concepto no debían de figurar en este catálogo; pero como tanto éstos como aquéllos, tienen tan grande importancia y denominaciones tan distintas, nos ocupamos de ellas; hecha ésta, que entendemos necesaria salvedad.

Denominaciones y clases.—En Geometría, los arcos son conocidos por la denominación con que se distingue la curva del cual es parte;

así se dice: elíptico, parabólico, cicloidal, etc., según sean porciones de elipse, parábola, cicloide, etc.

—Se distinguen también los arcos *concéntricos*, *iguales* y *semejantes*. Los primeros son los que tienen un centro común; los segundos son aquellos que, superpuestos, coinciden ó si se trata del círculo, los que comprenden un número igual de grados de un mismo círculo, y por último los semejantes en el círculo, aquellos que comprenden un número igual de grados de círculos diferentes, y en otra clase de curvas aquellos que guardan entre si una cierta relación. (Ver *Semejantes.*)

—Mr. Chasles llama *arcos semejantes* á arcos cuya diferencia es igual á una recta; estos arcos no deben llamárseles de este modo, por el sentido peculiar de la palabra semejante; siendo de desear se indicara otra manera de nombrarlos. Mr. Terquen propone se nombren *arcos correspondientes, Nouvelles Annales-Mathematiques* (t. III página 508), palabra introducida en la ciencia por Mr. Ivory en la teoría de las atracciones de los esferoides.

—Se tiene también el *arco infinitesimal.* (Ver esta voz).

Propiedades.—En todo arco hay dos elementos importantes que estudiar, la longitud y la curvatura.

Longitud.—La longitud de un arco de curva no puede ser mejor definida que lo es la duración de un tiempo, el calor de un cuerpo, etc. Muchos confunden definición con transformación de noción; los que tal hacen, no se preocupan sino de la aceptación de sus pretendidas definiciones, suponiendo de parte del espíritu una operación que constituye una nueva dificultad, sin suprimir la obligación de la concepción primitiva. Así, se podrá definir la longitud de un arco de curva, diciendo que es el límite hacia el cual tiende un contorno poligonal inscrito en dicho arco y cuyos lados disminuyen indefinidamente. Aun cuando esta identidad existe, es claro que el consentimiento acordado exige: 1.°, la concepción de la longitud del arco de curva; 2.°, la de la longitud límite del contorno poligonal, y 3.°, el sentimiento de la igualdad de las dos cosas. Por otra parte, la aceptación exclusiva del nuevo punto de vista no equivaldrá sino á la supresión de la noción primitiva. La especie *longitud poligonal* no es introducida sino para abstraer la idea de longitud de la idea de arco. La definición completa, si es posible, deberá, pues, comprender las dos ideas.

—Se calcula la longitud de un arco de curva, considerándolo compuesto de elementos rectilíneos infinitamente pequeños.

—La diferencial de un arco en coordenadas cartesianas es

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2};$$

luego si se tiene un arco comprendido entre dos puntos cuyas abscisas son x_0 y x, su longitud será:

$$x = \int_{x_0}^{x} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_0}^{x} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Si la ecuación de la curva dada viene bajo la forma $x = f(t)$ é $y = F(t)$, se tendrá:

$$S = \int_{t_0}^{t} \sqrt{f'(t)^2 + F'(t)^2};$$

llamando t_0 y t los valores de t dados por las ecuaciones $x_0 = f(t_0)$ y $x^t = F(x^t)$.

—Si la curva está definida en coordenadas polares, la diferencial del arco será

$$ds = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2},$$

de donde se deduce

$$S = \int_{\omega_0}^{\omega} \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2};$$

siendo ω_0 y ω los valores de ω correspondiente á los extremos del arco de que se trata.

—Si la curva es alabeada y sus ecuaciones están definidas en coordenadas cartesianas, la diferencial del arco será (ver *alabeadas*):

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

de donde

$$S = \int_{x_0}^{x} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

siendo x_0 y x las abscisas extremas del arco.

Cuando las ecuaciones de esta curva alabeada tienen la forma $x = \rho(t)$; $y = f(t)$; $z = F(t)$ en función de la incógnita auxiliar t, se tendrá:

$$S = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\varphi'(t)^2 + f'(t)^2 + F'(t)^2 dt},$$

las cantidades t_0 y t, estarán, como siempre, calculadas para los puntos extremos del arco.

Curvatura.—Se dice curvatura de un arco, la cantidad que un arco de curva infinitamente pequeño se separa de la linea recta. Como se puede suponer que este arco infinitamente pequeño pertenezca á un círculo, se mide la *curvatura* de una curva cualquiera, en un punto dado, por la del círculo que coincide con ella en este punto.

—Como la curvatura de un círculo es tanto mayor cuanto más pequeño es su radio, resulta que la curvatura de una curva en cada uno de sus puntos, es la inversa del radio del círculo coincidente. A este círculo se le da el nombre de *círculo osculador* (ver esta voz), á su radio el de *radio de curvatura*, y los centros de estos círculos dan lugar á una nueva curva, que es la *evoluta* (ver esta voz) de la primera.

—Las propiedades de los arcos no son más que casos particulares de las generales de las curvas, á los cuales ellos pertenecen. El más simple es el arco de círculo ó porción de circunferencia y también el más comúnmente empleado, por lo cual lo trataremos en este lugar.

Arco de círculo.—Cuerda del arco es la recta que une sus extremos. En un mismo círculo ó círculos iguales, á arcos iguales, cuerdas iguales. En círculos iguales, á mayor arco, mayor cuerda. La perpendicular bajada desde el medio de una cuerda, pasa por el medio del arco, lo cual permite dividir el arco en 2, 4, 6, 8... partes iguales, levantando una perpendicular por el medio de su cuerda, luego una perpendicular por el medio de las cuerdas de la mitad del arco, y así sucesivamente. Los arcos comprendidos entre dos paralelas que cortan una circunferencia, son iguales.

—En un mismo círculo ó en círculos iguales, á iguales arcos, corresponden iguales ángulos en el centro, relación fundamental en virtud de la cual se puede substituir la medida de los arcos por la de los ángulos.

—Considerada la circunferencia dividida en 360°, se evalúa un arco dado por su relación con ella; así, un arco que sea la quinta parte de la circunferencia, será:

$$\frac{360}{5} = 72°.$$

La graduación del arco se lee como la de los ángulos, sirviéndose del vernier.

—Si dos arcos comprenden igual número de grados, no se podrá concluir que sean iguales, no serán más que semejantes; es decir, corresponderán á dos ángulos iguales en el centro. Para que dos arcos sean iguales es necesario que contengan igual número de grados y puedan coincidir como perteneciendo á circunferencias iguales, según se dijo al principio.

—Las arcos semejantes son entre sí como sus radios.

—El arco de 90º ó cuarta parte de la circunferencia se llama *cuadrante.*

—Dos arcos se llaman *complementarios* uno del otro cuando su suma es igual á 90º.

—Se llaman *suplementarios* uno del otro cuando su suma es de 180º.

—La circunferencia de un círculo, siendo incomensurable con su radio, no se ha podido encontrar ninguna expresión finita que nos dé á conocer la magnitud de un arco dado en partes del radio. Si el seno ó la tangente de un arco cualquiera son conocidos, en este caso, se puede obtener el valor del arco por las series siguientes, siendo el radio igual á la unidad.

$$x = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x - \frac{1}{7} \operatorname{tg}^7 x + \ldots\ldots$$

$$x = \operatorname{sen} x + \frac{1}{2 \,.\, 3} \operatorname{sen}^3 x + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4 \,.\, 5} \operatorname{sen}^5 x + \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 7} \operatorname{sen}^7 x + \ldots\ldots$$

—Cuando la magnitud de un arco es conocida en partes del radio, para encontrar el número de grados que contiene, se pueden escribir las proporciones:

$$\pi : x :: 200 : x' ;$$

$$\pi : x :: 180 : x'' ;$$

siendo x' el número de grados para división *centesimal* y x'' el mismo número para la división *sexagesimal*:

—Si del valor de un arco en grados se quiere pasar á su valor en partes del radio, se hará también uso de estas proporciones, considerando que x' y x'' son las cantidades dadas y x las cantidades buscadas.

—Si á partir de un origen fijo O, situado sobre una circunferencia, se

consideran diferentes arcos, tales como AM, AM' de un lado, y AN, AN' de otro, se ve que los primeros no se cuentan en el mismo sentido que los segundos, aun cuando puedan ser iguales en valor absoluto. Esta oposición de sentidos, con relación á un punto fijo, en la consideración de los arcos, se expresa en los cálculos numéricos por dos signos diferentes. Se ha convenido considerar como *positivo,* y por consecuencia afectar del signo +, los arcos contados en el sentido AMM', y de considerar como negativos afectados del signo — los contados en el sentido ANN'.

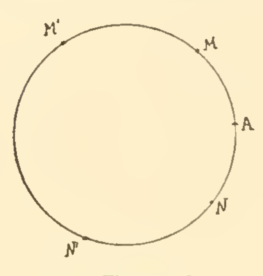


Figura 1.ª

—La Geometría elemental no ha podido especular con los arcos mayores de una circunferencia. Sin embargo, consideremos que un punto móvil parte del punto A y se mueve sobre la circunferencia en el sentido AMM'. Si recorre toda la circunferencia volverá á A, pero si continúa su movimiento describirá un arco mayor de 360°. De aqui que sea necesario admitir los arcos de todas las magnitudes posibles, desde cero al infinito positivo, y desde cero al infinito negativo, si el móvil marcha en el sentido ANN'. Para comprender toda clase de arcos en una sola expresión, se ha convenido en tomar el radio de una circunferencia por unidad de longitud de los diferentes arcos que pueden ser contados sobre esta circunferencia, de modo que la relación constante $\frac{C}{2R}$ de la circunferencia al diámetro, se reduce á $\frac{C}{2}$ que nos da $\frac{C}{2} = \pi$ ó $180° = \pi$. Así, un arco cualquiera será menor, mayor ó múltiplo de π y estará, por tanto, comprendido en la expresión $K\pi + a$, designando K un número cualquiera positivo, negativo ó nulo, con la suposición de ser $a < \pi$.

—La importancia de estas consideraciones es capital en Trigonometría, ciencia que reemplaza la suma, resta, multiplicación y división de los arcos por operaciones análogas efectuadas sobre rectas, llamadas *líneas trigonométricas.*

—En Arquitectura, el *arco* es uno de los principales elementos de construcción, y recibe denominaciones muy variadas, según sus distintas formas; distinguiéndose, entre otros, los llamados medio pun-

to, escarzano, rebajado, carpanel, herradura, angrelado, ojival, etcétera.

—En Astronomía reciben también los arcos nombres muy distintos, según los círculos de la esfera sobre los cuales se les considera, y así, entre otros, se distinguen los de progresión, retrogradación, semidiurno, emersión, latitud, longitud, etc.

Advertencia.—Todas las especies de arcos son tratadas particularmente en los lugares respectivos de este catálogo, estimando conveniente su descripción; porque, si bien es cierto no forman *curvas particulares,* no dejan de presentar, á más de una denominación especial aplicada, si no á una curva á un trozo de ella ó diferentes trozos de una curva, particularidades y circunstancias que aumentan los datos que en esta obra trate de encontrar el que la consulte.

Arista de retroceso.

Definición.—Se llama *arista de retroceso* el lugar de los puntos en que cada característica (ver esta voz) es cortada y tocada por su infinitamente próxima.

Historia.—El nombre de arista de retroceso se debe á Monge: *Applicatión de l'analyse á la Géométrie* (1807) y *Géométrie Descriptive,* (1799); habiendo Mr. Painvin determinado, de una manera muy elegante *(Les mondes,* t. XXIII, pág. 586), los elementos de esta curva, de una superficie desarrollable determinada por sus ecuaciones tangenciales. Se puede ver sobre esta cuestión la Memoria de T. Olivier *Journal de l'Ecole Politecnique* (1835, t. XV), y los diferentes autores de Geometria descriptiva y de Cálculos.

Ecuación.—Si se consideran dos características consecutivas que resultan de la intersección de tres involutas también consecutivas de dos en dos, y si las ecuaciones de estas tres involutas son:

$$f(x,y,z,\alpha)=0;\quad f(x,y,z,d\alpha)=0\quad \text{y}\quad f(x,y,z,d''\alpha^2)=0$$

la primera característica será dada por las ecuaciones·

$$f=0\quad \text{y}\quad f'_{\alpha}=0;$$

y la segunda, por las

$$f'_{\alpha}=0\quad \text{y}\quad f''_{\alpha^2}=0;$$

y estas dos curvas en general se cortarán al mismo tiempo que se tocan, en un mismo punto, determinado por los valores de x, y, z, que satisfagan á las tres ecuaciones

$$f = 0; \quad f'_{\alpha} = 0; \quad f'_{\alpha^2} = 0,$$

de las que, eliminando el parámetro variable α, se obtendrá la ecuación de la *arista de retroceso.*

Propiedades.—Estas curvas dividen en general las superficies en diferentes hojas, son tocadas por todas las características y son, con relación á ellas, verdaderas envolventes.

—Cada característica es tangente á la arista de retroceso.

—En las superficies desarrollables, la arista de retroceso es el lugar geométrico de las intersecciones sucesivas de sus generatrices rectilíneas, y las dos hojas en que separan á la superficie, se denominan, á la superior, *hoja superior*, y á la otra, *hoja inferior;* y para pasar un punto móvil de una hoja á la otra, á menos que este punto no recorra una generatriz, describirá una curva que presentará un punto de retroceso sobre la arista de este nombre.

—Cuando se tiene la ecuación de una superficie desarrollable, es fácil formar la de una cualquiera de sus generatrices rectilíneas; ellas contendrán, naturalmente, un parámetro arbitrario. Ahora, derivando una de ellas con relación á este parámetro y combinando la ecuación así obtenida con las de la generatriz, se obtendrá el punto en que esta generatriz toca á la arista de retroceso; se tendrán, por tanto, las ecuaciones de esta curva eliminando el parámetro arbitrario entre las tres ecuaciones de que se acaba de hablar.

—El lugar de las tangentes á una curva de doble curvatura cualquiera es una superficie desarrollable, y la curva en sí misma es la arista de retroceso de esta superficie.

—Si $x = f(z)$ é $y = \varphi(z)$ son las ecuaciones de la arista de retroceso, las de su tangente en un punto (α, β, γ), serán:

$$x - f(\gamma) = f'(\gamma)(z - \gamma),$$
$$y - \varphi(\gamma) = \varphi'(\gamma)(z - \gamma).$$

y eliminando γ entre estas ecuaciones, se tendrá la ecuación de la superficie desarrollable.

—La arista de retroceso de la superficie envolvente de los planos normales á una curva dada, ha demostrado Mr. Fourier, tiene sus

ángulos de contingencia respectivamente iguales á los ángulos de flexión de esta curva.

—El plano tangente á la superficie desarrollable que estará definido por dos generatrices consecutivas é infinitamente próximas, será osculador á la arista de retroceso, por pasar por dos tangentes á esta curva en puntos infinitamente próximos.

—La arista de retroceso de una superficie cilíndrica, que es un caso particular de las desarrollables, está situado en el infinito, puesto que todas las generatrices son paralelas y se cortan en sus puntos impropios.

—La arista de retroceso de una superficie cónica, caso particular también de las desarrollables, se convierte en un punto, que no es otro que el vértice de la superficie cónica, puesto que todas las generatrices pasan por este punto.

—Para una hélice circular H, la arista de retroceso h será también una hélice circular; todas las hélices cilíndricas que se podrán trazar sobre la superficie envolvente de los planos normales de la curva H, serán todas hélices circulares; pero estas curvas no serán las hélices trazadas sobre la superficie desarrollable; ellas no se transformarán en línea recta cuando esta superficie sea planificada, sino que se transforman, por el contrario, en círculos concéntricos.

Aristas de encuentro ó aristones.

Definición.— Se da este nombre en Estereotomía á las curvas intersección de las superficies de bóvedas simples en cañón, que tienen sus nacimientos sobre el mismo plano horizontal y la misma altura en la clave.

Esta denominación se hace extensiva á las curvas, resultado de la penetración de dos bóvedas cualesquiera, siempre que reunan las circunstancias expresadas para los cañones.

Historia.— Vitruvio no habla de una manera especial de las bóvedas de arista, si bien ya se ejecutan en su tiempo, tales, probablemente, como la llamada *xystus* por los antiguos y la *exedra amplíssima;* Vitruvio (L. V, cap. II). En Roma se ven algunas bóvedas de esta clase, especialmente en las Termas de Caracalla y Diocleciano y en el templo de la Paz, así como también en la gran sala de las Termas de Juliano en París.

En la bóveda de arista ojival, el aristón simple de las bóvedas de

arista ordinarias, está reemplazado por una cadena de piedra saliente, que forma el llamado *nervio*.

Se pueden consultar sobre estas bóvedas los tratados especiales de Corte de piedras, de Adhemar, Douliot, Frezier, Leroy, etc.; *L'Architecture*, de Philibert de Lorme; *L'art de bâtir*, de Rondelet, y la *Memoria sobre las bóvedas de la Edad Media*, de M. Willis, insertas en *Transactions de l'Institud de Londres* (t. I, 2.ª parte) ó *Revue d'Architecture*, de M. Daly (t. IV), etc.

Propiedades.—Estas curvas son generalmente de doble curvatura. Para que sea plana es necesario que entre las secciones rectas de los dos cañones exista una cierta relación. En el caso en que las secciones de los cañones son elípticas, la intersección de los dos intradós es una curva plana, porque, en efecto: sean (fig. 1.ª) AC y BD las generatrices de nacimiento del primer cañón, y $A'C$ y $B'D$ las del segundo; trazando en cada una de las superficies un plano secante vertical paralelo á las generatrices de la otra, estas secciones serán elipses, y tendrán el eje menor igual, puesto que ambos cañones tienen la misma altura. Consideremos un plano secante paralelo á las generatrices de los cañones; este plano cortará á las dos superficies, según dos generatrices que se proyectarán paralelamente á sí mismas en PQ y $P'Q$. Sean M y M' los puntos de las dos elipses que se proyectan en P y P', se tendrá $MP = M'P'$.

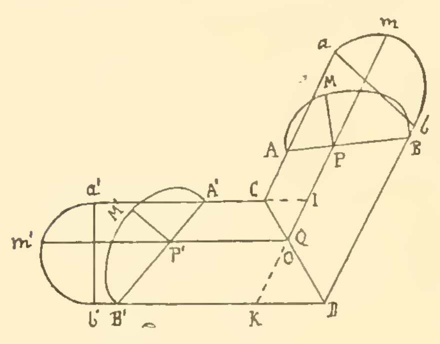


Figura 1.ª

Llamando x y x' las abscisas correspondientes á las ordenadas iguales, será:

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{x'^2}{a'^2},$$

de donde

$$\frac{x}{a} = \frac{x'}{a'},$$

y, por consiguiente,

$$\frac{x}{a - x} = \frac{x'}{a' - x'}.$$

Ahora bien; como se tiene

$$AP : PB = A'P' : P'B',$$

y prolongando PQ hasta K y $A'C$ hasta I, es:

$$CI : KD = IQ : KQ;$$

esta proporción demuestra que los triángulos CIQ y KDQ son semejantes, y que, por consiguiente, los tres puntos C, Q y D están en línea recta. Así, pues, las proyecciones de las intersecciones de las generatrices de los dos cilindros están situadas sobre CD y, por consecuencia, la intersección de las dos superficies es plana. De lo expuesto se deduce que es una elipse cuyo eje mayor es CD y su semieje menor la altura común de los dos cañones.

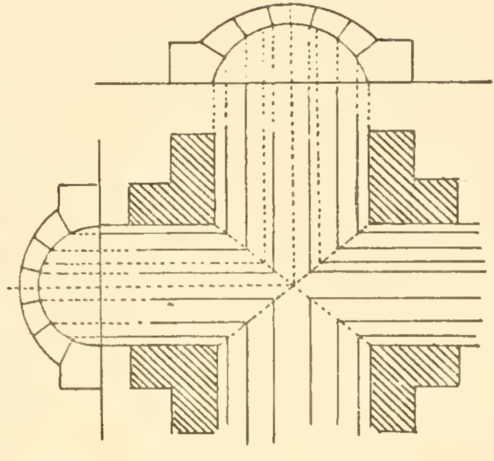


Figura 2.ª

En la bóveda de arista (fig. 2.ª), las curvas de intersección de los dos cañones se componen de cuatro semiaristas de encuentro, en las cuales las dovelas de los cañones forman los ángulos salientes. En la bóveda de rincón de claustro (fig. 3.ª), las cuatro semiaristas de encuentro forman, por el contrario, ángulos entrantes, vistas naturalmente por abajo.

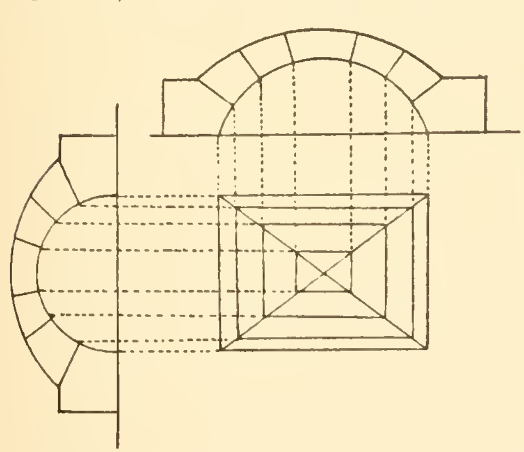


Figura 3.ª

También se usan las bóvedas de aristas de doble aristón, lo cual da lugar á disposiciones sumamente variadas; como también cuando el encuentro de cañones

es en mayor número de dos, y si la forma de las plantas son más ó menos regulares.

En la bóveda de arista en torre redonda, la arista resulta de la penetración de una bóveda anular y de un conoide y viene á ser su

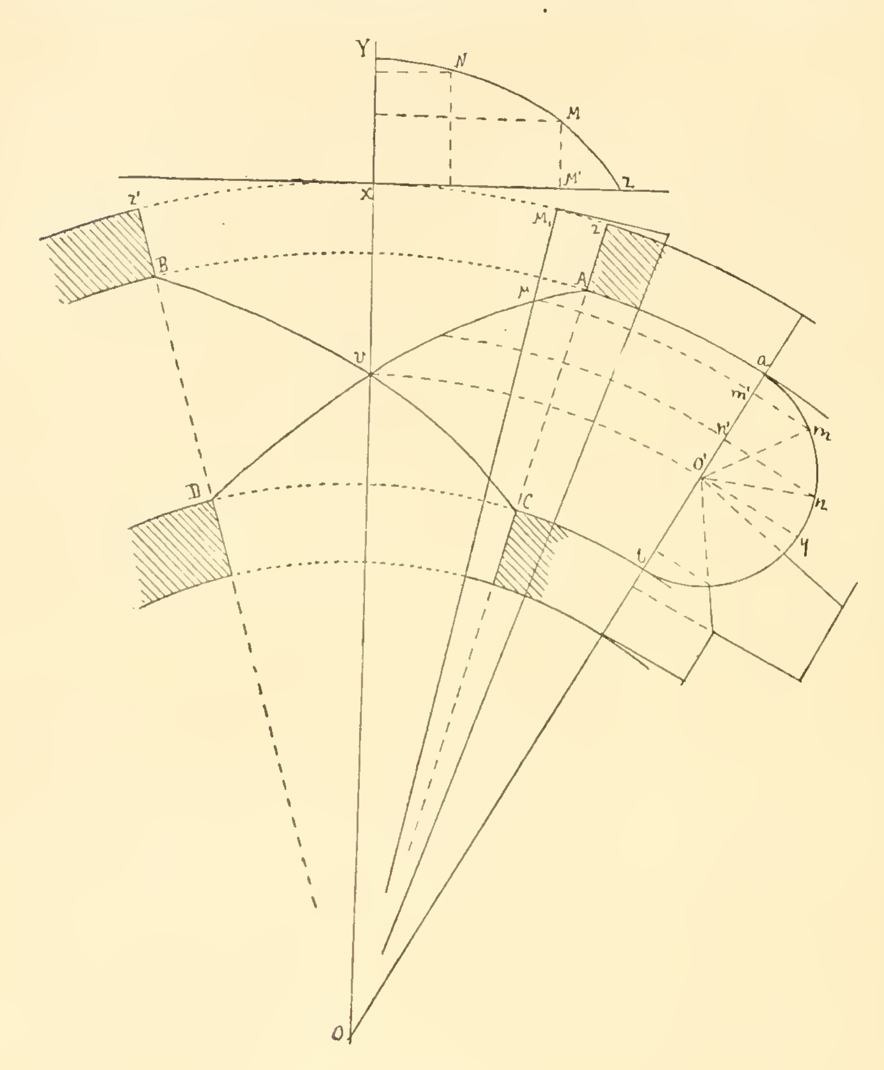


Figura 4.ª

proyección horizontal una espiral de Arquímedes. Así, en efecto, sea (fig. 4.ª) el cañón de sección *amnb* y *o* la proyección horizontal de su eje, y el conoide, aquél que se forma de generatrices horizontales que se apoyan sobre el eje *o* del cañón, y la directriz *YNM*,

arrollada sobre el cañón, según la línea $x'Xx$, directriz, cuya semibase $XZ = Xx$ desarrollada y cuyos puntos Y, N, M tienen sobre la horizontal alturas iguales á las ordenadas y, n, m, de la sección del cañón. Las secciones hechas por planos horizontales producen en el cañón circunferencias, y en el conoide generatrices, que por sus respectivas intersecciones dan lugar á los puntos que determinan las proyecciones BC y AD de las curvas de las aristas.

Ahora bien; si hacemos $OX = R$, $O\mu = \rho$, $O'm = r$, $OO' = d$, $MM' = mm' = y$; $Xo\mu = \omega$, $XOx = \omega_0$, resultará

$$XM_1 = XM' = \omega R;$$
$$Xx = XZ = \omega_0 R.$$

La elipse YMZ nos da,

$$y^2 = r^2 - \frac{r^2}{\omega_0^2 R^2} \cdot \omega^2 R^2 = r^2 - \frac{r^2 \omega^2}{\omega_0^2};$$

el círculo amb nos da también

$$y^2 = r^2 - (\rho - d)^2,$$

y la comparación de estas dos relaciones nos dice, que

$$(\rho - d)^2 = \frac{r^2 \omega^2}{\omega_0^2};$$

de donde

$$\rho = d \pm \frac{r}{\omega_0} \omega;$$

y haciendo girar el eje polar un ángulo conveniente, la ecuación anterior puede tomar la forma

$$\rho = \pm \frac{r}{\omega_0} \omega',$$

la cual pertenece á una espiral de Arquímedes.

De esta especie de bóvedas existen un gran número de ejemplos;

pudiendo citar como más notables la del *Anfiteatro* de *Vespasiano* en Roma y las del mercado de Blé en París.

Ascensión.

Clasificación.—Se distinguen la *ascensión recta* y la *ascensión oblicua.*

Ascensión recta.—Definición.—Se da el nombre de *ascensión recta* de un astro al arco de ecuador comprendido entre el primer punto de Aries y el círculo de declinación que pasa por el centro del astro.

Propiedades.—Las ascensiones rectas se cuentan por grados desde 0° hasta 360°, en el sentido de O. á E., es decir, según el orden de los signos.

—Todos los astros colocados sobre un mismo semicírculo de declinación tienen la misma ascensión recta, y los que están sobre el semicírculo de declinación opuesta, tienen una ascensión recta que difiere en 180° de la de los primeros.

—Para mayor comodidad en los cálculos en que entran las ascensiones rectas de los astros, se usan comúnmente las horas, minutos y segundos de tiempo, en lugar de grados y parte de grados, concibiendo para ello el ecuador dividido en veinticuatro horas, cada hora en sesenta minutos, etc.

—La ascensión recta y la declinación de un astro son, con respecto al ecuador, lo que su longitud y latitud con respecto á la eclíptica.

—La ascensión recta y la declinación son para los astros, lo que la longitud y la latitud son para los diferentes puntos de la tierra.

—La distancia del equinoccio al Sol, es el suplemento de su ascensión recta á veinticuatro horas.

Ascensión oblicua.—Definición.—Se da el nombre de *ascensión oblicua* de un astro, al arco de ecuador comprendido entre el primer punto de Aries y el punto del ecuador que se eleva al mismo tiempo que el astro.

Propiedades.—La ascensión oblicua se cuenta de la misma manera y en el mismo sentido que la ascensión recta.

—La ascensión oblicua de un astro puede ser más pequeña ó mayor que su ascensión recta.

—La ascensión recta del sol es mayor que su ascensión oblicua, cuando su declinación y la latitud del lugar son del mismo nombre; y la ascensión recta del sol es más pequeña que su ascensión oblicua, cuando su declinación y la latitud del lugar son de nombre contrario.

Asiento.

Definición.—Se llama *curva de asiento* la que se adopta para el perfil de una cimbra, de modo, que luego de descimbrada la bóveda tome la forma que se desea.

Aplicaciones.—Cuando en la *Construcción* se quiere efectuar un arco, bóveda, etc., bajo un perfil determinado, es necesario tener en cuenta la naturaleza de los materiales que han de entrar en la construcción de dicho arco, bóveda, etc., y de la clase de los esfuerzos á que han de quedar sometidos, para deducir la variación que puede experimentar la obra antes de *hacer su asiento*, es decir, después de haber fraguado los morteros y verificadas las *menguas* debidas á las compresiones y demás esfuerzos á que los materiales están sujetos. Estas variaciones conocidas, bastará tenerlas en cuenta sobre la forma que se desea dar á una bóveda para obtener la *curva de asiento* consiguiente; llevándolas en sentido inverso sobre aquélla para que ésta pueda llenar el objeto apetecido. (Ver *Dóricas*).

Asintóticas.

Del griego ἀσύμπτωτος, que no coincide jamás.

Definición.—Dos líneas de ramas infinitas AC y BD son asintóticas, cuando cortadas por una serie de paralelas AB, $A'B'$, $A''B''$..., la parte de éstas, interceptadas por aquéllas, va disminuyendo á medida que las paralelas se alejan del origen y, sin llegar á ser cero, puede ser menor que cualquier longitud por pequeña que sea, ó en otros términos, que se reduce á cero cuando se consideran puntos situados á distancia infinita del origen.

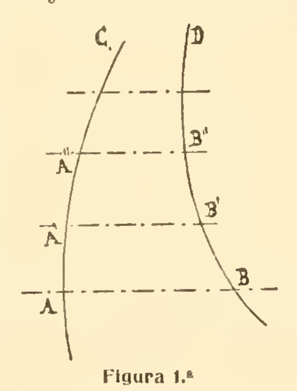


Figura 1.ª

Propiedades. — Dos curvas f y F serán asintóticas, siempre que la diferencia de las ordenadas y é Y, que corresponden á una misma abscisa x, tiende hacia cero, cuando x crece indefinidamente.

Si la ecuación de una curva se puede poner bajo la forma,

$$y^p = U + \frac{V}{W},$$

siendo p un número impar, U, V, W, funciones enteras de x y el grado de V menor que el W, la curva que corresponde á la ecuación

$$Y^p = U$$

y la curva anterior serán asintóticas.

—De la definición arriba espresada se deduce, considerando las paralelas AB, $A'B'$... infinitamente próximas que, los ángulos que forman entre sí los elementos de curvas AA' y BB', $A'A''$ y $B'B''$, etcétera, vayan disminuyendo hasta reducirse á cero, porque si dicho ángulo aumentase, ó sólo permaneciese constante, una de dos, ó las curvas se alejarían ó llegarian á cortarse, lo que es contrario á la definición.

—Cuando los elementos de curva forman un ángulo nulo, sus tangentes serán paralelas, y como suponemos que los puntos situados en una misma secante infinitamente lejana se confunden, también se confundirán los dos elementos de curva y las correspondientes tangentes, que de este modo formarán una asintota de las dos curvas, asíntota que podrá estar á distancia infinita toda ella, sin perjuicio de que las dos curvas pasen á distancia finita del origen.

—Dos lugares asintóticos el uno del otro, tales como las dos circunferencias

$$x^2 + y^2 = R^2, \qquad (x - d)^2 + y^2 = R^2,$$

tienen una infinidad de puntos comunes en el infinito.

—Dos conjugadas de igual característica de las dos circunferencias, tienen, en efecto, sus asíntotas paralelas, es decir, se cortan en el infinito.

—Dos líneas que se presentan recíprocamente su concavidad, no pueden ser asintóticas una de otra, á menos que antes de cortarse cambie la curvatura de alguna de ellas y una por lo menos presente su convexidad á la otra.

Auxiliares.

Difinición.—Cuando la ecuación de una curva C es dada bajo la forma

$$\rho = f(\omega)$$

y se puede, por medio de transformaciones, hacer que tome la de

$$\rho = \varphi(\omega) + \psi(\omega) + \ldots\ldots,$$

se podrá construir la curva C construyendo separadamente las

$$n = \varphi(\omega), \qquad v = \psi(\omega), \ldots\ldots$$

que se nombran las auxiliares de C.

Historia.—Se debe la denominación de *auxiliares*, aplicada á estas curvas, á M. G. de Longchamps, *Geómétrie Analytique á deux dimensions* (pág. 607).

Propiedades.—Para construir la curva C sirviéndose de las auxiliares n y v; bastará considerar á ρ como la suma de los radios vectores de estas curvas. Así, por ejemplo, en la ecuación:

$$\rho = \frac{1}{\cos^2 \frac{\omega}{2}} + \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \qquad (1)$$

se consideran las dos curvas que tienen por ecuación, respectivamente:

$$(2) \qquad n = \frac{1}{\cos^2 \frac{\omega}{2}} \qquad \text{y} \qquad v = \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \qquad (3)$$

y se tendrá:

$$\rho = n + v.$$

Como la ecuación (2) representa una parábola y la (3) una estrofoide, se construyen estas curvas y se encontrará la (1) sencillamente, punto por punto.

—La tangente en un punto α de C se puede construir, si se han trazado las tangentes á n y v en sus puntos correlativos. En efecto; si se consideran dos transversales próximas, $O\,A\,A'\,\alpha$ y $O\,B\,B'\,\beta$, se tiene

$$A'\alpha = OA, \qquad B'\beta = OB;$$

resultando que las rectas $R\,A\,B$ y $R'\,A'\,B'$ son dos transversales re-

cíprocas del triángulo $O \alpha \beta$ y que, por lo tanto, los puntos R y R' son simétricos con relación al punto ω medio de $\alpha \beta$.

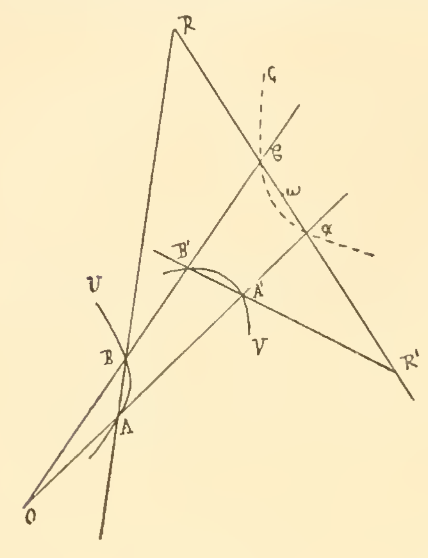


Figura 1.ª

La tangente, en el punto α, se obtendrá, pues, trazando, por este punto, una recta que quede dividida en dos puntos iguales por las tangentes á las curvas auxiliares en los puntos A y A'.

—La subnormal que corresponde al punto α, es la suma de las subnormales correspondientes á los puntos A y A'.

—Estos procedimientos son fáciles de generalizar en el caso de haber más de dos curvas auxiliares.

M. Salmon, en su tratado de Geometría Analítica, dá el nombre de *cónica auxiliar* á aquella respecto de la cual se toman los polos, en la teoría general de las polares (ver esta voz), y que comúnmente se la llama directriz.

Axoide.

—Se nombra axoide la curva que divide en partes iguales las porciones de sus normales comprendidas entre dos líneas dadas.

—Puede consultarse para el estudio de esta línea un trabajo de M. Resal inserto en *Comptes rendus des Séances de l'Academie des Sciences* de Paris, T. 120.

Azimut.

Del árabe *acimuth*, derivado de *as-samt*, círculo vertical.

Definición.—Se denomina azimut de un astro, el arco de horizonte, comprendido entre el meridiano del lugar de observación, y el vertical que pasa por el centro del astro.

Propiedades.—Todos los arcos que están en un mismo vertical, tienen el mismo azimut.

—El ángulo esférico, formado en el zenit por el meridiano y el vertical que pasa por el centro del astro se denomina *ángulo azimutal*.

—El complemento del azimut se llama algunas veces *amplitud,* pero ordinariamente tiene esta palabra otra significación. (Ver amplitud). —En Astronomía y en Geodesia los azimuts se cuentan sobre el horizonte de 0° á 360°, á partir del S. y dirigiéndose hacia el O., es decir, en el sentido del movimiento aparente de los astros. Los marinos cuentan los azimutes de 0° á 180° solamente, siempre á partir del S., pero dirigiéndose hacia el E. ó hacia el O. Es fácil el paso de una de estas maneras de contar á la otra; porque si un azimut está contado del S. hacia el E., en restándole de 360° se tendrá el azimut contado del S. hacia el O.

Determinación del azimut.— Supongamos que $R\,Z\,P\,S$ sea el meridiano, $R\,E\,S$ el horizonte, z el zenit, P el polo, y M la posición de un astro sobre su vertical $M\,P$; el arco $O\,S$ será el azimut. Para encontrar este arco se considera el triángulo esférico $Z\,P\,M$, en el cual ZP es el complemento de la altura de polo sobre el horizonte, ó sea de la latitud; MZ, el complemento de la altura del astro sobre el horizonte, y MP, el complemento de su declinación en el momento de la observación. En el triángulo ZPM, cuando los tres lados son conocidos, se calculará el ángulo MZP, que es el azimut C por la fórmula:

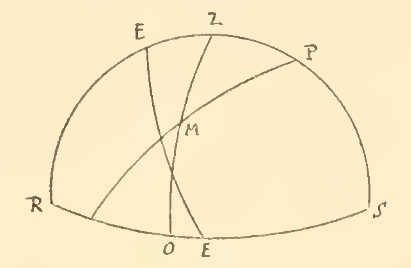


Figura 1.ª

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(s-a) \,.\, \operatorname{sen}(s-b)}{\operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b}},$$

en la cual a y b son los lados que comprenden el ángulo c, y la s la semisuma de los tres lados.

—El problema de determinar el azimut cambia según los datos que para ello se tengan, siendo el caso más usual aquel en que se conocen la hora y la latitud; pero si la hora no se sabe con exactitud, se puede emplear la observación de la polar en el instante de sus digresiones y también la altura del astro. Cuando la latitud no es conocida y la hora no se puede saber con precisión, se determina la dirección del meridiano por la observación de una estrella circumpolar y se emplea el método de las alturas correspondientes ó aquel que está fundado en la observación de las sombras: *Géodésie,* Francoeur, Puissant, etc.

—Los marinos no se sirven sino de las observaciones del sol, prefiriendo tomarle á su salida ó en el ocaso, para hacer los cálculos más sencillamente. Esperan á que el sol se encuentre elevado dos tercios de su diámetro sobre el horizonte del mar, al objeto de evitar la corrección debida á la refracción, que hace aparecer el sol más alto de lo que realmente está. El centro se encuentra sobre el horizonte, y observando sucesivamente los dos bordes con las pínulas de la brújula, leen las indicaciones correspondientes de la aguja imanada. La media entre estos dos arcos es el *azimut magnético* del centro del sol.

—En general, se denomina *azimut magnético* el ángulo que forma el vertical de un astro ú objeto cualquiera con el meridiano magnético que se observa con la aguja azimutal. Este ángulo se cuenta de 0° á 180° en los dos sentidos E. y O.; pero al objeto de evitar confusiones, se conviene en contarle de 0° á 360° hacia el O.

—En Geodesia, la determinación del azimut de un vértice de la red es una de las operaciones más importantes, puesto que sirve en una triangulación para hacer conocer la dirección de un primer lado, de donde se deduce por el cálculo la dirección de todos los demás, procediendo de estación en estación, sin perjuicio de hacer luego las verificaciones indispensables, que consisten en medir algún otro azimut, para compararle con los resultados obtenidos por el cálculo.

Para encontrar el azimut de un vértice, existen una porción de métodos, pero todos tienen el mismo fundamento: medir en un instante determinado el ángulo que forma el plano vertical de un astro con el plano vertical del vértice; calcular, por medio de los datos reunidos por la observación, el azimut del astro y deducir el del vértice por una substracción.

—En Hidrografía, el azimut sirve de base á los sondajes que tienen por objeto la construcción de las cartas marinas.

B

Balística.

Del griego βαλλω, yo lanzo.

Definición.—Dase el nombre de *balística* á la ciencia que trata del movimiento de los proyectiles, y por extensión se aplica esta palabra á la trayectoria que ellos describen.

Historia.—El primero que se ocupó de consideraciones históricas sobre este objeto, fué N. Tartaglia en su obra *Della nova scienzia* (Venecia 1537) que probó que una parte de la línea que describe una bala en movimiento, no puede ser recta, sino una curva real y que para un ángulo de elevación de 45° se obtiene el mayor alcance. Más tarde desarrolla su teoría, en 1546, en la obra *Quœsiti ad invenzioni*, la cual da lugar á multitud de experiencias y la construcción de tablas de elevación; mas todo ello calculado sin ninguna base sólida y fundado en principios inexactos y erróneos.

Galileo, después de haber descubierto la ley del movimiento de los cuerpos graves, aplica su teoría á la de los proyectiles; componiendo el movimiento impreso al móvil con el que resulta de la acción de la gravedad y reconociendo que la trayectoria es una parábola. En estos razonamientos no hace entrar para nada la resistencia del aire y las tablas de Galileo en su IV Diálogo, no son aplicables sino al caso en que la velocidad inicial es muy pequeña. Las construye según este principio: *que las amplitudes de las parábolas descritas bajo diferentes ángulos están en razón de los senos de los ángulos dobles que la pieza forma con el horizonte ó con la vertical.*

El jesuíta Deschales indica la dirección del cañón para obtener el punto más alto y más bajo: *Mundus Mathem.* (T. II, stat, lib. 2.°). Collado, en 1641, hace experiencias y mide las distintas elevaciones en relación con las distancias, experiencias que Bourne ejecuta con mucho mayor cuidado: *Pratica manuale dell'artigleria.* (Milan, 1641), colocando el ángulo de inclinación entre 36° y 45°; *Art of shooting in great ordon*, 1643.

Brondel hace uso de las tablas de Galileo en su *Art de jeter les bom-*

bes. Bellidor, en su *Bombardier* francesa. Maupertuis construye fórmulas balísticas para el mismo caso en las *Memoires de l'Academie des Sciences*, 1731 y el célebre Halley se esfuerza en defender la teoría parabólica contra todas las experiencias: *Trans. phil.* (216, pág. 68).

Newton fué el primero que considera el movimiento de los cuerpos en un medio resistente, encontrando que la trayectoria en los medios que los proyectiles encuentran una resistencia continua es una curva del género *hiperbólico.* Esta conclusión es vaga. Se admitió generalmente, sin embargo, la hipótesis de Newton: *Principios* (libro II, prop. 40), de que la resistencia es proporcional al cuadrado de la velocidad del móvil, esforzándose en aplicarla á la dirección de las balas.

Huhygens y Resson publican á estos efectos trabajos; el primero *Discours de la cause de la pesanteur* (Leyde, 1690), y el segundo en las *Mem. de l'Acad. des Sciences*, 1716.

Keil, en 1718, cree reducir al silencio á Juan Bernouilli, proponiéndole resolver este problema, en el caso de un medio que resista como el cuadrado de la velocidad; pero Bernouilli acepta el desafío, manifestando no publica la solución mientras su adversario no dé una. Algún tiempo después, Taylor hace saber á Bernouilli, que había resuelto este problema, y éste publicó su solución en las *Actas de Leipsit*, suponiendo la resistencia proporcional á una potencia cualquiera de la velocidad. Esta solución refiere la cuestión á la cuadratura de algunas curvas transcendentes, pero su aplicación á la práctica presenta grandes dificultades y es por lo que Euler vuelve á emprender la cuestión: *Histoire de l'Academie royale des Sciences de Berlin,* 1753. Borda se ocupa de esto: *Memoires de l'Academie des Sciences de París,* 1769, suponiendo una densidad variable en límites muy estrechos, á fin de facilitar la integración de la ecuación diferencial á la que le conduce el problema.

En la mayoría de los cálculos de este género se tuvieron como datos experimentales los ensayos importantes hechos por Robins: *Robins new principles of gunnery,* 1742, ensayos continuados en 1775 por Hutton, los cuales fueron de gran importancia, no tan sólo por su número, cuanto por su exactitud y que le valieron una medalla de oro de la Sociedad Real de Londres.

La Academia de Berlin propuso un premio para el problema «Determinar la curva para las balas y las bombas, teniendo en cuenta la resistencia del aire, y dar las reglas para conocer las cargas necesarias á las diferentes velocidades iniciales y á distintos ángulos de progresión». Legendre presentó con este motivo su memoria *Re-*

cherches sur la trayectoire des proyectiles dans le milieux resistants, que obtuvo el premio el 6 de Junio de 1782, en la cual resuelve el problema cuando la resistencia es proporcional al cuadrado de la velocidad más una constante; cuestión que fué tratada tambien analíticamente por Tempelhof: *Memoires de l'Academie des Sciences de Berlín* (1788 y 1789), y Jacobi: *Journal de Crelle* (t. XXIV, pág. 25, 1842) la resuelve para una potencia cualquiera de la velocidad más una constante; suposición que abrazan las anteriores, pudiéndose también ver la *Revista de Ciencias* (t. II, pág. 573 y t. III, pág. 81).

Por último, manifestaremos que pueden ser consultadas, entre otras, las obras de Mr. Persy Obenheim, Poisson, L. Saint-Loup, Paoli de San Roberto, etc., y la memoria del conde de Grœwenitz inserta en el *Journal des Armes Spéciales*, etc., 1844, etc.

Movimiento de los proyectiles en el vacío.—El estudio del movimiento en el vacío sirve de base á la balística y las leyes que le determinan son fáciles de obtener, pues siendo v_0 la velocidad debida á la impulsión inicial, α el ángulo de la dirección de esta velocidad con el horizonte; el movimiento referido á dos ejes, uno vertical y otro horizontal, coincidente con la proyección horizontal de la velocidad inicial y dirigido en el sentido del movimiento, tendrá por ecuación

$$z = \frac{1}{2} g t^2 - v_0 \operatorname{sen} \alpha t \quad \text{y} \quad x = v_0 \cos \alpha t,$$

suponiendo el origen de coordenadas en el punto de partida y el tiempo contado á partir del instante de salida.

Si se quiere conocer la trayectoria del móvil, bastará eliminar el tiempo entre estas dos ecuaciones, lo que nos dará

$$z = \frac{1}{2} g \frac{1}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 - \operatorname{tang} \alpha \, . \, x \qquad (a).$$

Luego «*la trayectoria de un móvil lanzado oblicuamente es una parábola que tiene un eje vertical.*»

—Esta curva pasa por el origen y encuentra al eje de las x en un punto B, cuya abscisa será:

$$X = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}$$

y recibe el nombre de *amplitud ó alcance del tiro*, que tienen su máximo para $\alpha = 45^\circ$, y si llamamos h á la altura debida á la velocidad v_o, se tendrá $X = 2\,h$.

—El eje de esta parábola es vertical y las coordenadas de su vértice son:

$$\frac{1}{2}X = \frac{v_0{}^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{2g}\,; \quad Y = \frac{v_0 \operatorname{sen}^2\alpha}{2g}$$

en el caso en que $\alpha = 45^\circ$

$$Y = \frac{1}{2}h.$$

—El tiempo empleado por el proyectil para transportarse desde el origen á un punto, cuya abscisa sea x, es decir

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}. \qquad (b)$$

si $x = X$, se tendrá para la t el valor

$$T = \frac{2v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g}$$

y el tiempo empleado para llegar al punto culminante A será $\frac{1}{2}T$.

—Su velocidad, al cabo del tiempo t, tendrá por valor

$$v = \sqrt{v_0{}^2 - 2v_0 \operatorname{sen}\alpha \,.\, gt + g^2t^2}$$

que será un mínimo para

$$t = \frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g} = \frac{1}{2}T;$$

es decir, en el punto culminante A. Para $t = T$, $v = v_o$, lo que nos expresa que en el punto B el proyectil tiene su velocidad inicial, y para momentos igualmente distantes de aquel en que el móvil ocupa el punto culminante, su velocidad tendrá el mismo valor.

—La inclinación de la tangente á la curva en el punto cuya abscisa es x, será:

$$y' = \text{tang}\, i = \text{tang}\, \alpha - \frac{gx}{v_0^2 \cos^2 \alpha}, \qquad (c)$$

para el punto A es cero y para puntos cuyas abscisas difieren igualmente del eje de la parábola en más ó en menos, las tangentes están igualmente inclinadas con respecto al eje de las x, aunque en sentido diferente.

De lo expuesto se deduce, que *para una misma inclinación, los alcances son proporcionales á los cuadrados de las velocidades iniciales*, y viceversa, *las velocidades iniciales deberán ser proporcionales á las raíces cuadradas de los alcances*, y que para una misma velocidad inicial, *los alcances son proporcionales á los senos del doble del ángulo de tiro.*

Movimiento de los proyectiles en el aire.—Si representamos por S el área de la máxima sección del proyectil perpendicular á la dirección del movimiento, v la velocidad y A y r coeficientes numéricos, cuyos valores sean $A = 0{,}027$ y $\frac{1}{r} = 0{,}0023$, Mr. Piobert ha representado, teniendo en cuenta las experiencias de Hutton, Thibault, Morin y Didiot, la resistencia del aire por la expresión:

$$SAv^2\left(1 + \frac{v}{r}\right)$$

que para un proyectil esférico de radio R será:

$$F = \pi R^2 \,.\, Av^2\left(1 + \frac{v}{r}\right),$$

y la aceleración debida á esta fuerza, siendo P el peso del proyectil, tendrá por valor

$$\varphi = \frac{gA \,.\, \pi R^2}{P} v^2\left(1 + \frac{v}{r}\right) \quad \text{ó} \quad \varphi = Kv^2\left(1 + \frac{v}{r}\right).$$

Si ahora consideramos que la fuerza F obra tangencialmente á la trayectoria, formará con ella dos ángulos, cuyos cosenos tendrán

por valor $\frac{dx}{ds}$ y $\frac{dy}{ds}$, siendo ds el elemento de curva; así, pues, las ecuaciones del movimiento serán:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varphi \frac{dx}{ds} = 0; \qquad (1)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \varphi \frac{dy}{ds} + g = 0.$$

Mr. Didion, en lugar de deducir de estas ecuaciones una ecuación diferencial independiente del tiempo, que resulta muy complicada, procede de la manera siguiente: considera, no la trayectoria entera, sino un arco lo suficientemente pequeño, para que en su trayecto, se pueda reemplazar la relación $\frac{ds}{dx}$, que es variable, por su valor medio supuesto conocido y que designaremos por σ, en este caso la ecuación (1) será, poniendo por φ su valor,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{\sigma} v^2 \left(1 + \frac{v}{r}\right) = 0,$$

y poniendo por v su valor $\frac{ds}{dx}$ se podrá reemplazar ds por σdx y se tendrá

$$\frac{dx^2}{dt^2} + K\sigma \left(\frac{dx^2}{dt}\right)\left(1 + \frac{\sigma}{r} - \frac{dx}{dt}\right) = 0,$$

ó haciendo $u = \frac{dx}{dt}$ componente horizontal de la velocidad, se llegará á obtener

$$\frac{du}{dx} + K\sigma u \left(1 + \frac{\sigma}{r} u\right) = 0,$$

ecuación que integrada, después de hacer en ella $K\sigma = h$, y representando por ω_o y u_o los valores de ω y u para $x = o$, se obtiene

$$y = x \,.\, \text{tang}\,\alpha - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 B \qquad (a')$$

siendo:

$$B = \frac{1}{2}(\omega_0 + 1)^2 \frac{e^{2hx} - 2hx - 1}{h^2x^2} -$$

$$- 4\omega_0(\omega_0 + 1)\frac{e^{hx} - hx - 1}{h^2x^2} + \omega_0^2,$$

se ve, pues, que la ecuación *(a')* de la trayectoria en este caso no difiere de la *(a)* del vacío, más que en el segundo término, cuyo segundo miembro está multiplicado por el factor B.

—El tiempo empleado por el proyectil para transportarse desde el origen á un punto cuya abscisa sea x, será en este caso

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha} D, \qquad (b')$$

siendo

$$D = (\omega_0 + 1)\frac{e^{hx} - 1}{hx} - \omega_0.$$

Así, pues, la ecuación *(b')* sólo difiere de la *(b)* en el factor D.

—La inclinación de la tangente á la curva en el punto cuya abscisa es x, será:

$$y = \operatorname{tang}\alpha - \frac{gx}{v_0^2\cos^2\alpha} I, \qquad (c')$$

siendo.

$$I = \frac{1}{2}(\omega_0 + 1)^2 \frac{e^{2hx} - 1}{hx} - 2\omega_0(\omega_0 + 1)\frac{e^{hx} - 1}{hx} + \omega_0^2.$$

Así, pues, la ecuación *(c')* es, como se ve, igual á la *(c)* multiplicada por el factor I.

—El valor de la velocidad al cabo del tiempo t se podrá escribir, haciendo

$$V = (\omega_0 + 1)e^{hx} - \omega_0, \quad u = \frac{v_0\cos\alpha}{V};$$

y como $u = v.\ \cos\ i$, resultará

$$v = \frac{v_0}{V} \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos i}, \qquad (d')$$

igual á la obtenida para la trayectoria en el vacío, cuyo valor es $v = \frac{v_0 \cos\alpha}{\cos i}$, multiplicada por el factor V.

—Las funciones B, D, I, V, guardan entre sí ciertas relaciones que permiten deducir las unas de las otras y que facilitan el cálculo de sus valores numéricos.

—En las ecuaciones anteriores se ha supuesto conocida la relación σ del arco de trayectoria considerado á su proyección horizontal. Mr. Didion le obtiene aproximadamente sirviéndose de la trayectoria en el vacío, que substituye á la trayectoria en el aire, entre los puntos en que las inclinaciones de las tangentes son α é i; y en este concepto encuentra para valor de σ:

$$\sigma = \frac{s}{x} = \frac{1}{2}\,\frac{\psi(i) - \psi(\alpha)}{\operatorname{tang} i - \operatorname{tang}\alpha}. \qquad (e')$$

Determinación de la trayectoria.—Para encontrar esta curva, en el caso de que la velocidad inicial del proyectil y el ángulo del tiro son conocidos, se procede del modo siguiente: supónese dividida la curva en arcos tales como los OA, AB, BC..., cuyos extremos corresponden á los puntos en que las inclinaciones tienen los valores asignados en las tablas que nos dan para distintos valores de α los de la inclinación i. La relación σ será por tanto conocida para cada uno de estos arcos parciales. Las inclinaciones extremas α é i, siendo conocidas para el primer arco, así como la velocidad en O, se las substituirá en la ecuación (c') y se tendrá:

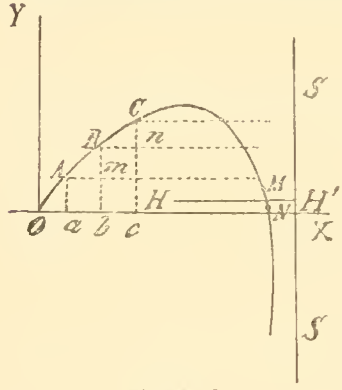


Figura 1.ª

$$xI = \frac{\operatorname{tang}.\alpha - \operatorname{tang}.i}{g}.$$

Se resolverá esta ecuación con respecto á x, sea por tanteos, sea por una tabla de valores numéricos de la función xI (Mr. Didion ha calculado esta tabla para la función hxI). Una vez conocidas x y σ, la ecuación (a') nos dará y ó Aa; la ecuación (b') nos dará el

valor t_1 del trayecto, y la ecuación (d') hará conocer la velocidad v_1 en A. Se transportará luego el origen al punto A, conociendo las inclinaciones en A y en B, la velocidad en A, así como el valor de σ para el arco AB se le substituirá en la ecuación (c'), de donde se deducirá un valor de x que representará Am ó ab; este valor, puesto en la ecuación (a'), nos dará uno de y que representará Bm; la ecuación (b') nos dará la duración t_2 del trayecto AB; y la ecuación (d') la velocidad v_2 en B. Se transportará el origen al punto B y el mismo método nos dará la abscisa Bn, la ordenada Cn, la duración t_3 del trayecto, la velocidad v_3 en C, y así sucesivamente.

Las abscisas de los puntos así obtenidos, serán Oa, $Oa + Am$, $Oa + Am + Bn \ldots$, y las ordenadas respectivas, Aa, $Aa + Bm$, $Aa + Bm + Cn + \ldots$

Se prolongará esta operación hasta que se obtengan dos puntos consecutivos situados el uno por encima y el otro por debajo del plano horizontal á que se quiere llegar. Sean HH' este plano, y M y N los extremos del último arco; siendo conocidas sus coordenadas así como la ordenada de la recta HH', se deducirá por simples substracciones las distancias Np y Nq. La trayectoria, siendo sensiblemente recta en el intervalo MN, se obtendrá la abscisa OI del punto i, ó sea la del punto en que encuentra á HH', sumando á la abscisa OP del punto M una cantidad PI ó pi dada por la relación

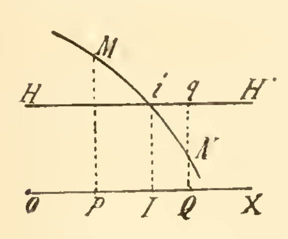


Figura 2.ª

$$pi : pq = Mp : Mp + Nq,$$

de donde

$$pI = PQ \frac{Mp}{Mp + Nq}.$$

La abscisa del punto i quedará de este modo conocida, se obtendrá la inclinación en i por la fórmula (c'), la duración del trayecto de M á i por la (b') y la velocidad en i por la (d').

El examen de las trayectorias de esta manera determinadas nos da á conocer, que en el aire, las dos ramas de la curva no son simétricas; para dos puntos de la misma ordenada, la inclinación es mayor para la rama descendente que para la ascendente y que la rama descendente tiene una asíntota vertical SS. También se deduce que no es el punto más elevado de la curva aquel al cual corresponde el

mínimum de velocidad, y que no es para la inclinación de 45° del ángulo de tiro, para la que se obtiene la mayor distancia.

—El método que acabamos de indicar, aunque notable, tiene el inconveniente de ser largo y penoso en la práctica; así es que los artilleros, entre ellos el italiano Liacci y el teniente Mitcham para los tiros rasantes, y el general prusiano Otto y el conde de Saint-Robert para los curvos, han dado fórmulas y tablas que facilitan la cuestión.

El autor Liacci integró las ecuaciones generales del movimiento de un proyectil en el aire por medios aproximados, y después de notables aproximaciones, llegó á las expresiones

$$D(v) = D(V) + \frac{na^2}{p} x,$$

$$\operatorname{sen} 2\varphi = \frac{p}{2a^2} \left[\frac{A(v) - A(V)}{D(v) - D(V)} - I(V) \right],$$

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{p}{2na^2} \left[I(v) - \frac{A(v) - A(V)}{D(v) - D(V)} \right] \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$T = \frac{p}{na^2} \cdot \frac{T(v) - T(V)}{\cos x},$$

en las cuales; V es la velocidad inicial del proyectil; v, la velocidad remanente á la distancia x; a, el diámetro del proyectil; p, su peso; n, un coeficiente de reducción; x, el ángulo de proyección; ω, el ángulo de caída, y T, la duración de la trayectoria. Las funciones han sido reducidas á tablas para varias velocidades hasta la de 520 metros.

El teniente Mitcham ha calculado otras tablas para la velocidad de 670 metros por medio de las fórmulas siguientes:

$$D(v) = D(V) + 1{,}6033 \frac{p}{na^2} x,$$

$$\operatorname{sen} 2x = 2{,}0463 - \frac{p}{na^2} \left[\frac{A(v) - A(V)}{D(v) - D(V)} - I(V) \right],$$

$$\operatorname{tang} \omega = 2{,}0463 \frac{p}{2na^2} \left[I(V) - \frac{A(v) - A(V)}{D(v) - D(V)} \right] \frac{1}{\cos\varphi^2},$$

conservando las notaciones anteriores.

El peso p está expresado en kilogramos, y a y x, en metros. El coeficiente de reducción n varía alrededor cambiando con la forma del proyectil; existen tablas calculadas, en función de la forma y dimensión del proyectil, que dan el valor de esta cantidad.

Liacci ha calculado unas fórmulas aproximadas para el estudio del tiro menos exactas que las anteriores. Mr. Chapel ha completado las tablas de tiro que sólo dan el ángulo de proyección, determinando fórmulas que dan los demás elementos, y que son:

$$\text{sen}\, 2x = A \frac{X}{v^2}, \quad t = DV \,.\, \text{sen}\varphi,$$

$$\text{tang}\,\omega = B \,.\, \text{tang}\varphi, \quad f = EX \,.\, \text{tang}\varphi,$$

$$v = CV \frac{\cos\varphi}{\text{sen}\,\omega}, \quad d = Fq \,.\, \text{sen}^2\varphi.$$

Las cantidades que entran en estas fórmulas tienen la misma interpretación que en las de Liacci: X representa el alcance, t, la duración de la trayectoria, f, la ordenada máxima de la curva balística, y d, la derivación.

Los coeficientes A, B, C, D, E, F se calculan por medio de tablas especiales que dan sus logaritmos, y el q, ya por la experiencia, ya por la fórmula $q = q' \frac{v^2}{h}$ en la que q' es un coeficiente igual, por término medio á 0,8, y h, el paso de la hélice que raya la pieza.

Problemas.—Por medio de las fórmulas que se dejan expresas pueden resolverse todos los problemas de balística, siendo aquellos más principales los siguientes: conocidos el ángulo de tiro y el blanco, buscar la velocidad inicial; dada la velocidad inicial y el blanco, determinar el ángulo de tiro; dado el blanco y la inclinación de la trayectoria en este punto, determinar la velocidad inicial y el ángulo del tiro y buscar la velocidad inicial y el ángulo de tiro de modo que el proyectil pase por dos puntos dados, etc.

Banda reforzada.

Definición.—En los arcos de cabeza de los puentes, es conveniente el dar mayor espesor en los nacimientos que en la clave. La curva que se obtiene no es paralela á la del intradós y recibe el nombre de curva de *banda reforzada.*

Determinación.—El espesor de la banda al nivel de sus nacimientos, estando representado por B, será

$$B = C + \frac{0}{60} \text{ para las aberturas medias}$$

y

$$B = C + \frac{0}{80} \text{ para las grandes aberturas,}$$

siendo c el espesor de la banda en la clave y 0 la abertura de la bóveda.

Trazado.—En los puentes en plena cintra ó en arco de círculo se conocen tres puntos de la curva; el vértice y los nacimientos; se determinará facilmente el centro: en las bóvedas elípticas se tendrá el eje mayor y el semieje menor, es decir, los datos necesarios para el trazado del extradós de la banda.

En los puentes de arcos carpanel, se tendrá, aumentando el espesor por metro de longitud de la banda reforzada, dividiendo el refuerzo total en los nacimientos por el desarrollo de la mitad del arco de intradós, se multiplica esta cantidad por el desarrollo de medio arco del vértice y por aquel de cada uno de los otros arcos que componen la mitad del carpanel; se tendrá así el espesor de la banda á cada cambio de curvatura y, por consiguiente, los elementos necesarios para el trazado de la curva pedida.

Dirección de las juntas.—En las bóvedas de banda reforzada y principalmente cuando la curva de intradós es elíptica ó carpanel, las juntas de dovelas deberán ser normales á la curva media de esta banda y no sólo al intradós: resultando de aquella disposición mejor aspecto para la vista y mejor reparto de presiones sobre los planos de juntas; manera de hacer que se aproxima á la teoría de Ivon Villarceau, sobre el establecimiento de las arcadas de los puentes, bajo el punto de vista de su mayor estabilidad.

Aplicaciones.—Esta curva, á semejanza de las de intradós (ver esta voz) de las bóvedas, da al arco una disposición más racional que aquella de una banda uniforme, puesto que aparentemente se da á la obra un carácter mayor de solidez.

Para aberturas que no pasan de 4,00 metros se usan las bandas paralelas, pero en pasando de esta luz, conviene usar la banda reforzada, trazando la curva que la determina.

Bao.

Del francés *bau*, ó del alemán *baum*, árbol.

Definición.—Curva obtenida mediante ciertas construcciones que tienen por base la división del cuarto de circunferencia en cuatro partes iguales.

Construcción y ecuación.—Sea OE una longitud dada sobre la cual se desea construir la curva de *bao* cuya flecha sea OA. Se trata de unir el punto A al punto E por una curva, cuya naturaleza es arbitraria, estando sujeta únicamente á aproximarse gradualmente de O hacia E, siguiendo una cierta regularidad. Para ello, desde el punto O como centro, con el radio OA, se describe un cuarto de circulo AH que se divide en cuatro partes iguales $A1 = 1.2 = 2.3 = 3H$; asimismo el radio OH se divide también en cuatro partes iguales $O1' = 1'\text{-}2' = 2'\text{-}3' = 3'H$ y se trazan las rectas $11'$, $22'$, $33'$. Hecho esto, se divide OE en cuatro partes iguales y por los puntos de división M, N, P se levantan las perpendiculares respectivamente iguales á las distancias $1.1'$, $2.2'$ y $3.3'$. Por los extremos B, C y D de estas perpendiculares y por los puntos A y E se hace pasar una curva continua, y ésta es la curva buscada.

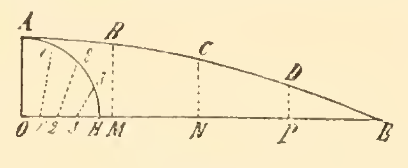


Figura 1.ª

Si se refiere la curva á los ejes OE y OA ella tiene por ecuación:

$$y = b\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 2\,\frac{x}{a}\,\text{sen}\,\frac{x}{a}\cdot\frac{\pi}{2} + 1},$$

fórmula en la que a designa la longitud OE, y b, la altura OA.

Se da también el mismo nombre á otro trazado que tiene el propio fundamento que el anterior y es el siguiente: Sea OY la flecha que debe tener la curva, y OD su longitud. Se levantan en el punto D las perpendiculares DE y DF iguales á OY. Desde el punto P como centro y con un radio igual á EF se describe el arco EX. Divídase DX en cuatro partes iguales y por los puntos de división se levantan las perpen-

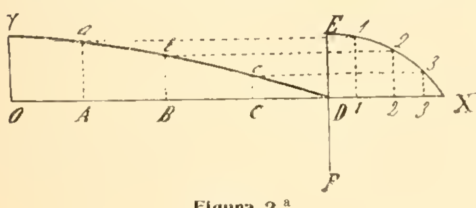


Figura 2.ª

diculares 1 . 1, 2 . 2 y 3 . 3. Se divide OD en cuatro partes iguales y por los puntos de división se levantan las perpendiculares Aa, Bb y Cc, limitadas por las paralelas á OX trazadas por los puntos de división 1, 2, 3 del arco EX. Haciendo pasar por los puntos y, a, b, c, D una curva continua, ésta será la curva buscada.

Llamando R la distancia OY y L la longitud OD, la ecuación de la curva, referida á los ejes OX y OY, es:

$$\frac{y^2}{R^2} + \frac{y}{R} = \frac{3}{4}\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right).$$

Aplicaciones.—Estos procedimientos gráficos son empleados en la construcción naval para la determinación de las curvaturas á dar á ciertas piezas. Así se trazan, por ejemplo, la curva del *bao*, la de las *verjas*, etc.

Barocéntrica.

Del griego βαρος, *peso*, y κεντρον, *centro*.

Definición.—Como consecuencia de la no esfericidad de la tierra, *los grados de una misma meridiana van aumentando desde el ecuador á los polos*, pudiéndose tomar cada grado, como un arco de una circunferencia distinta, tanto más grande cuanto el grado á que corresponda esté más cerca del polo. Los radios de todos estos arcos serán diferentes y no concurrirán á un punto. Si, pues, se considera el lugar geométrico de los centros de estos diferentes arcos correspondientes á un mismo meridiano, se obtendrá una curva de forma particular que se ha nombrado *curva barocéntrica*.

Historia.—La consideración de esta curva y el nombre con que se la designa es debida á Maupertuis, *Discours sur la figure des astres* (1732) y *Elements de geographie* (1742).

Propiedades.—Esta línea tiene como propiedad especial la de ser el lugar de las atracciones de la pesantez, para todos los puntos del meridiano á que se refiere.

Barométricas.

Del griego βαρύς, *gravedad;* μετρον, *medida*, y γράφω, *trazar*.

Definición.—Reciben este nombre las líneas indicatrices de las intensidades de los fenómenos barométricos señalados por los aparatos barometrógrafos.

Historia.—Las principales disposiciones de los barometrógrafos ó barómetros ordinarios que van acompañados de un aparato que registra ó señala él solo las distintas indicaciones del barómetro, son las de Mr. Hardy y MM. Wheatstone y Liais, cuyo aparato auxiliar da un golpe y señala un punto de media en media hora, por ejemplo, por la electricidad, y también el de Mr. Ronals, cuyas indicaciones son fotográficas.

Aplicaciones.—Estas curvas ponen de manifiesto las variaciones experimentadas por el barómetro en las distintas horas del día.

Beaune (Curva de).

Definición.—Se da este nombre á la curva que goza de la propiedad que la relación entre la subtangente y la ordenada, es la misma que la que tiene lugar entre una línea de magnitud constante y la diferencia entre la ordenada y la abscisa.

Historia.—Este problema fué propuesto á Descartes por Beaune y lleva su nombre. Ver *Actiones calculis integralis*, de Juan Bernouilli.

Las obras de Beaune fueron publicadas por Erasme Bartholin en 1659, á continuación de los comentarios de Schooten sobre la Geometría de Descartes. El problema anterior se encuentra en la edición latina *Elzévir* de esta obra del gran filósofo *Florimundi de Beaune in Casterii geometriam notae breves.*

Ecuación.—La ecuación diferencial de la curva es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{a}$$

ó

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{a} y = -\frac{1}{a} x,$$

ecuación lineal y de primer orden.

Esta ecuación tiene por integral

$$y = x + a + Ce^{\left(\frac{x}{a}\right)}.$$

Esta ecuación se simplifica tomando por eje de las x' la recta que tenga por ecuación

$$y = x + a,$$

y conservando el mismo eje de las y, las fórmulas de transformación serán en este caso

$$y = y' + \frac{x'}{\sqrt{2}} + a, \quad x = \frac{x'}{\sqrt{2}},$$

y la ecuación de la curva será;

$$y' = Ce^{\frac{x'}{a\sqrt{2}}}.$$

Bicornio.

Definición.—Si se tienen dos circunferencias C y C', de radio r, tangentes en un punto A, la línea $oo'y$, como línea de los centros y eje de las y, y el eje de las x, perpendicular al de las ordenadas y pasando por el centro de C, la curva lugar de las intersecciones de la ordenada de un punto B de C' con la polar de B, con relación á C, es una curva que Brocard denominó *bicornio.*

Los ingleses la nombran *Cocked hat* ó *sombrero de cuernos.*

Ecuación.—Su ecuación es:

$$x^4 + x^2y^2 + 4ax^2y - 2a^2x^2 - 3a^2y^2 - 4a^3y + a^4 = 0$$

ó

$$y = \frac{a^2 - x^2}{2a \pm \sqrt{a^2 - x^2}};$$

de la cual se deduce fácilmente su forma.

Propiedades. — La curva corta al eje de las x en dos puntos equidistantes del centro a y $-a$, cuyos puntos son de retroceso, y las tangentes en ellos forman con el eje de las x ángulos de 45° y de —45°.

—La curva corta al eje de las y en dos puntos: uno situado á la distancia a del origen, y el otro á una distancia igual á $\frac{1}{3}a$.

—Tiene dos puntos de inflexión que corresponde á los valores:

$$x = \pm \frac{a}{3}\sqrt{5} \quad \text{é} \quad y = \frac{1}{3}a.$$

—El bicornio es una cuártica unicursal, y se puede deducir de una cónica por una transformación de Cremona.

—Para el estudio de esta línea se puede consultar *Journal de Mathématiques Spéciales*, 1896, págs. 250 y 251; y para su construcción, Charlotte-A. Scott, *Modern Analytical Geometry*, de Scott, páginas 219-232.

Binomias.

Definición.—Nombre dado por Lamé á curvas cuyas ecuaciones son de la forma

$$y^m \pm x^m = a^m.$$

La representación y particular estudio de estas líneas, puede verse en *Recherches sur la Theorie des méthodes en geometrie* del mismo autor.

Bipartita.

Definición.—Dase este nombre á uno de los dos tipos de curvas en que se encuentran clasificadas por Clebsch las de tercer orden y las anexas de tercera clase.

—Las curvas de tercer orden bipartitas, se componen de una rama con tres puntos de inflexión y de un óvalo situado fuera de esta primera parte. (Ver *curvas de tercer orden.)*

—Las curvas de tercera clase bipartitas, se componen de una porción de curvas de tres tangentes de retroceso y de un óvalo que la rodea. (Ver *curvas de tercera clase.)*

Bitangentes.

Definición.—Se aplica esta denominación á dos curvas que son tangentes en dos puntos distintos.

Ecuación.—La ecuación general de las cónicas bitangentes á una

cónica dada $A = O$ es $A + P^2 = O$, siendo P un trinomio de primer grado de la forma

$$mx + ny + p.$$

En efecto; por una parte, la ecuación $A + P^2 = O$ contiene las tres constantes arbitrarias m, n, p, y por otra, los cuatro puntos de encuentro de las dos cónicas $A = O$ y $A + P^2 = O$ se reunen sobre las dos rectas confundidas $P = O$; es decir, que las dos cónicas no tienen otros puntos comunes que los de intersección de la cónica propuesta y de la recta $P = O$ duplicados.

Propiedad particular.—Cuando dos cónicas son doblemente tangentes á una tercera cónica, las cuerdas de contacto y las secantes comunes son rectas concurrentes que forman un haz armónico.

Bombeo.

Definición.—Con este nombre se distingue la curva que se da al firme ó empedrado de un camino ó calle para facilitar el desagüe de las aguas fluviales y su mejor conservación.

Historia.—El nombre de *bombeo*, aplicado en este sentido, puede verse en Espinosa: *Manual de Caminos* (pág. 249); Matallana, *Vocabulario de Ferrocarriles*, etc.

Forma.—En general, la forma adoptada es la circular; en los firmes de carreteras la sagita es de 0,16 á 0,18 centímetros, y en los caminos estrechos y empedrados se suele bajar hasta 0,08 y 0,06 por razón de economía.

Boscowich (Curva de).

Definición.—Curva cuya ecuación es

$$y = f(x),$$

en la que y representa la fuerza y x la distancia.

Historia.—Esta curva es la idea fundamental de una obra titulada *Theoria philosophicae naturalis redacta ad unicam regem visium in natura existentium; auctore Rogerio Boscovic, Societatis Jesu, nunc ab ipso perpolita et aucta, ac a plusimis praecedentium editionum mendis expurgata; editio Venetia prima ipso auctore praesente et corrigente.—Vene-*

tiis MDCCLXIII.—Primera edición en Viena en 1758, la segunda en Viena y la tercera es la hecha en Venecia.

Esta obra fué seguida de un suplemento que la completa, y que Boscowich intituló *Solutio analytica problematis determinantis naturam legis virium.*

Las opiniones de Boscowich han sido más tarde sostenidas por MM. Cauchy, Saint-Venant, Lamé y otros.

Propiedades.—Esta curva es una línea continua que corta al eje de las distancias en distintos puntos, los cuales son los límites de *cohesión* en que la atracción se cambia en repulsión y viceversa.

—Esta curva tiene por asíntota el eje de las y, del lado positivo (atractivo), y termina por ser paralela al eje de las x en la parte negativa.

—Boscowich considera una serie de elipses biconfocales situadas en un plano; los focos son las moléculas atractivas, los semiejes focales representan alternativamente límites de *cohesión* y de *no-cohesión*, y explica por efectos atractivos y repulsivos las acciones del calórico, los fenómenos del mundo material, los efectos de cohesión, adhesión, capilaridad, etc.

—Asimismo indica una ecuación entre x é y que puede dar esta forma, problema desde luego indeterminado. Hace

$$x^2 = z$$

y luego

$$P = z^m + az^{m-1} + bz^{m-2} + \ldots\ldots + f,$$

$$Q = z^{p+1} + gz^p + hz^{p-1} + \ldots\ldots + lz;$$

y la ecuación de la curva de las x é y es

$$P - Qy = O.$$

—Indicaremos, por último, que para poder formarse idea exacta de esta curva, es preciso el estudio de las obras al principio citadas.

Braquistócrona.

Del griego βραχιστος, *más corto*, y χρόνος, *tiempo*.

Definición.—Recibe este nombre la curva para la que un cuerpo

abandonado á la acción de la pesantez, llega de un punto á otro en el tiempo más corto.

—También se conoce con el nombre de curva *del más breve descenso.*

Historia.—El nombre de braquistócrona fué dado por Juan Bernouilli, el cual propuso el problema de determinar esta curva en las *Actes de Leipsick*, en 1696, en la forma siguiente:

Problema novum ad cujus solutionem mathematici invitantur.

«Datis in plano verticali duobus punctis *A* y *B*, assignare mobili *M*, viam *AMB*, per quam gravitate sua descendens, et moveri incipiens a puncto *A*, brevissimo tempore perveniat ad altrum punctum *B*.»

Jacobo Bernouilli da una solución en las *Actes de Leipsick* (Mayo, 1697), llamando á esta curva *oligócrona*, y Newton dice en la misma publicación que dicha curva es una cicloide, aunque guardando el incógnito, á lo cual Juan Bernouilli contesta que es fácil reconocer *la garra del león*. También se tiene de Fatio una obra sobre esta curva, *Lineae brevissimi descensus investigatio geométrica duplex* (1699), en la que trata de difamar á Leibniz que había dado una solución al problema.

En las *Mémoires de l'Academie*, de 1718, Juan Bernouilli publicó dos soluciones del problema de la *braquistócrona* en el vacío, sumamente sencillas y demostrando ser esta curva una cicloide.

Euler, en el tomo II de su *Mecanique* (San Petersburgo, 1736), dió una solución muy elegante, considerando la hipótesis de un medio resistente.

Hoy día esta cuestión reclama el concurso del cálculo de variaciones para ser determinado de una manera directa, pudiéndose ver la elegante demostración de Poisson en su *Traité de Mecanique*, y también aquella, debida á Mr. O. Bonnet, sobre la braquistócrona, relativa á un punto material pesado. *Cours de Mecanique*, de Mr. Despeyrous (tomo I, página, 424).

Ecuación.—Supongamos que la velocidad inicial del móvil sometido á la acción de la gravedad es nula; el teorema de las fuerzas vivas nos da para valor del producto del cuadrado de la distancia adquirida al cabo de un tiempo cualquiera, por la masa del móvil, el doble del trabajo de la gravedad durante este tiempo, ó dividiendo por la masa

$$V^2 = 2g(z_0 - z),$$

siendo z_0 la altura del punto de partida y z la del punto en que se encuentra el móvil. La velocidad $V = \frac{ds}{dt}$ y la formula anterior nos dan:

$$dt = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{ds}{\sqrt{z_0 - z}}$$

en que s es el arco recorrido por el móvil, y por tanto,

$$ds = -dz \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2}$$

y

$$dt = -\frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{dz \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2}}{\sqrt{z_0 - z}}$$

y el tiempo entero del descenso estará dado por la integral:

$$t = \frac{-1}{\sqrt{2g}} \int_{z_0}^{z} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2}{z_0 - z}}\, dz,$$

quedando el problema reducido á determinar x é y en función de z de manera que la anterior integral sea un *mínimo*, cuestión que depende del cálculo de variaciones, y que puede verse, por ejemplo, en el *Cours d'analyse* de Ch. Sturm (t. II, pág. 318), llegándose á obtener la ecuación:

$$y = \frac{1}{2} a \,.\, \text{arc} \left(\cos = \frac{a - 2x}{a}\right) - \sqrt{ax - x^2}.$$

Propiedades.—Se deduce inmediatamente de la ecuación anterior que la braquistócrona es una porción de cicloide, cuya base es horizontal y cuyo origen está en el punto de partida del móvil; siendo a igual al diámetro de su círculo generador.

—Si se supone que los dos puntos de partida y llegada del móvil en lugar de estar dados, están sujetos á la condición de encontrarse so-

bre dos curvas dadas, la braquistócrona es una porción de cicloide cuya base es horizontal y cuyo origen está en el punto de partida del móvil, que corta á ángulo recto á la curva de llegada y que el origen está de tal modo colocado sobre la curva de partida, que la tangente trazada por él á esta curva es perpendicular á la tangente trazada á la extremidad inferior de la porción de cicloide.

—Si el punto móvil está solicitado por una fuerza exterior, la componente normal á la braquistócrona de dicha fuerza, es igual, en magnitud y sentido á la fuerza centrífuga, y también, que la presión ejercida por el móvil sobre la curva es doble de la componente normal de la fuerza exterior. Esta propiedad es característica de esta curva y debiera ser empleada en todos los casos para encontrar rápidamente su ecuación.

—Cuando la fuerza que solicita el móvil está dirigida constantemente á un centro fijo, y su intensidad no depende sino de la distancia r del móvil á este centro, la braquistócrona en su origen es tangente al radio vector ó línea que une dicho punto con el centro fijo, y si $f(r) = 2n \cdot r$, ella es una epicicloide.

Además de esta especie de braquistócrona ó *braquistócronas planas*, se pueden considerar las curvas de esta clase situadas sobre una superficie $f(x, y, z) = o$, cuyo estudio se refiere sencillamente á operaciones analíticas de la braquistócrona plana, si bien las integraciones podrán ser más ó menos complicadas según la naturaleza de la función f.

M. Royer, *Journal de Liouville* (1848, tomo XIII, pág. 41), trata el caso de las superficies de revolución, llegando á resultados de algún interés. La ecuación de una superficie de revolución alrededor del eje de las z, siendo:

$$F = x^2 + y^2 - \varphi(z) = o$$

el cálculo, nos dará asimismo para segunda ecuación de la braquistócrona

$$ydx - xdy = Cds \cdot \sqrt{z - z_0}.$$

Si se substituyen por x é y las coordenadas polares ρ y ω ligadas por las relaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x = \rho \cdot \cos\omega \\ y = \rho \cdot \operatorname{sen}\omega \end{array}\right\} ydx - xdy = r^2 \cdot d\theta;$$

y como por otra parte, según el teorema de las fuerzas vivas,

$$\sqrt{z - z_0} = \frac{v}{\sqrt{2g}}$$

resulta

$$ds\sqrt{z - z_0} = \frac{v^2 dt}{\sqrt{2g}},$$

y la ecuación de la curva será

$$r^2 d\theta = C' v^2 dt.$$

—El área elemental descrita en el tiempo dt por la proyección sobre un plano perpendicular al eje del radio vector dirigido desde un punto de este eje al punto móvil, es proporcional al cuadrado de la velocidad del móvil.

—Si los puntos de partida y llegada pertenecen á un mismo meridiano, la braquistócrona correspondiente será el arco comprendido sobre este meridiano entre los dos puntos.

—Si la superficie de revolución es un cilindro, la braquistócrona estará formada de la espiral de la cicloide.

C

Cadena invertida.

Definición.—Se llama así á la curva ó porción de arco de curva que reproduce en sentido inverso la forma que afecta una cadena homogénea y perfectamente flexible, libremente suspendida de dos puntos situados en una misma horizontal. (Ver *catenaria.*)

Característica.

Se distinguen con este mismo nombre dos clases de curvas: unas que se estudian en Geometria y otras en Física; las que describimos separadamente.

1.° *Característica* en Geometria:

Definición.—Si una superficie S se mueve en el espacio, según una cierta ley, dos de sus posiciones consecutivas infinitamente próximas, se encontrarán según curvas que se denominan *características.*

—El lugar geométrico de todas las caracteristicas, será una superficie que recibe el nombre de *envolvente,* y la superficie móvil S el de *involuta.* Por tanto, se puede definir la caracteristica de una envolvente, diciendo que son las líneas todas iguales, de la intersección de dos posiciones consecutivas de su involuta.

Historia.—Monge, *Application de l'analyse á la Géométrie* (1807) y *Géométrie descriptive* (1799), dió á estas curvas el nombre de características con que se las conoce, atendiendo á que su naturaleza permanece lo mismo para toda una familia de superficies envolventes, la cual está caracterizada por esta curva.

Ecuación.—Sea la ecuación de una superficie, S, la cual contiene un parámetro variable, α;

$$f(x, y, z, \alpha) = 0;$$

si damos á este parámetro valores particulares α, $\alpha + \Delta\alpha$, obtendremos dos superficies correspondientes S' y S'', cuyas ecuaciones serán:

$$f(x, y, z, \alpha) = 0 \quad \text{y} \quad f(x, y, z, \alpha + \Delta\alpha) = 0.$$

Estas dos superficies se cortarán según una curva, y las coordenadas de uno cualquiera de los puntos de esta curva verificarán simultáneamente las ecuaciones:

$$f(x, y, z, \alpha) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{f(x, y, z, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, y, z, \alpha)}{\Delta\alpha} = 0.$$

Si, pues, se imagina que $\Delta\alpha$ tienda hacia cero, la curva indicada, que es la que hemos llamado característica, tenderá, en general, á una posición límite perfectamente determinada y que estará dada por las ecuaciones siguientes:

$$f(x, y, z, \alpha) = 0 \quad \text{y} \quad f'_\alpha(x, y, z, \alpha) = 0 \qquad (1).$$

De lo dicho se deduce que la superficie S es el lugar de las características, cuando el parámetro α se supone variable; y por tanto, la ecuación de la superficie envolvente se obtendrá, eliminando el parámetro entre las dos ecuaciones de la característica.

Propiedades. — La superficie envolvente, toca á la involuta, según la característica: es decir, el elemento de superficie infinitamente pequeño que se extiende á lo largo de la característica, pertenece al propio tiempo á la envolvente y á la involuta.

—Si en un punto de la característica se puede trazar un plano tangente á la involuta, este plano tangente lo será también en dicho punto á la superficie envolvente.

En efecto; considerando en las ecuaciones (1) α como una función de las variables x, y y z, se tendrá para ecuación del plano tangente á la envolvente,

$$X(f'_x + \alpha'_x f'_a) + \ldots\ldots = 0$$

ó

$$Xf'_x + Yf'_y + Zf'_z + Tf'_t = 0.$$

—La involuta de una superficie desarrollable es un plano y su característica será una línea recta.

—Considerado el cilindro recto y de revolución como la envolvente de las posiciones de una esfera de radio constante y cuyo centro recorra el eje, las características serán círculos máximos de dicha esfera y el contacto de la envolvente y la involuta tendrá lugar á lo largo de esta línea.

—Considerado el cono recto y de revolución como la envolvente de las posiciones de una esfera, cuyo centro recorre el eje del cono y cuyo radio es en cada posición igual á la distancia del eje á la generatriz principal del cono, las características serán circunferencias de la esfera y el contacto de la envolvente y la involuta tendrá lugar á lo largo de esta línea.

—Las superficies de revolución admiten involutas esféricas, cónicas ó cilíndricas. Para la generación por involutas esféricas y cónicas, las características resultantes son circunferencias de círculo, y para la generación por involutas cilíndricas, las características son la misma curva meridiana de la superficie de revolución.

—En las superficies anulares, las características son circunferencias de círculo.

2.° *Característica* en Física.

Definición. — Curva que representa la fuerza electromotriz desarrollada por una máquina de inducción, en función de la intensidad que atraviesa su armadura, cuando ésta gira con una velocidad determinada y constante.

Según esta definición, sus abscisas representarán las intensidades, y sus ordenadas, las fuerzas electromotrices de la máquina.

Clasificación.—Esta curva puede construirse para un circuito abierto ó cerrado, recibiendo los nombres de *característica de circuito abierto* en el primer caso y *característica de circuito cerrado* en el segundo, siendo ésta la que da á conocer la marcha real de la máquina.

También se puede construir la característica, tomando para ordenadas, en lugar de las fuerzas electromotrices, la diferencia de potencial en los bornes, y entonces se la nombra *característica exterior;* y si se traza una curva cuyas coordenadas sean las diferencias entre la *característica exterior* y la de *circuito cerrado*, se obtendrá otra nueva línea que ha recibido el nombre de *característica interior.*

Historia. — La consideración de esta línea se debe á Marcel Deprez, que fué el primero que la estudió y dió nombre, y á Mr. Thompson la de la característica exterior. Mr. Cabanellas señaló algunas de

sus aplicaciones, y si se quieren conocer las circunstancias y especial forma que afecta para diferentes clases de máquinas, se pueden consultar, entre otras, las obras siguientes: *Elementary Lessons in Electricity and Magnetism.*, de S. Thompson; *Electricity and Magnetism.*, de J. Clerk-Maxwell, de Fleeming-Jenkin ó de Fr. Guthsie; *Machines electriques*, de A. Niaudert; *Die magneto und dynamo-elektuiehen Maschinen*, de H. Schellen, etc.

Propiedades.—En una máquina de inducción, la fuerza electromotriz E es proporcional al número de la espiras de la bobina inducida n, á la intensidad del campo magnético F y á la velocidad de rotación v. Será, pues,

$$E = n \, . \, v \, . \, F,$$

y la intensidad de la corriente, siendo R la resistencia total del circuito, será

$$E = IR.$$

Si la máquina es recorrida por una corriente de intensidad constante, en este caso las diferentes características que corresponden á las distintas velocidades que se pueden comunicar á su armadura, se pueden deducir de una de ellas con sólo multiplicar las ordenadas que corresponden á una misma abscisa por la relación de velocidades de rotación, relativas á la característica buscada y á la conocida. Estas curvas presentan la forma (fig. 1.ª) en la que se ve que descienden de un modo continuo, debido á que el poder de los inductores no aumenta con la intensidad de la corriente, mientras que la influencia perjudicial de la imantación del inductor se deja sentir cada vez más.

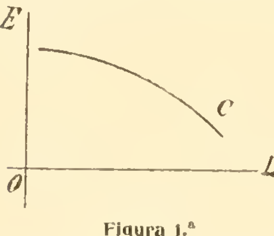


Figura 1.ª

—En una máquina dinamo, el campo magnético se produce por la misma corriente inducida y su valor es una función de la intensidad, será

$$F = f(I),$$

y eliminando E y F entre este valor y los dados por las fórmulas anteriores, será

$$I = \frac{nv}{R} f(I) \quad \text{ó} \quad \frac{I}{f(I)} = \frac{nv}{R},$$

fórmula que podría resolverse conocida la forma de la función $f(I)$, á la cual se le da como primera aproximación la forma $A + BI$, y será

$$\frac{nr}{R} = A + BI,$$

fórmula suficientemente exacta entre ciertos límites, según las experiencias de Mr. Frölich, y substituyendo por R su valor $\frac{E}{I}$ se trazará la característica correspondiente, llevando la intensidad I á las abscisas y el valor de E á las ordenadas.

En general, la característica de una máquina dínamo eléctrica tiene la forma parabólica, si bien algunas veces, cuando la intensidad del régimen es bastante grande, sus ordenadas van creciendo menos que las de la parábola, como lo demuestra la figura 2.ª, en la que la curva llena representa una parábola y la trazada con puntos, una característica. Este efecto es tanto más marcado cuanto más hierro contenga el *inductor*.

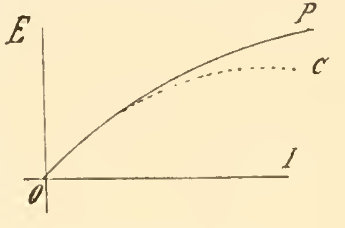


Figura 2.ª

—En una máquina de doble excitación, en la que los inductores tienen dos hilos, uno es recorrido por la corriente de intensidad I de una excitatriz independiente ó está montado en derivación, y el otro lo está en serie sobre la misma máquina, se demuestra que la doble excitación permite hacer constante la diferencia de potencial, sea cualquiera la resistencia exterior R.

Si, pues, llamamos r la resistencia del inducido y ρ la de los inductores, será:

$$I = \frac{E}{R + r + \rho};$$

y como, por otra parte, se puede admitir que la fuerza electromotriz es sensiblemente proporcional al campo magnético ó á $I + i$, lo que da

$$KE = nr\,(I - i),$$

esta ecuación representará la característica de la máquina.

—Las máquinas montadas en *compoumd* tienen una característica que afecta la forma representada en la figura 3.ª

Realmente no gozan de sus propiedades más que para valores de I, comprendidos entre O y OI, límites en los cuales la característica puede confundirse sensiblemente con la tangente en el origen AB. El límite OI estará tanto más alejado, cuanto mayor sea la masa de hierro de los inductores con relación á la del conductor arrollado alrededor de éstos.

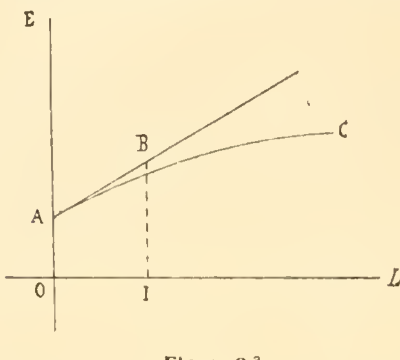


Figura 3.ª

Determinación de esta curva.—Para obtener esta curva experimentalmente, basta hacer variar la resistencia exterior y medir la intensidad correspondiente por medio de un amperómetro, tomar las intensidades como abscisas y las fuerzas electromotrices correspondientes como ordenadas.

—Si la máquina está excitada en derivación, se hace la misma operación, pero se excitan los conductores por una corriente independiente y constante.

Aplicaciones.—El conocimiento de esta curva permite conocer la marcha de la máquina y resolver todos los problemas que pueden proponerse relativos al empleo de la misma máquina.

Cardioidea.

Definición.—Se da este nombre á la curva que en coordenadas polares está dada por la ecuación

$$\rho = 4a \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

y que afecta la forma indicada en la figura 1.ª

Propiedades.—Esta curva es un caso particular de la *concoide de círculo ó caracol de Pascal* (ver esta voz), ó sea aquél en que se supone $d = 2R$ en la ecuación de aquella curva

$$\rho = 2R \cos\omega - d.$$

—Esta curva presenta un punto de retroceso en el origen, siendo su tangente en este punto el eje polar.

—Asimismo se la puede considerar como un caso particular de la *espiral sinusoidal* (ver esta voz), ó sea aquél en que se supone $m = \frac{1}{2}$ en la ecuación de aquella curva

$$m\rho^m = a^m \,.\, \text{sen}\, m\omega.$$

—La cuerda que pasa por el punto doble y la tangente en las extremidades de esta cuerda forman un triángulo rectángulo.

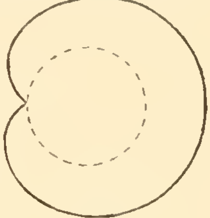


Figura 1.ª

—Si se hace rodar una circunferencia exteriormente sobre una circunferencia igual, un punto de la circunferencia móvil describe una cardioidea. En efecto; sea OA (fig. 2) la circunferencia fija y $O'B$ una circunferencia igual á ésta, al principio tangente á la primera en el punto A; si en un cierto instante ella toca en B á la circunferencia fija, el punto A de la circunferencia móvil habrá venido á M y el arco BM será igual al arco BDA; por consiguiente, la figura $AOO'M$ es un trapecio isósceles, y si se traza la OD, la figura $ODMO'$ es un paralelogramo y $DM = OO' = 2R$; así, pues, el lugar de M es una cardioidea, y el punto A es el punto de retroceso. (Ver Epicicloides.) Esta línea se considera también como siendo una cáustica secundaria de Quetelet.

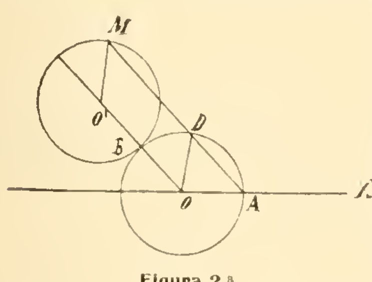


Figura 2.ª

—Esta línea puede ser considerada como el lugar de las proyecciones de un punto sobre las tangentes á una circunferencia, estando el punto sobre la circunferencia. (Ver *Podares.*)

—El lugar de los centros de los círculos tangentes á la cardioidea

$$\rho = 4a \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

y que pasan por el punto de retroceso, es una circunferencia cuyo diámetro es $2a$ y cuyo centro está sobre el eje polar.

Carga.

Definición.—Se da este nombre en Hidráulica á la línea imaginaria que une los extremos superiores de las ordenadas representativas de las cargas de agua en todos los puntos de una cañería de conducción.

Determinación.—Para obtener esta línea es suficiente añadir H_a á las ordenadas de la línea de presión (ver esta voz), ó suponer que todos los puntos de aquélla descienden verticalmente de la altura H_a (esta altura H_a es la que produce la presión de la atmósfera), de manera que la ecuación

$$\mu = \frac{V^2}{2g} + y$$

de la curva de presión representa la línea de carga cuando se considera la ordenada μ contada de abajo hacia arriba, á partir de la horizontal, cuyo plano coincide con la superficie del líquido en reposo dentro del depósito.

Aplicaciones.—Esta línea es de un uso constante en la resolución de todos los problemas de Hidrodinámica que se presentan en las conducciones de agua por cañerías forzadas.

Carpanel.

Definición.—Se denomina curva ó arco carpanel el formado por diferentes arcos de círculos que se acuerdan entre sí, con la doble condición de que la tangente en su punto más alto sea horizontal y las tomadas en los puntos de arranques sean verticales.

Historia.—Por lo que hace referencia al nombre de *carpanel,* con que hoy se distingue esta clase de arcos, diremos: que en antiguos documentos se encuentra escrito *esarpanel (Ordenanzas de Sevilla,* título *Albañiles,* pág. 15, V), ó con la letra figurada *ç*... «el *çarpanel sino te constrine*»... (Vandelvira: *Libro de cantería*, tomo I, pág. 12), y también *sarpanel* y *zarpanel*, «... arás el arco sarpanel de la manera que está en la traza»... (Ibid, pág. 12); y con el actual nombre de *carpanel* en la obra *Arte y uso de Arquitectura*, de Fr. Lorenzo de San Nicolás, P. I., cap. XXXVIII.

También se le ha dado el nombre de *degenerante* «... y esto se ha de hacer con todas las curvas, las cuales figuras son arcos degenerantes»... (Berruguilla: *Verdadera práctica para las resoluciones de Geometría*, 1747).

Muchos son los geómetras, arquitectos é ingenieros que han expuesto procedimientos para trazar estas curvas; entre otros, Serlio, Blondel, Huyghens, Camus, Manduit, Bossut, Bérard, Perronet, Gauthey, Rondelet, Montluisant, K'maingant, Michal, Prony, Leronge y otros, pudiéndose consultar especialmente las Memorias de MM. Montluisant y K'maingaut, que trazan estas curvas con la condición que los arcos y radios que los forman siguen una progresión geométrica. Las de Mr. Michal, Prony y Lerouge, insertas en los *Annales des Ponts-et-Chausseés* en 1831, 1834 y 1839, y la notable monografía publicada en 1846 por Mr. Breton, titulada *Description des courbes à plusieurs centres*, siendo notable lo que escribe sobre las que él llama *curvas continuas*, páginas 46 á 54.

Algunos autores, Vallejo entre ellos (*Tratado de aguas*, T I. página 510), se esmeran en demostrar que el arco elíptico es preferible al carpanel de varios centros, no sólo, dice este autor, «por lo vago, incierto é inexacto de su complicada doctrina, sino porque la mayor parte de las veces, concluyen los constructores por fijar los centros á tanteo y trazar á ojo una gran parte de la curva, sucediendo todo lo contrario en la elipse, cuya sencilla y exacta traza está al alcance de cualquiera, sea el que sea el método elegido para ello, sin que pueda dar valor alguno á las pequeñas desventajas que le atribuyen los apasionados por la curva carpanel».

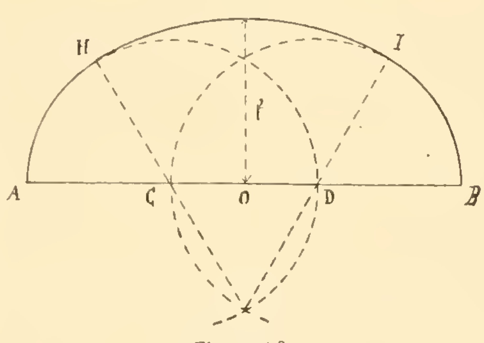


Figura 1.ª

Clasificación.—El número de arcos de círculo de radios diferentes que entran á formar un carpanel, es mayor ó menor, según que los radios de curvatura en la clave y en los arranques, ó sea *flecha b* y la *semi luz a*, difieren más ó menos el uno del otro. En la práctica se hace uso de curvas de 3, 5, 7 y 9 centros, según que la relación $\frac{a}{b}$ tiene los valores siguientes:

De tres centros	para $\frac{a}{b}$	de 0,72	á 1,00
» cinco	» »	de 0,60	á 0,72
» siete	» »	de 0,50	á 0,60
» nueve	» »	de 0,40	á 0,50

Construcción de carpaneles de tres centros. — Distinguiremos dos casos, según sea tan sólo conocida la luz del arco ó se conozca la luz y la flecha. Sea (fig. 1.ª) AB la luz del arco; se la dividirá en tres partes iguales, y haciendo centro sucesivamente en los puntos C y D con radios iguales al tercio de AB, trazaremos los arcos BCE y ADE, que se cortarán en E, punto que será el centro del arco intermedio HI, cuyo radio será HE. El valor de la flecha f quedará determinado, pues siendo $OA = a$, se tendrá:

$$f = \frac{4a - a\sqrt{3}}{3} = \frac{a}{3}\left(4 - \sqrt{3}\right).$$

También se puede hacer el trazado, dividiendo la luz AB (fig. 2.ª) en cuatro partes iguales, describiendo con un radio igual á una de estas partes, tres circunferencias cuyos centros sean los puntos de división 1, 2 y 3 y tomando el punto D en que la circunferencia de centro en 2 corta á la flecha prolongada, como centro del círculo intermedio, cuyo radio será DE.

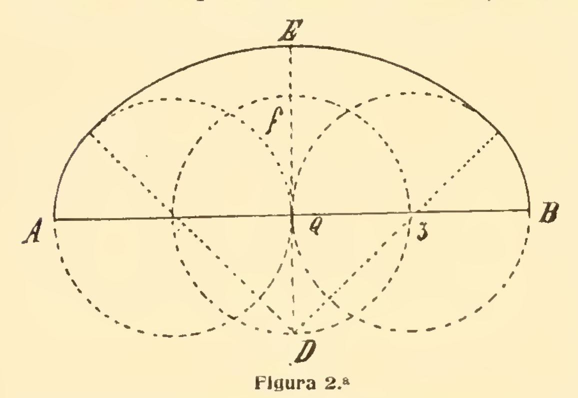


Figura 2.ª

Ahora el valor de la flecha es:

$$f = a\sqrt{2}.$$

—Sea en segundo lugar AB la luz y OC la flecha (fig. 3.ª); tomaremos á partir de uno de los extremos B de la línea AB una longitud $BD = OC$ y construiremos sobre $OD = OB - OC$ un triángulo equilátero, del cual determinaremos la altura FI que se llevará desde I sobre BD y se tendrá el punto H que se tomará como centro de uno de los arcos laterales; haciendo $OH' = OH$ y construyendo sobre HH' un triángulo equilátero, el vértice K será el centro del arco intermedio que se limitará en los puntos M y N de acuerdo con los BM y AN.

Igualmente se verifica el trazado que se desea, construyendo so-

bre la semiluz AO (fig. 4.ª) un triángulo equilátero, llevando OC sobre el lado OD y uniendo el punto C con el E obtenido. La recta CE prolongada cortará al lado AD en el punto F, y trazando desde

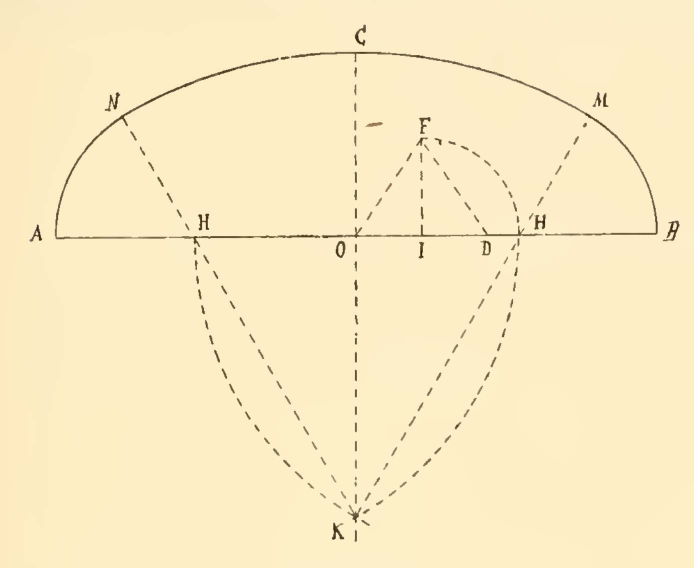


Figura 3.ª

este punto una recta paralela á la DO, los puntos H é I en que corta á la línea AB y á la CO prolongada nos dan dos de los centros; el tercero H' se encontrará tomando $OH' = OH$. Si llamamos x á la distancia OH', a á la semiluz AO y b á la flecha OC se tendrá:

$$x + a = b + \sqrt{3x^2};$$

de donde:

$$x = \frac{1}{2}(a - b) + \sqrt{\frac{3}{4}(a - b)^2} = (a - b)\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

y por tanto el radio

$$AH = a - (a - b)\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

y el

$$CI = a + (a - b)\frac{1 + \sqrt{3}}{2}.$$

Método de Mr. Michal para el trazado de los arcos carpaneles.— Este método, á más de satisfacer á las condiciones antes citadas, implica aquella otra de que las normales sucesivas en los puntos de acuerdo de los arcos de círculo forman entre sí, dos á dos, ángulos iguales.

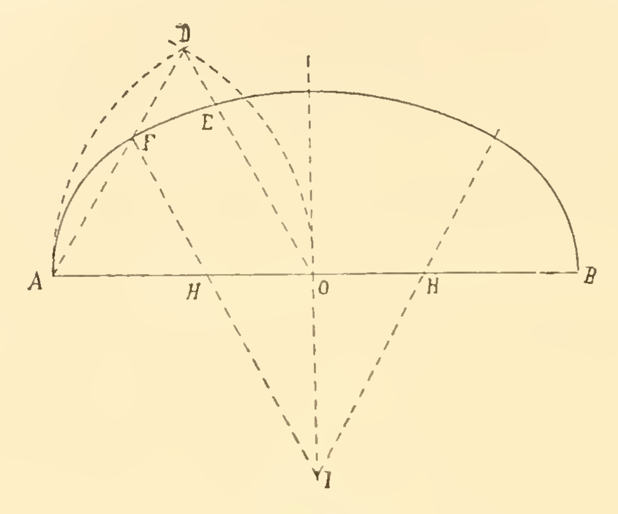


Figura 4.ª

Si, pues, n es el número de arcos de círculo que componen un carpanel, serán indeterminados $\frac{n-3}{2}$ radios, que se reemplazarán por otros tantos de curvatura de la elipse á la que substituye el carpanel, y cada uno de estos $\frac{n-3}{2}$ radios de curvatura que designaremos por ρ, ρ_1, ρ_2,... deberá ser paralelo á la bisectriz del ángulo formado por los dos radios extremos del arco de círculo correspondiente.

Construcción de carpaneles de cinco centros.—Sea $AB = 2a$ (fig. 5) la luz del arco y $OD = b$ la flecha dadas; describiremos con OA por radio una semicircunferencia AGB y dividiremos el cuadrante AG en cinco partes iguales, uniendo de dos en dos los puntos de división á partir del A; lo que nos dará las cuerdas AE, EF y FG, cuyas dos primeras subtienden $\frac{2}{5}$ del cuarto de circunferencia, y la FG, sólo $\frac{1}{5}$ de la misma.

Hecho esto, tomaremos $AC_o = \rho$ (que supondremos ahora conoci-

do) y trazaremos MK paralela al radio OE; desde el punto K de encuentro de MK y de la cuerda EA, trazaremos KL paralela á EF y desde el punto D la DL paralela á GF; por el punto L de encuentro de las rectas DL y KL trazaremos la paralela LC_2 al radio oF

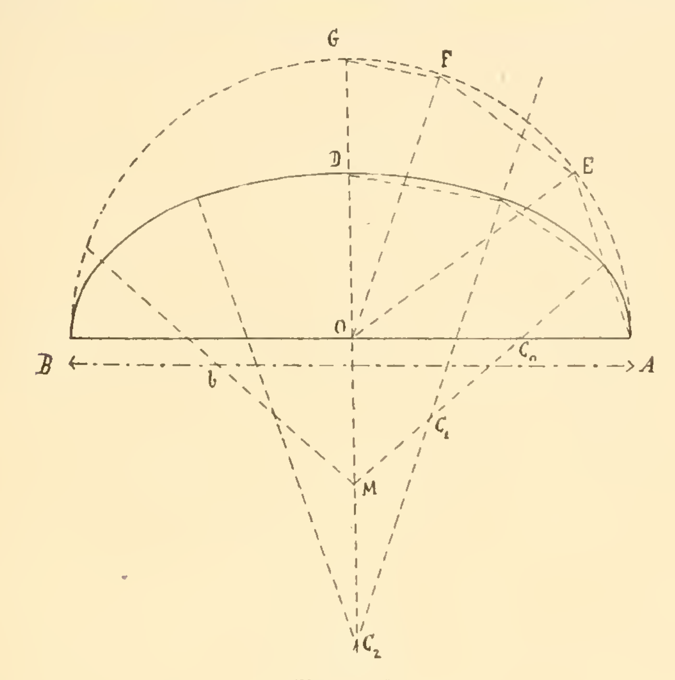


Figura 5.ª

y se obtendrán los puntos C_1 y C_2, que son los dos últimos centros buscados. Los radios correspondientes son $\rho_1 = KC_1$ y $\rho_2 = KC_1 + C_1C_2 = LC_2 = DC_2$, pues, en efecto, los triángulos AC_oK, AOE, KC_1L, y EOF son semejantes, así como los LC_2D y FOG; y como los AOE, EOF y FOG son isósceles, se viene á tener

$$C_oA = C_oK, \qquad C_1K = C_1L \quad \text{y} \quad C_2L = C_2D;$$

por consiguiente, si se describe el arco de círculo AK desde el punto C_o como centro y con $\rho = AC_o$ por radio, pasará por el punto K, en el que se acordará con el arco del círculo descrito desde el punto C_1 como centro con $\rho_1 = C_1K$ por radio, puesto que los centros de estos dos círculos están sobre la recta que pasa por el punto de contacto K; asimismo, puesto que $C_1K = C_1L$, el arco del círculo KL pasará por el punto L, en el que se acordará con el arco DL,

puesto que el punto L se encuentra sobre la línea de los centros $C_1 C_2$; el arco del círculo descrito desde el punto C_2 como centro con un radio $\rho_2 = C_2 L$ pasará también por D, puesto que $C_2 L = C_2 D$. Por lo tanto, la curva que acabamos de trazar llena las condiciones impuestas.

Construcción de carpaneles de siete centros. — Sea $AB = 2a$ (figura 6.ª) la luz del arco y $OD = b$ la flecha dadas; describiremos

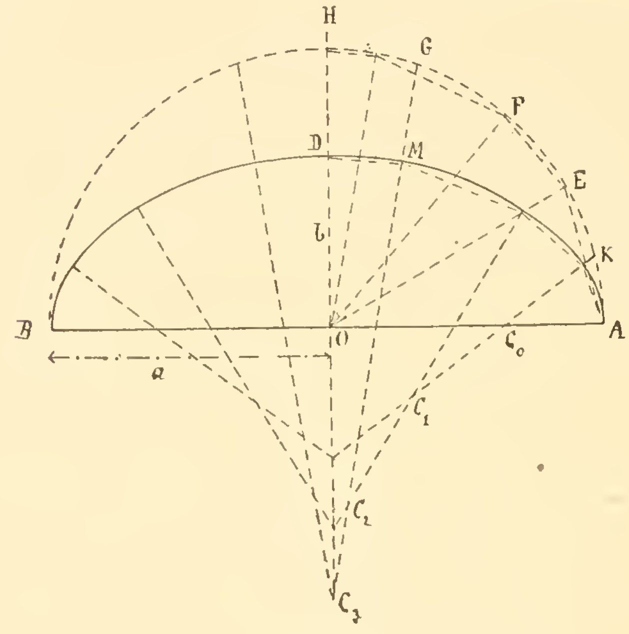


Figura 6.ª

con OA por radio una circunferencia y dividiremos el cuadrante AH en siete partes iguales, uniendo de dos en dos los puntos de división á partir de A; lo que nos dará las cuerdas AE, EF, FG y GH que subtienden cada una $\frac{2}{7}$ del cuarto de circunferencia, y la última, sólo $\frac{1}{7}$ de la misma.

Hecho esto, $AC_0 = \rho$ (que supondremos ahora conocido) y trazaremos NK paralela al radio OE; desde el punto K de encuentro de NK y de la cuerda EA, trazaremos KL paralela á EF; asimismo, tomaremos $KC_1 = \rho_1$ (que supondremos ahora conocido) y por el punto C_1 se dirigirá PL paralela al radio OF hasta su encuentro en el punto L con la recta KL.

Tracemos desde los puntos D y L las paralelas á las cuerdas HG y FG hasta su encuentro en M, por cuyo punto trazaremos MC_3 paralela al radio OG; así obtendremos los puntos C_2 y C_3 que son los otros centros que buscábamos. Los radios serán:

$$\rho = AC_0, \quad \rho_1 = KC_1, \quad \rho_2 = LC_2, \quad \rho_3 = MC_3,$$

siendo los triángulos AC_0K, KC_1L, LC_2M y MC_2D, semejantes á los triángulos isósceles AOE, EOF, FOG y GOH, se tiene:

$$AC_0 = KC_0, \quad KC_1 = LC_1, \quad LC_2 = MC_2 \quad \text{y} \quad MC_3 = DC_3;$$

de aquí resulta que el arco de círculo descrito desde el punto C_0 como centro y con el radio C_0A pasará por el punto K; que el descrito desde el punto C_1 con el radio C_1K pasará por el punto L; que el descrito desde el punto C_2 con el radio C_2L pasará por el punto M, y, por último, que el descrito desde el punto C_3 con el radio C_3M pasará por el punto D. Todos estos arcos de círculo sucesivos se acordarán dos á dos en los puntos K, L y M, puesto que estos puntos están situados sobre las líneas de los centros de los arcos en contacto.

Simétricamente se trazará el otro medio de la curva, la cual llenará las condiciones expuestas, resultando dos radios indeterminados, mientras que en el caso anterior lo estaba sólo uno.

Construcción de carpaneles de nueve centros.—Sea $AB = 2a$ (fig. 7) la luz del arco y $OD = b$ la flecha dadas; describiremos con OA por radio una circunferencia y dividiremos el cuadrante AK en nueve partes iguales, uniendo de dos en dos los puntos de división á partir del A, lo que nos dará las cuerdas AE, EF, FG, GH y HK, que subtienden cada una $\frac{2}{9}$ del cuarto de circunferencia, y la última, HK, sólo $\frac{1}{9}$ de la misma.

Hecho esto, tomaremos $AC_0 = \rho$ (que supondremos ahora conocido) y trazaremos LQ paralela al radio OE; desde el punto L de encuentro de LQ y de la cuerda EA, trazaremos LM paralela á EF. Asimismo tomaremos $LC_1 = \rho_1$ (que supondremos ahora conocido), y por el punto C_1 se dirigirá MR paralela al radio OF hasta su encuentro en el punto M con la recta LM, por cuyo punto trazaremos la recta MN paralela á la cuerda FG. Del mismo modo tomaremos

$MC_2 = \rho_2$ (que supondremos ahora conocido), y por el punto C_2 se dirigirá MS paralela al radio OG hasta su encuentro en el punto N con la recta MN, por cuyo punto trazaremos la recta NP paralela á la cuerda GH hasta su encuentro en P con la paralela trazada por el punto D á la cuerda HK, y los últimos centros se encontrarán en

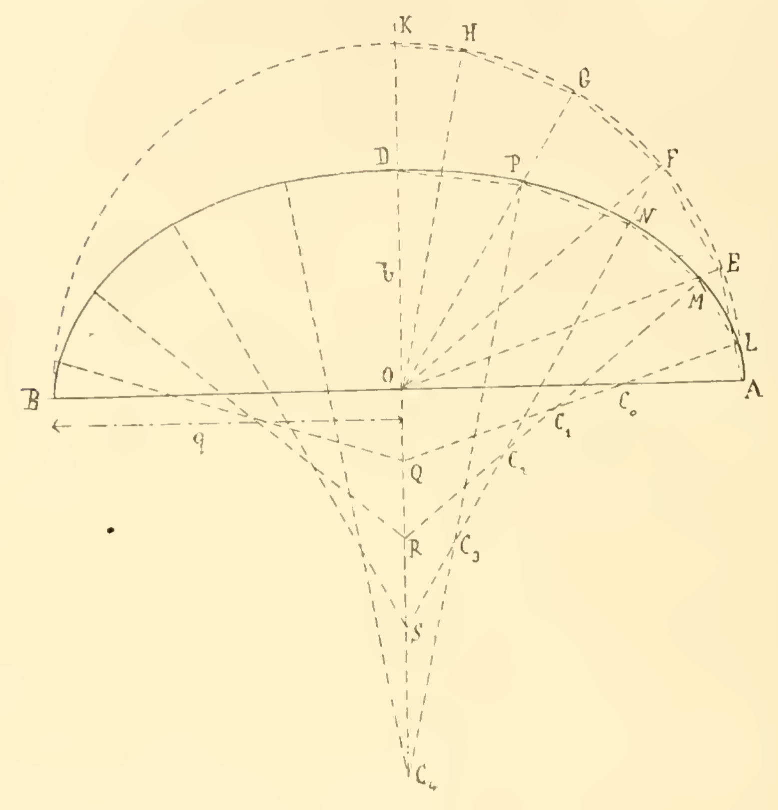


Figura 7.ª

los puntos en que la recta PC_4 trazada por P paralelamente al radio OH encuentra á las rectas NS y KO.

Los centros de los arcos de círculo que forman la curva son, pues, C_o, C_1, C_2, C_3, C_4 y los simétricos con relación á OK de los cuatro primeros, y como en los casos anteriores, se demostraría que los arcos trazados con las condiciones expuestas responden á la construcción que se buscaba.

. Los valores de los radios que hemos supuesto conocidos para efectuar las construcciones anteriores, han sido dados por M. Michal en tablas obtenidas calculando el radio de curvatura de la elipse en

función del ángulo que ésta forma con el eje mayor. Estos cuadros dan solamente los valores de los primeros radios á partir de los arranques, pues los demás se obtienen por las construcciones indicadas; pero M. Michal, fundándose en las propiedades analíticas de las líneas que forman las figuras, ha dado las siguientes ecuaciones que permiten calcular los valores numéricos del último y penúltimo radio:

$$\text{el último radio} = \frac{b_1 + a_1 \operatorname{tang} \varphi_1}{\cos \varphi_3 (\operatorname{tang} \varphi_1 - \operatorname{tang} \varphi)},$$

$$\text{el penúltimo} = \frac{b_1 (\operatorname{tang} \varphi_2 + \operatorname{tang} \varphi_1) - a_1 \operatorname{tang} \varphi (\operatorname{tang} \varphi_2 - \operatorname{tang} \varphi_1)}{\cos \varphi_3 (\operatorname{tang} \varphi_1 - \operatorname{tang} \varphi) (\operatorname{tang} \varphi_3 - \operatorname{tang} \varphi_2)},$$

en cuyas ecuaciones representan, a_1 la abcisa del penúltimo punto de contacto A; b_1 la diferencia entre la flecha b y la ordenada del mismo punto A; φ y φ' los ángulos que forman las cuerdas DB y BA con el eje de las x; φ_2 y φ_3 los que forman los radios AE y BF con el mismo eje. Por último, otros cuadros de M. Michal dan los valores de los ángulos que los radios forman entre sí, en función de la luz, supuesta igual á 2 a. En este caso, las construcciones gráficas se modifican, y en lugar de dividir el cuarto de circunferencia en partes iguales, se la divide por medio de radios que forman los ángulos que las tablas señalan.

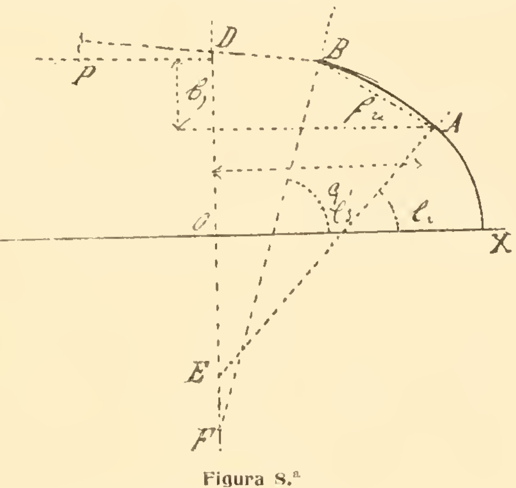


Figura 8.ª

El método de trazado debido á Mr. Lerouge *(Annales des Ponts et Chausseés* 1839, 2.° semestre) modifica el de Mr. Michal, en el sentido de que hace crecer los radios en progresión aritmética, es decir, que calcula los radios necesarios para los trazados haciendo que la diferencia entre dos consecutivos cualesquiera sea constante.

—En el trazado del carpanel de 39 metros de luz por una montea ó flecha de 9,75 usado en el puente de Neuilly, por Perronet, se si-

guió otro procedimiento, que se puede ver en detalle en *Traité Special de coupe des Pierres* (pág. 21).

—Por último, y en virtud de su sencillez, nos vamos á permitir in-

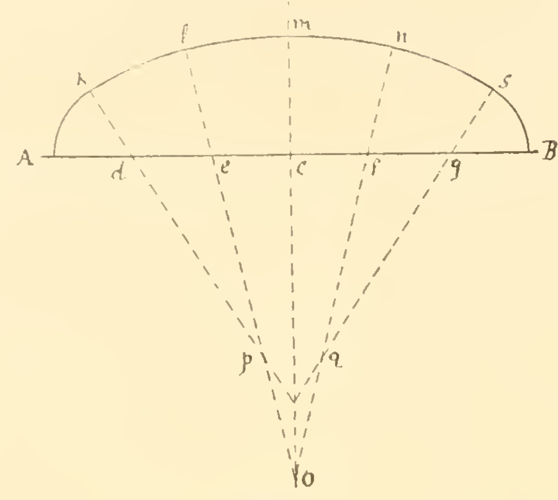


Figura 9.ª

dicar los procedimientos usados por M. Dejardin y Mr. Gautey para los trazados de las curvas carpaneles de cinco centros.

Procedimiento de M. Dejardin.—Este es muy sencillo, y consiste en

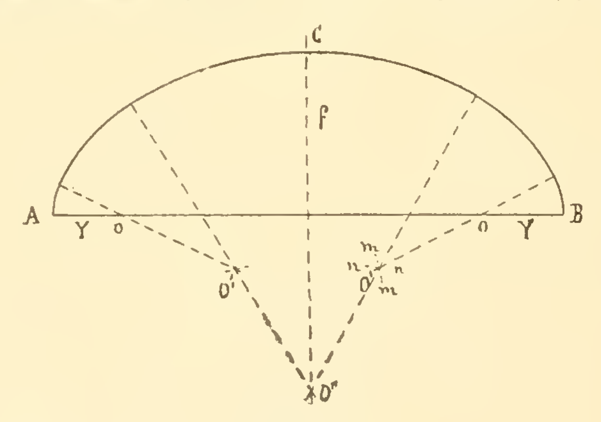


Figura 10.

dividir la luz AB en seis partes iguales: por los puntos de división d y g trazar las líneas Kdt y sgt que formen con la horizontal un ángulo de 60°, y que se encuentren en un punto del eje vertical; se lleva de t á o una longitud igual á una de las divisiones Ad de la

luz, y después se une el punto O con los e y f de división por rectas que cortarán á las anteriores en los puntos p y q. De este modo se encuentran los centros d, g, q, p y o de los arcos, cuyos radios respectivos serán Ad, Bg, pk, qs y ol.

Procedimiento de Mr. Gautey.—Se reduce á fijar prudencialmente dos radios: el de los arranques y el del vértice del arco y á determinar los intermedios, por la condición de que sean medios proporcionales geométricos entre los dos extremos. Así, siendo OA y $O''C$ los radios dados, r y R, el intermedio R', será:

$$\frac{r}{R^1} = \frac{K^1}{R} \quad \text{ó} \quad R^1 = \sqrt{rR}$$

que se puede obtener gráficamente. El centro o' de este arco se encontrará en la intersección de los dos arcos mm_1, nn_1, trazados desde O y O'' con los radios respectivos $R^1 - r$ y $R - R^1$.

Cassinoidea.

Definición.—Se llama así la curva, lugar de los puntos cuyas distancias á dos ó más puntos fijos dan un producto constante.

Clasificación.—Según que los puntos dados ó *focos* están en un plano ó se consideran sobre la superficie de una esfera, la curva es *plana* ó *esférica.*

Cassinoideas planas.—*División.*—Según el número de puntos fijos dados, la cassinoidea se llama de dos, tres,... n focos. La de dos focos ha recibido el nombre particular de *óvalo de Cassini,* si bien el general de *cassinoideas,* aplicado á toda esta familia de curvas, tiene en ella su origen.

Ecuación.—La ecuación general de estas curvas es:

$$r^{2m} - 2a^m r^m \, . \cos mt + a^{2m} = b^{2m}.$$

Cassinoidea de dos focos ú óvalo de Cassini.—*Definición.*—Lugar de los puntos, cuyas distancias á dos fijos dan un producto constante.

Historia.—El óvalo de Cassini debe su nombre á Juan Dominico Cassini, que la ideó al objeto de representar con ella la órbita de los planetas, *Opera astronómica* (Roma, 1666); pero como sólo en algunos casos particulares las observaciones astronómicas se acuerdan con tal curva, no ha sido admitida al objeto propuesto por su autor.

Entre los estudios especiales que se han hecho sobre esta curva, señalaremos principalmente los de MM. Tortolini y Williams Roberts, que se refieren á las funciones elípticas, *Racotta Scientifica* y *Journal de Liouville* (tomo XIII, pág. 445); los de Strebor, *Nou Anna.* (tomo VIII, página 271), y aquellos de monsieur. D'Arrest, *Astron. Nachr.* (1854, tomo XXXVIII, página 199).

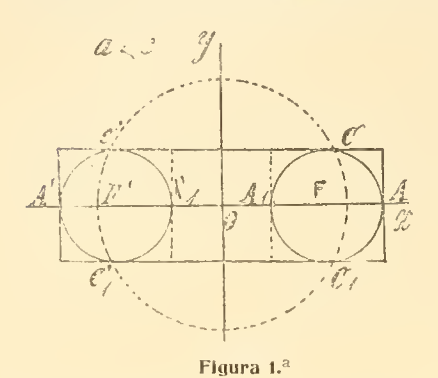


Figura 1.ª

Ecuación.— Su ecuación en coordenadas cartesianas será tomando por ejes la recta FF' y una perpendicular en su punto medio O; llamando $2c$ la distancia FF',

$$y^4 + 2\,(x^2 + c^2)\,y^2 + (x^2 - c^2)^2 - a^4 = 0, \qquad (1)$$

esta ecuación no contiene sino potencias pares de ambas coordenadas; el eje de las x y el de las y son dos ejes de simetría.

El valor de y,

$$y = \pm\sqrt{-(x^2 + c^2) + \sqrt{4c^2x^2 + a^4}},$$

presenta sus raíces reales, porque la cantidad bajo el radical se reduce á $4c^2x^2 + a^4$. La suma de estas raíces $-2\,(x^2 + c^2)$ es negativa y su producto tiene por valor $P = (x^2 - c^2)^2 - a^4$. Cuando P es positivo, los dos valores de y^2 son negativos y la ecuación (1) tiene sus cuatro raíces imaginarias; cuando este producto es negativo, dicha ecuación tiene dos raíces reales.

Por tanto, para que la ecuación (1) tenga sus raíces reales, es necesario que se tenga

$$a^2 + c^2 > x^2 > c^2 - a^2. \qquad (2)$$

Tomando sobre el eje de las x, á un lado y otro del origen, dos longitudes $OA = OA' = \sqrt{a^2 + c^2}$, la curva estará comprendida entre las paralelas dirigidas por los puntos A y A' y el eje de las y.

Para interpretar la desigualdad (2) distinguiremos diferentes casos:

1.° $a < c$. Tomando $OA_1 = OA'_1 = \sqrt{c^2 - a^2}$, se ve que la curva no tiene punto alguno situado entre las paralelas al eje de las y por los puntos A_1 y A'_1.

Si x varía de $\sqrt{c^2 - a^2}$ á $\sqrt{a^2 + c^2}$, se obtiene la curva cerrada $A_1 C A C$, simétrica con relación á Ox. Los valores negativos de x nos dan una segunda curva simétrica de la anterior con relación á Oy

El coeficiente angular de la tangente:

$$t = -\frac{f'x}{f'y} = \frac{x\left(\sqrt{4c^2x^2 + a^4} - 2c^2\right)}{y\,(y^2 + x^2 + c^2)}$$

y es infinito en los puntos A, A', A_1, A'_1, y cero en los puntos C, C', C_1, C'_1, en que la curva es cortada por la circunferencia de círculo descrito desde el punto O como centro y OF por radio. En estos puntos la tangente es paralela al eje de las x.

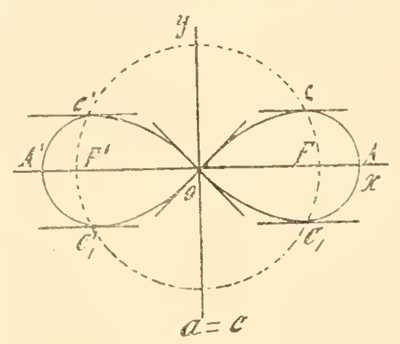


Figura 2.ª

2.° $a = c$.—Se puede hacer variar x de $-c\sqrt{2}$ á $c\sqrt{2}$; la curva presenta en el origen un punto doble cuyas tangentes son la primera y segunda directriz. Se da á esta curva el nombre de *lemniscata*. (Ver esta voz.) (Fig. 2.ª).

3.° $a > c$. —La desigualdad $x^2 > c^2 - a^2$ está satisfecha cualquiera que sea x; la abscisa x puede variar de $-\sqrt{c^2 + a^2}$ á $+\sqrt{c^2 + a^2}$.

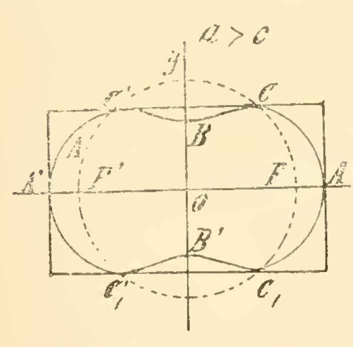


Figura 3.ª

Si x varía de O á $+\sqrt{c^2 + a^2}$; y^2 varía de $a^2 - c^2$ á O, el lugar es una curva cerrada que tiene por vértice los puntos A, A' y los puntos B, B' situados sobre el eje de las y á una distancia del origen igual á $\sqrt{a^2 - c^2}$.

Para que la circunferencia de círculo, que tenga por centro elpunto O y por radio OF, encuentre á la curva, es necesario que $a < c\sqrt{2}$. Cuando esta condición está satisfecha, la ordenada crece del punto B al C, luego decrece del C al A; la ordenada del punto B es mínima y la del C máxima (fig. 3.ª).

Cuando $a > c\sqrt{2}$, la ordenada decrece del punto B al punto A, será máxima en el punto B y la curva tendrá la forma indicada en la figura 4.ª

—Su ecuación en coordenadas polares se obtendrá haciendo $OI = \rho$ é $IOx = \omega$ y se tendrá:

$$r^2 = c^2 + \rho^2 + 2c\rho \,.\, \cos\omega; \quad r'^2 = c^2 + \rho^2 - 2c\rho \,.\, \cos\omega.$$

por tanto será:

$$\rho^4 - 2\rho^2 c^2 \,.\, \cos 2\omega + c^4 - a^4 = 0, \qquad (2)$$

afecta tres formas según que $\frac{a}{c} \lesseqgtr 1$.

Si $\frac{a}{c} < 1$, la curva está formada por dos lazos cerrados iguales entre sí y $\frac{a^2}{c^2}$, siendo igual á sen2θ, será 2θ el ángulo que forma la tangente trazada desde el centro.

Si $\frac{a}{c} = 1$ coincide con la *lemníscata*, y si $\frac{a}{c} > 1$ ó $\frac{a^2}{b^2} = \text{sen}\,2\theta$, la curva está compuesta de una sola rama y su forma se aproxima en ciertos casos á la de la elipse.

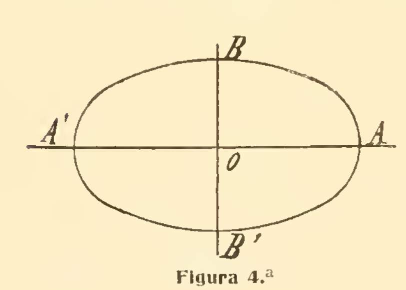


Figura 4.ª

La ecuación de esta curva toma su forma más sencilla en el sistema bipolar, pues en este caso, siendo F y F' los focos, y r y r' las coordenadas de un punto M de la curva, y siendo a una constante, será su ecuación

$$a^2 = rr'. \qquad (3)$$

Tangente y normal. — Diferenciando la ecuación (3) se obtiene:

$$rdr' + r'dr = 0, \qquad \text{de donde} \; \frac{dr}{dr'} = -\frac{r}{r'}$$

y de esta relación se deduce:

1.° Que la tangente en un punto P de la curva divide el ángulo formado por uno de los radios vectores con la prolongación del otro en dos partes tales, que los cosenos son entre sí como los radios vectores contiguos, y por consecuencia,

2.° Que la normal en el punto P de la curva divide el ángulo de los radios vectores en partes tales, que los senos son entre sí como los radios vectores contiguos.

Para trazar la tangente en un punto cualquiera M (fig. 5.ª), se dirigen los radios vectores fM y $f'M$ que corresponden á este punto, se lleva el pequeño Mf sobre el mayor de M en I; por I se traza la

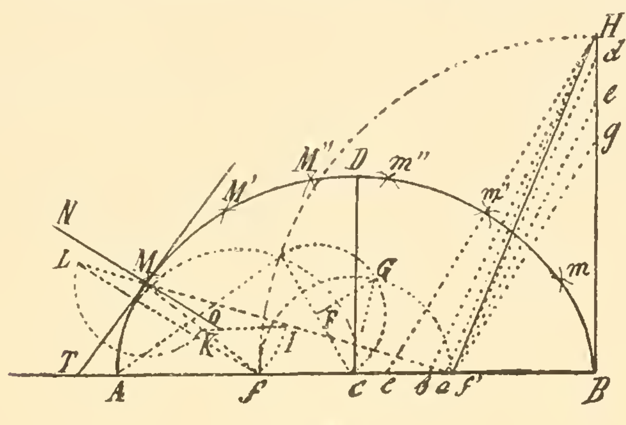


Figura 5.ª

paralela IK al eje AB, á partir del punto M, se lleva la distancia MK sobre la prolongación ML de $f'M$; se dirige la recta fL por el foco f y el punto L, á la cual, y por el punto dado M, se traza la perpendicular MT, que será la tangente buscada.

Trazado.—Para trazar esta curva, cuando se nos dan sus ejes, se empezará por determinar los focos, para lo cual, sobre el semieje mayor AC como diámetro, se describe una semicircunferencia AEC, se toma AE, igual al semieje menor, se traza la recta EC y sobre ella la semicircunferencia EGC; se levanta á EC la perpendicular FG en su medio, hasta el punto G y se transporta la distancia CG de C á f y f', cuyos puntos son los focos. Hecho esto, por el extremo B del eje mayor se levanta á éste la perpendicular $BH = Bf$ y se traza la recta $f'H$; ahora se toman entre el foco f' y el centro c puntos a, b, c..... cualesquiera, por los cuales y el punto H se trazan las rectas aH, bH, cH..... á las que por el foco f' se dirigen las paralelas $f'd$, $f'e$, $f'g$..... y por cada foco como centro y con un radio igual á la distancia Ba, se describen dos arcos de círculo, uno en m y otro en M; del propio modo y con los mismos centros é igual radio á la distancia Bb se describen dos nuevos arcos de círculo que cortarán á los primeros, respectivamente, en los puntos m y M que pertenecen á la cassinoidea. Operando de igual manera con las distancias

Bb y Be, Bc y Bg .... y con los focos como centros, se tendrán los puntos m' y M', m'' y M''.. .., y así cuantos se quieran, perteneciendo todos á la curva. Uniendo estos puntos y los de los extremos de los ejes por un trazado continuo queda la curva trazada.

Advertiremos, que cuando el eje pequeño es menor que los $\frac{4}{7}$ del mayor, resulta una inflexión en los extremos de aquél.

Propiedades.—Dada la base de un triángulo curvilíneo formado por tres arcos de hipérbolas equiláteras concéntricas, el lugar del vértice, cuando el ángulo formado por los dos lados es constante, es una cassinoidea.

Las analogías que existen entre el triángulo rectilíneo inscrito en un círculo y el curvilíneo inscrito en esta curva, permiten resolver fácilmente algunos de los problemas á ella referentes.

—Dado un ángulo fijo AOB circunscrito á una elipse, sea MN una tangente á la curva, y tal, que la suma de los segmentos $MO + NO$ que ella determina sobre los lados del ángulo fijo sea un máximo; siendo F y F' los dos focos de la curva se tiene

$$FM \,.\, F'M = FN \,.\, F'N;$$

de modo que los dos puntos M y N estarán sobre una misma cassinoidea homofocal á la elipse propuesta. (*Nou. Ann.*, t. XI, pág. 125.)

—Las funciones elípticas de primera especie se representan exactamente, cualquiera que sea su módulo, por arcos de esta curva, y á Mr. Serret se debe el teorema referente á la rectificación de esta curva; que su arco se expresa por una función abeliana descomponible en la suma ó la diferencia de dos funciones elípticas de primera especie de módulos complementarios.

—Si un círculo de radio $\frac{b^2}{2a}$ gira alrededor de un eje distante de su centro la cantidad a, engendra la superficie de cuarto orden llamada toro, y si se corta esta superficie por un plano paralelo al eje y distante de él $\frac{b^2}{2a}$, la sección será una cassinoidea.

—El lugar geométrico de los focos de las cónicas concéntricas que tienen un diámetro determinado de magnitud y posición, el diámetro conjugado estando sólo determinado de magnitud es una cassinoidea.

—Los vértices de los ángulos de la base de los triángulos en que la

mediana correspondiente es constante de magnitud y de posición, y en que el producto de los otros lados es invariable, describen dos cassinoideas. Si la mediana es medio proporcional entre los lados adyacentes, las curvas descritas son lemniscatas. Propiedades debidas á Mr. Garlin.

—El lugar de los vértices de los ángulos circunscrito á una hipérbola equilátera es una cassinoidea.

Cassinoides de tres focos.—Se debe á Mr. Allegret, que la señaló á la Academia de Ciencias de París en 16 de Mayo de 1870, el estudio de la cassinoidea de tres focos.

Esta curva da resultados idénticos á los de la ordinaria de dos focos, con la sola diferencia de que los módulos de las funciones elípticas no son complementarios en el caso de que se trata.

Ecuación.— La ecuación polar de esta curva es

$$r^6 - 2a^3r^3 \cos 3\omega + a^6 = b^6,$$

estando el origen en el centro del círculo circunscrito al triángulo equilátero, designando el radio por a y el producto constante siendo igual á b^3.

Cassinoides de n focos.—Mr. Serret ha estudiado una clase de curvas más general que la cassinoidea, á saber, el lugar geométrico de un punto tal, que el producto de sus distancias á los vértices de un polígono regular sea constante. También ha dado la expresión general del arco de estas curvas en función del radio vector.

Cassinoide esférica.— Estas curvas las ha estudiado Mr. Strebor (*Nou. Ann.*, t. VII, pág. 136), que la define diciendo que es el lugar de un punto tal, que el producto de las tangentes trigonométricas de los semiarcos, que se trazan desde él, á dos puntos fijos, sea constante.

Propiedad importante.—Un sistema de cassinoideas esféricas que tengan los mismos focos será cortado octogonalmente por un sistema de hipérbolas equiláteras esféricas, que tengan el mismo centro que las cassinoideas y que pasan por sus focos.

Catacáustica.

Del griego κατακονστικός.

Definición.—Curva cáustica (ver esta voz) producida por la reflexión.

Ecuación.—Para esta clase de curvas, estando el punto luminoso en el plano de la curva, se verifica:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{2}{R \cdot \cos i}.$$

Siendo p la distancia del punto luminoso al de incidencia: p' la distancia del punto de incidencia á aquel en que el rayo reflejado encuentra la cáustica, R el rayo de curvatura de la curva en el punto de incidencia é i el ángulo de incidencia.

Esta fórmula es general, dando á p, p' y R signos iguales para cuando caen á un mismo lado de la tangente á la curva en el punto de incidencia.

Construcción.—Supongamos un punto luminoso A, del cual emanan una infinidad de rayos (fig. 1.ª), AB, AC, AD....., que van á dar sobre una curva dada $BCDH$, y se reflejan formando un ángulo de reflexión igual al de incidencia. La curva GEI, á la cual los rayos reflejados, ó las rectas BI, CE, DF..... son tangentes, es la *catacaustica* ó la cáustica por reflexión; es decir, que suponiendo una infinidad de rayos reflejados, infinitamente aproximados los unos á los otros, la curva se encuentra formada por los puntos de encuentro de estos radios.

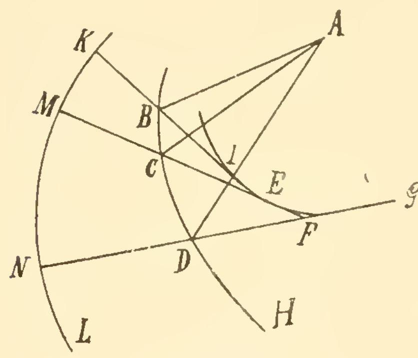


Figura 1.ª

—Si se prolonga el rayo reflejado IB hasta el punto K, tomando $BK = AB$ y la curva $KMNL$ empieza en el punto K, será la evoluta de la catacáustica que empieza en el punto I; una tangente cualquiera EM de esta última será igual á la parte correspondiente EI de la curva, más la recta IK. Tendremos:

$$EI = EM - IK,$$

ó, lo que es lo mismo,

$$EI = EC + CM - IB - BK,$$

lo que se puede escribir bajo la forma

$$EI = (EC - IB) + (AC - AB),$$

por ser $KB = AB$ y $CM = AC$.

Así una porción cualquiera de la catacáustica es igual á la diferencia de los rayos extremos reflejados, sumada con la diferencia de los rayos extremos incidentes.

Mr. J. H. Grillet (*Journal de Liouville*, t. XI, pág. 104) propone la siguiente construcción: Sea P el punto luminoso, I el punto de incidencia, R el centro de curvatura, P' el punto en que el rayo reflejado encuentra á la catacáustica. Para obtener P' se describe sobre IR, tomando como diámetro una circunferencia que corta á PI en A. Se toma sobre esta circunferencia $RA' = RA$, de modo que IA' es la dirección del rayo reflejado. La recta AA' corta IR en un punto B, y la recta PB corta á IA' en el punto P'.

Casos particulares.—La catacáustica por reflexión de un círculo es una evoluta de un caracol de Pascal.

—La catacáustica de una evolvente de círculo es una evolvente de la espiral de Arquímedes.

—La catacáustica de una cicloide común, cuando los rayos luminosos son paralelos al eje, es asimismo una cicloide común.

—La de la espiral logarítmica es también una espiral de la misma naturaleza.

Catenaria.

Del latín *catena.*

Definición.—Curva de equilibrio que toma un hilo homogéneo y perfectamente flexible, cuyas extremidades están fijas y sometido á la sola acción de la gravedad.

Historia.—El problema de determinar la naturaleza de esta curva fué uno de los que Jacobo Bernouilli propuso á los geómetras del siglo XVII. *Additamentum ad problema funicularium. (Acta Eruditorum,* Junio 1691); problema que adquirió celebridad por las distintas controversias á que dió origen. Ya en tiempos de Galileo se había agitado esta cuestión; pero éste, sin razón determinada, consideró que la curvatura de esta curva era la de una parábola, opinión que fué asimismo sostenida por el P. Pardies, por medio de razonamientos que no pudieron resistir á las demostraciones experimentales de Jungius.

Cuatro soluciones responden á la demanda de Jacobo Bernouilli, publicadas en las actas de Leipsik en 1691 y son debidas á Jacobo Bernouilli; á su hermano Juan, *Solutio problemati funicularii (Acta Erud.*, 1691); á Leibnitz, que le considera digno de su atención y se ocupa de este problema en los artículos *De linea in quam flexile se pondere propio curvat, ejusque usu insigni ad inveniendas quotcumque medias proportionales et logarithmos (Acta Erud.*, 1691). *De solutionibus problematis catenarii, aliisque á Dn. Bernouillii propositis (Acta Erud.*, 1691). *De la chaînette ó Solution d'un problème fameux, proposée par Galilée pour servir d'essai d'une nouvelle analyse des infinis, ávec son usage pour les logarithmes, et une application à l'avancement de la navigation (Journal des Savants*, en 1692, en francés), y, por último, Huyghens, *Christiani Hugenii Zulchemii, dum viveret Zeleni torpaehæ, Opera varia.* (Sr. Gravesande, Leyde, 1724.)

Estos ilustres geómetras dieron sus resultados sin análisis, probablemente dice Montucla, en su *Historia de las Matemáticas* para dejar algunos laureles á los que viniesen después que ellos.

Jacobo Bernouilli, obtenidas las soluciones á su problema, le complica nuevamente suponiendo la cuerda de desigual densidad, luego extensible y, por último, solicitada en cada uno de sus puntos por una fuerza dirigida á un centro fijo. Después da la solución, aunque sin dar explicaciones, y su hermano Juan, que las resolvió igualmente, expone la teoría.

En 1697, Gregory trata de completar todos estos trabajos exponiendo la teoría de la catenaria en las *Transact. philos*, vol. II, página 48, y pretendiendo que esta curva invertida es la mejor figura que conviene dar á una arcada. Hutton ha demostrado en su obra *Principes of Bridges* que no es conveniente más que en algunos casos particulares.

Ecuación y propiedades.— La catenaria es una curva funicular (V. Funicular), contenida en el plano vertical, que pasa por la recta que une los dos puntos de amarre ó sujeción y por una paralela á la dirección de las fuerzas, trazada por uno de estos puntos. Tomando este plano por plano de las xy, las ecuaciones generales de la curva funicular serán en este caso, expresando por p el peso de la unidad de longitud del hilo y por T la tensión variable en el punto (xy):

$$d\,T\frac{dx}{ds} = 0; \quad d\,T\frac{dy}{ds} = p\,.\,ds. \qquad (1)$$

La primera ecuación integrada nos da $T\frac{dx}{ds} = ph$, siendo h una constante arbitraria; de donde

$$T = ph \cdot \frac{ds}{dx} \qquad (2)$$

y, por tanto, ph no es otra cosa que la tensión sobre el elemento horizontal del hilo, puesto que para este elemento $dx = ds$. La misma igualdad nos dice que *la tensión varía en razón inversa* de $\frac{dx}{ds}$, ó sea del *coseno del ángulo* de inclinación del elemento considerado con la horizontal, ó que es *proporcional á la secante* de dicho ángulo.

La eliminación de T entre las dos ecuaciones (1) y (2) nos da:

$$phd\left(\frac{dy}{dx}\right) = pds = pdx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

ó

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}dx}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{p}{ph}dx = \frac{dx}{h}.$$

El primer miembro de esta ecuación, haciendo en ella $\frac{dy}{dx} = y'$, toma la forma $\frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}}$; es, pues, una diferencial conocida; integrándola nos da:

$$L\left(\frac{dy}{dx} + \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right) = \frac{x}{h} + C;$$

pero la constante será nula si se supone que el eje de las y pasa por el punto más bajo del hilo, puesto que $\frac{dy}{dx}$ será nulo para $x = 0$.

La ecuación anterior resuelta con relación á $\frac{dy}{dx}$ nos da:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right).$$

Si el origen de las coordenadas es el punto más bajo, es necesario que x é y se anulen al mismo tiempo; lo cual lleva consigo que la constante sea igual á $-h$, y será:

$$y = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right).$$

Tal es la ecuación de la catenaria; de ella se desprende que la curva es simétrica con relación al eje de las y.

Como la tensión $T = ph\frac{ds}{dx}$, se tiene $T = py$. Por tanto, *la tensión en un punto cualquiera es proporcional á la ordenada de este punto.*

—Su ecuación en coordenadas intrínsecas, es; siendo R el radio de curvatura y s la longitud del arco:

$$cR = s^2 + c^2.$$

Caso particular de la

$$cR = s^2 + a^2$$

que corresponde á las curvas que Cesáro denominó *alisoides*. (*Nou. Ann*, 1886.)

—Esta curva goza también de otras muchas propiedades notables, cuyas demostraciones pueden verse en los Tratados de cálculos ó mecánicas, y de las cuales citaremos las siguientes:

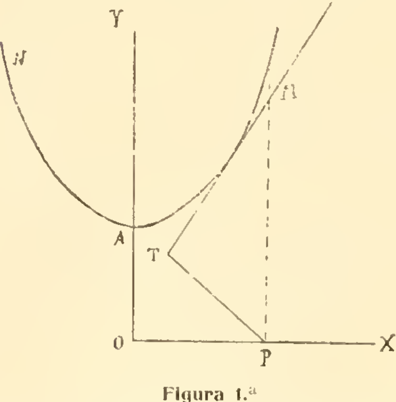


Figura 1.ª

—El radio de curvatura en un punto es proporcional al cuadrado de la ordenada del citado punto.

—Todas las catenarias son curvas semejantes.

—El radio de curvatura es proporcional al cuadrado de la secante del ángulo de la inclinación de la tangente, en el punto que se considera, sobre la horizontal.

—Si construimos la curva exponencial dada por la ecuación $y = e^x$ y la relativa á $y = e^{-x}$ se hallará la catenaria, uniendo los puntos

medios de la parte de ordenada, correspondientes á la misma abscisa, comprendidas entre ambas curvas.

—La catenaria, siendo la forma que toma naturalmente un hilo flexible bajo la influencia de la pesantez, su centro de gravedad estará lo más bajo posible, en razón de su longitud total entre los dos pun-

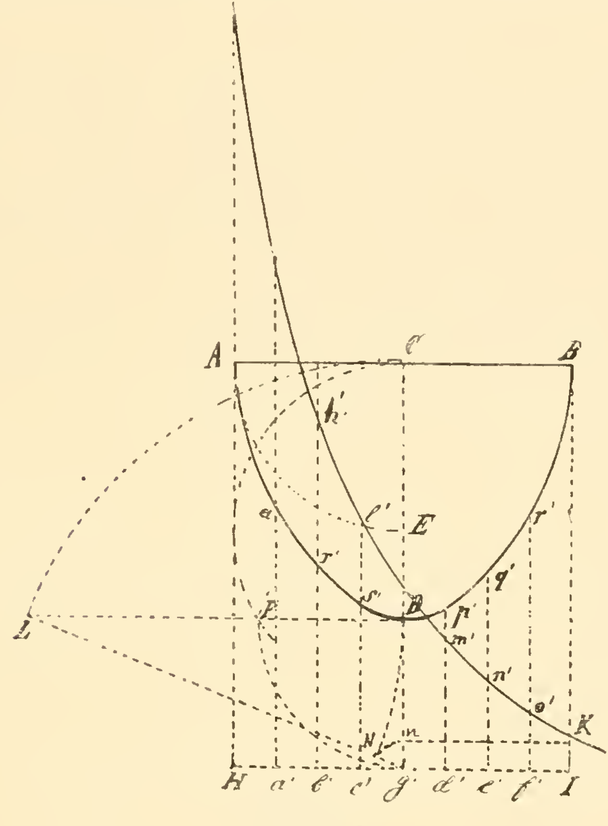


Figura 2.ª

tos fijos y las coordenadas de estos dos puntos; por consiguiente, el área que ella engendra girando alrededor de un eje horizontal contenido en su plano y que no la corte, será menor que el área engendrada alrededor del mismo eje, por toda otra línea de la misma longitud y pase por los mismos puntos fijos, teniendo en cuenta el teorema de Guldin.

—La longitud de un arco AM, de esta curva, es igual á la recta MT, ó sea á la proyección de la ordenada del punto M, sobre la tangente trazada en este mismo punto.

—El área $AOPM$ es igual al doble del área del triángulo MTP.

—La superficie de la rotación de un arco, cuyo extremo está en el eje de las y, y el otro un punto cuyas coordenadas sean (x, y), será, llamando s á la longitud del arco.

$$\text{Superficie} = S = \pi ys + \pi hx.$$

La catenaria y la sinusoide son recíprocamente conjugadas la una de la otra.

Y, por último, citaremos las propiedades siguientes:

Cuando una parábola rueda sobre una recta, el foco de esta parábola describe la catenaria, y si una catenaria rueda sobre una recta, su base pasa por un punto fijo.

Trazado.—El trazado de esta curva se puede hacer de una manera suficientemente exacta por medio de la logarítmica; para ello se transporta la semilongitud AC de C á E sobre el eje, á partir de la base. Este punto E se toma como centro de un arco CF, que tiene esta semilongitud por radio; este arco cortará en F á la perpendicular al eje trazada desde el punto D de la curva; se llevará la porción DF entre el eje y el arco (y que es el parámetro de la catenaria) sobre la prolongación del eje de D en G; por el punto G se traza una paralela á la base, y desde los extremos de esta doble ordenada, dos paralelas, AH y BI, al eje, que cortarán la anterior en H y en I.

Desde el punto G como centro, con GC por radio, se describe un arco de círculo que cortará en L la línea DF prolongada; desde L como centro, con el radio LD se cortará á LG en N; se transportará NG de I en K sobre IB; hecha esta operación se constituirá la logarítmica, de la cual GD y KI serán dos ordenadas; á este efecto (V. Logarítmica) se busca una media proporcional entre KI y GD, que se llevará de e' á n', sobre una paralela al eje trazada por el punto medio de GI. Se trazará luego una tercera proporcional á e', n' y DG, que se llevará de b' en h' á una distancia $b'G$ del eje, igual á Ge'.

Se encontrarán de la misma manera puntos intermedios á los buscados. La curva que pasa por todos estos puntos es la logarítmica.

Para obtener los puntos correspondientes que pertenecen á la catenaria se tomará la mitad de la suma de cada par de ordenadas simétricas ó equidistantes del eje GC, que se acaban de determinar anteriormente, y se llevará el resultado sobre estas mismas líneas.

Empleo en la construcción.—La catenaria ha sido empleada como

curva directriz para bóvedas que tienen que resistir grandes cargas, y en las que la solidez es preferible á la decoración. Rondelet ha demostrado (Art. de Batir) que las dovelas de esta clase de bóvedas no están predispuestas á resbalar las unas sobre las otras, como en las que tienen otra curvatura. Citaremos, como ejemplo, los cuatro grandes arcos, de 31 metros de luz y de 10,36 de flecha, que sostienen la totalidad de la cúpula del Pantheon (Paris) y el intradós de la bóveda esferoide de esta misma cúpula, destinada á soportar la linterna, la cual tiene asimismo por directriz una catenaria, siendo su luz de 21 metros y su altura en la clave de 15,27.

Casos particulares: Catenaria de igual resistencia.

I. Coriolis *(Journal Liouville,* t. I, pág. 75) da este nombre á la curva que afecta una cadena pesada, perfectamente flexible, cuyo espesor varia de un punto á otro proporcional á la tensión.

Siendo p la relación entre el peso de un elemento ds y su longitud; T la tensión, cuyo valor en el punto más bajo sea T_0; x, y sus coordenadas horizontal y vertical, se tendrá para ecuación de la curva:

$$\frac{y}{a} = l \frac{1}{\cos\left(\frac{x}{a}\right)} \quad \text{ó} \quad e^{\frac{y}{a}} . \cos\frac{x}{a} = 1;$$

la constante a se determina por ser $T = ap$.

El espesor de la cadena en función de la abscisa será:

$$p = T_0 \frac{dx}{ds} . \frac{dy'}{dx} \quad \text{ó} \quad p = \frac{T_0}{a}\sqrt{1+y'^2} = \frac{T_0}{a . \cos\frac{x}{a}}.$$

II. Mr. Sturm, en el tomo XIV de los *Annales de Mathematiques de Gergonne*, estudia la curvatura de un hilo flexible é inextensible, cuyas extremidades son fijas y cuyos puntos son atraídos ó repulsados por un centro fijo, según una función determinada de la distancia.

III. Mr. Bonnet *(Journal de Liouville,* t. IX, pág. 99) estudia el ploblema: «Dada una cadena perfectamente flexible y homogénea, pero de desigual espesor, cuyos elementos están sujetos á la acción de fuerzas centrales inversamente proporcionales á las distancias, buscar la ley según la cual debe variar el espesor en cada punto y a curva que debe afectar la cadena en el estado de equilibrio, para

que en este estado la tensión varíe de un punto á otro, proporcionalmente al espesor, ó que la cadena presente igual resistencia á la rotura».

Llamando a la relación constante entre el espesor ω y la tensión T en estado de equilibrio; $R = f(r)$ la intensidad de la fuerza central que supondremos en función de la distancia; la ecuación de la curva de equilibrio será:

$$x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} = \frac{C'}{C} e^{\mp a \int R\, dr},$$

y en coordenadas polares: $\theta + \alpha = \int \frac{dr}{r \sqrt{\frac{C^2}{C'^2} r^2 e^{\pm 2a \int R\, dr}}}$.

Si la fuerza es inversamente proporcional á la distancia, se llega á obtener:

$$r^{1 \pm a} \cos (1 \pm a)(\theta - \theta_0) = r_0{}^{1 \pm a},$$

lo que indica que estas curvas son tales, que sus arcos representan en un gran número de casos, las integrales eulerianas de segunda especie y las mismas estudiadas por Serret en el tomo VII de la publicación antes citada. Estas curvas encierran, como caso particular, el círculo, hipérbola equilátera, la lemniscata, etc., pero no han recibido nombre especial, pudiendo ser estudiadas en el *Journal* que acabamos de indicar y tomos que se mencionan.

Catenaria electrodinámica.—Con este nombre ha designado M. Riecke á la curva dibujada por un hilo flexible, sin peso, recorrido por una corriente y colocado en un campo magnético.

En particular, cuando el campo magnético es uniforme y la línea que junta los dos puntos de unión es perpendicular á su dirección, la curva es un arco de círculo.

Catenaria elíptica, hiperbólica y *parabólica.*—Lindelöf, *Mem. de la Soc. des Sciences* de Finlandia, 1863, dió este nombre á las curvas engendradas por los focos de una elipse, hipérbola ó parábola, que rueda sin resbalar sobre una recta que le es tangente.

La engendrada por uno de los focos de la elipse, se denomina *ruleta* de Delaunay, y es una especie de sinusoide.

—Estas tres líneas, girando respectivamente alrededor de su base, engendran tres especies de superficies, que Plateau estudió y dió los nombres de *onduloide, nodoide* y *catenoide.*

Para el estudio de estas líneas puede verse *Nou. Ann.*, 1888, pág. 209-230.

Cáustica.

Definición.—Curva formada por la intersección de los rayos luminosos que parten de un punto radiante y son reflejados ó refractados por otra curva.

Clasificación.—Cada curva tiene dos cáusticas, una, producida por la reflexión, que se llama *catacáustica* (ver esta voz), y la otra, por la refracción, que se denomina *diacáustica* (ver esta voz).

Historia.—Walther de Tschirnhausen es el inventor de estas especies de curvas, el cual las hace conocer en una Memoria presentada á L'Academie des Sciences en 1682. Indicó, sin demostración, la cáustica del círculo y de la cicloide, en la hipótesis de rayos incidentes paralelos entre sí (*Acta Eruditorum*, 1682, pág. 364), demostrando J. Bernouilli, *De curvis causticis, earumque propietatibus*, que la indicación de Tschirnhausen era defectuosa, encontrándose en las lecciones de *Cálculo Integral* del Marqués del Hospital la primera teoría analítica y geométrica de estas curvas para los radios convergentes y divergentes situados, se entiende en un sólo plano (*Opera Omnia*, t. III).

Malus tiene una Memoria sobre la Óptica y estudios sobre la Dióptrica (*Journal de l'Ecole Polytechnique,* Cahier, XIV, páginas 1-44, 1808, y págs. 84-129) y sobre las superficies cáusticas (*Correspondance sur l'Ecole Polytechnique*, t. I, págs. 142-144, 1808).

En los *Annales Mathematiques de Gergonne* se encuentran una porción de trabajos sobre estas curvas en los tomos IV, XI, XV y XVIII.

Se tienen también estudios particulares de Sturm (*Recherches sur les caustiques*, en el tomo XV de los *Annales Mathem.*, págs. 205-219, año 1825; de Sarrus y Quetelet, págs. 345-358, y de Saint Laurent, páginas 1-33, t. XVII, y págs. 1-19, t. XVIII).

Para más detalles sobre este punto, se puede consultar en el tomo I de *Correspondance Mathematique*, 1828, pág. 29, una *Noticia histórica sobre las cáusticas,* de J. G. G., y en el tomo VII una *Memoria sobre las cáusticas,* por Plana, págs. 13 y 85.

Por último, señalaremos que, entre otras obras que tratan de estas curvas, puede especialmente verse la de Mr. Serret (*Des méthodes en Géométrie*, 2.ª parte, cap. II, 1855).

Ecuación.—Sea AB una curva reflectante; M el punto luminoso ó

calorífero; consideremos dos radios infinitamente próximos, MA y MA_1, y los rayos reflejados AN y A_1N, simétricos de MA y MA_1, con relación á las normales AR y A_1R. La curva cáustica será, según la definición, el lugar de los puntos N.

$$\text{Sean } \alpha = MAR, \quad \alpha' = MA_1R \quad \text{y} \quad \theta = ARA_1$$

se tiene

$$2\theta = M + N;$$

por otra parte, se puede, desechando los infinitamente pequeños de órdenes superiores, expresar θ, M y N por

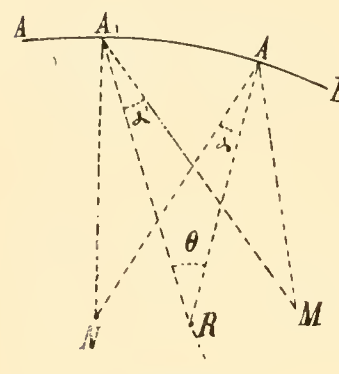


Figura 1.ª

$$\theta = \frac{A_1A}{R}; \quad M = \frac{A_1A\cos\alpha}{AM}$$

y

$$N = \frac{A_1A \,.\, \cos\alpha}{AN};$$

siendo R el radio de curvatura en el punto de incidencia se tiene

$$\frac{2}{R \,.\, \cos\alpha} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN},$$

ecuación que define completamente el punto N, y que puede dar á conocer las propiedades características de la *cáustica*, permitiendo conocer su ecuación por medio de la ecuación de la curva propuesta.

Si los rayos incidentes son paralelos, la ecuación anterior se reduce á la

$$\frac{2}{R \,.\, \cos\alpha} = \frac{1}{AN}.$$

Aplicaciones.—Aplicando esta última ecuación al círculo, se encuentra que la cáustica por reflexión es una epicicloide descrita por un círculo de radio igual al cuarto del propuesto, rodando sobre un círculo concéntrico á este último, y cuyo radio es la mitad menor. —La primera de las ecuaciones anteriores nos haría ver que la cáustica por reflexión de una espiral logarítmica, para un punto lu-

minoso colocado en el polo, es otra espiral idéntica á la anterior.

Propiedades.—La principal propiedad de las curvas cáusticas es la de que, cuando las curvas que las producen son geométricas, dichas curvas son siempre rectificables.

Cáustica secundaria.

Definición.—Se da este nombre á la evolvente de la cáustica de Tschirnhausen.

Historia.—Quetelet (*Nouveaux Mémoires de l'Academie de Bruxelles*, t. III) da á conocer estas curvas, dándole el nombre con que se las distingue y demostrando que son más fáciles de determinar que sus evolutas, descubriendo también un cierto número de propiedades curiosas. En *Correspondance Mathematique*, t. I, pág. 336, se pueden ver los trabajos de Timermans sobre estas líneas, así como estudios particulares sobre las mismas se encontrarán en los *Nouvelles Annales*, t. IV, pág. 426, y en el t. VI, pág. 192 y siguientes.

Propiedades.—Si se consideran dos curvas AM, AN cualesquiera, que se cortan en un punto A, el lugar geométrico de un punto cuya relación de distancias á dos rectas es constante, está formado por el sistema de dos rectas que pasan por A y relativas á dos ángulos agudos y á dos obtusos. Consideremos una de estas rectas que designaremos por AP; tomemos el punto I sobre esta recta y bajemos sobre las AM y AN las perpendiculares IR, IS se tendrá:

$$\frac{IR}{IS} = \frac{\operatorname{sen} MAP}{\operatorname{sen} NAP} = \frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = n = \text{constante.}$$

Si por el mismo punto I elevamos una perpendicular IT á AP, se tiene evidentemente:

$$\frac{\operatorname{sen} RIT}{\operatorname{sen} SIT} = \frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = n,$$

considerando á AP como una recta *dirimante* de dos medios, IR será el rayo incidente é IS el reflejado, siendo n el índice de refracción.
—Sean dos curvas AM, $A''N$ cualesquiera situadas en un mismo plano. Los puntos en que la relación de las distancias normales á estas dos curvas es constante, será una tercera curva $A'P$, y tal, que si por un punto I de esta curva trazamos las dos normales IR, IS, las tres tangentes trazadas en R, I, S, respectivamente á las curvas

AM, $A'P$, $A''N$, se cortarán en un mismo punto. Si, pues, la curva $A'P$ es una línea dirimante entre dos medios, y si AM representa una trayectoria octogonal de los rayos refractados, se tendrá

$$\frac{IR}{IS} = n = \text{índice de refracción},$$

y esta trayectoria es la *cáustica secundaria* ó envolvente de un círculo, cuyo centro recorre la línea dirimante y cuyo radio $IS = n \, . \, IR$.

—Existiendo una porción de trayectorias octogonales, si se adopta una para los rayos incidentes, la de los rayos reflejados queda determinada y las evolventes de esta última trayectoria ó cáustica secundaria es la cáustica buscada.

—En el tomo IV, pág. 426 de los *Nouvelles Annales* se estudia la ecuación general de estas curvas, por reflexión de las cónicas, cuando los rayos emanan de un punto. Esta curva es la que se obtiene bajando desde el punto luminoso una perpendicular sobre la tangente á la cónica y prolongándola una cantidad igual á sí misma.

—Este género de curvas es dado por la ecuación bifocal

$$pz + qz' = r,$$

representando z y z' las distancias de un punto cualquiera de la curva á los dos focos fijos, y p, q y r cantidades constantes.

—Entre las propiedades curiosas que Quetelet descubre y enuncia en su Memoria arriba citada, se encuentra la siguiente, que M. Sturm ha demostrado por camino diferente: «Dos círculos fijos, estando trazados sobre un plano, si el centro de un tercer círculo de magnitud variable se mueve sobre la circunferencia del primero, y su radio permanece en todos los casos proporcional á la distancia de su centro á la circunferencia del segundo, el círculo móvil envolverá la curva formada del conjunto de dos óvalos conjugados de Descartes».

Caveto.

Del latín *cavus*, cavidad.

Definición.—Se denomina así á una moldura cóncava, cuyo perfil es un cuadrante de círculo. Es la inversa del cuarto-bocel (ver esta voz).

Historia.—El nombre de *caveto*, así como el de *contrabocel*, dado á

este perfil se encuentra en Palladio *(Arquitectura*, trad. de Praves, capítulo V); pero también se la ha llamado *Antequino* (Bails), y con este nombre y con el de *esgucio* se la encuentra en la obra de P. Tosca *(Comp. Math.*, t. V, lib. I, cap. I). Hoy se la distingue también con la denominación de *media caña* (M. Borrell, *Trat. teór. práct. de dibujo*, t. I, pág. 10).

Clasificación.— Se distingue el caveto *recto* y el *inverso* ó *reverso*. El primero es aquel que presenta su vuelo hacia arriba (fig. 1.ª), y el segundo cuando tiene el vuelo hacia abajo (fig. 2.ª).

Trazado.—Se construye un cuadrado $ABCD$, cuyo lado sea igual

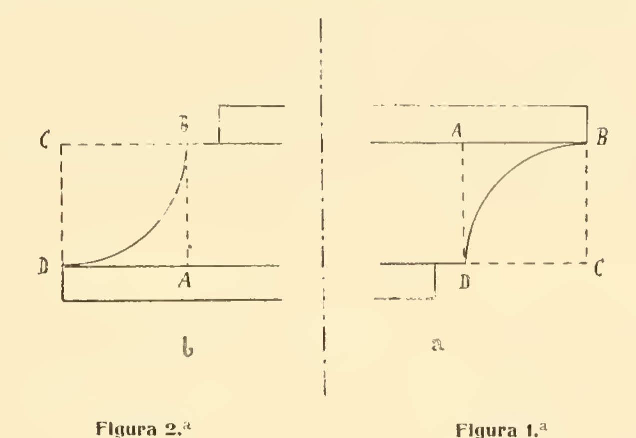


Figura 2.ª   Figura 1.ª

á la altura del caveto y haciendo centro en C, trácese el cuadrante BD y quedará formado el perfil pedido.

Cayleyana.

Definición.— Teniendo á la vista las definiciones de las dos curvas hessiana y steineriana, si se considera una tercera curva que será envuelta por las líneas que unen un polo y (punto de la steineriana) con el punto doble de su primera polar (punto de la hessiana), ésta será la *cayleyana* de la curva primitiva.

Historia.— Esta curva fué estudiada por Cayley para las curvas de tercer orden, *A memoir on curves of the third order (Philosophical Transactions*, t. CXLVII, 2.ª parte, 1857) y sus singularidades expuestas sin demostrar por Steiner *(Journal de Crelle*, t. XLVII), y se puede consultar para las demostraciones de las propiedades que aquí se exponen. Clebsch, *Ueber einige von Steiner behandelte Curven (Journal de Crelle*, t. LXIV).

Propiedades.—El orden de la cayleyana es igual, siendo la ecuación de la curva primitiva

$$f = a_x{}^n = b_x{}^n = \ldots.. = 0,$$

á la expresión, $3(n-2)(5n-11)$.

—La clase es igual á $3(n-1)(n-2)$.

—Dos polos, cuyas polares se tocan estando situadas sobre una tangente de la steineriana, y las polares de todos los polos situadas sobre una de estas tangentes, se cortan en un solo punto; el punto doble x, el cual pertenece á la polar del punto de contacto y de la tangente; la tangente común de todas las polares es la línea de unión x y de y; esta es, por tanto, tangente á la cayleyana.

Cayleyana de un haz de curvas.—La cayleyana de un haz será envuelta por las líneas que unen los puntos correspondientes de la hessiana y de la steineriana del haz. La clase de esta curva es

$$3m(m-1).$$

—La curva correlativa de la cayleyana es la jacobiana. (Ver esta voz.)

—Para la *cayleyana de cúbica* ó envolvente de la recta que une dos puntos correspondientes de una cúbica no singular, ver *Journal de Crelle,* t. XXXVIII, pág. 241, y Cremona, *Curve piane.*

Centros.

Definición.—Se da en Hidráulica el nombre de línea de los centros á la línea lugar geométrico de los centros de gravedad de las secciones transversales de una corriente, ó sea á la curva descrita por el centro de gravedad de la masa en movimiento.

Aplicaciones.—Esta línea, juntamente con la de fondo y el eje hidráulico, precisa ser conocida para el planteamiento de los diferentes problemas á que da lugar el movimiento de las aguas corrientes.

Centros de carena.

Definición.—Se llama curva de los centros de carena, al lugar de las proyecciones de los centros de carena de un navío sobre el plano latitudinal.

Consideraciones generales.—El centro de carena, es el de gravedad del volumen de agua que desplaza un navio que flota. Si el buque está en reposo, el centro de carena se encuentra en el longitudinal, y se determina buscando su altura sobre la quilla y su distancia á una vertical conocida, situada en el longitudinal, por medio de fórmulas especiales, si bien se prefiere hacerlo, por medio de la experiencia, cuando el navio está á flote y su armamento completo.

—Si ahora consideramos el caso en que el navio se mueve alrededor de una horizontal trazada en el longitudinal, se puede admitir que el centro de carena cambia de posición sin salir de una sección perpendicular á la quilla. Sea en este supuesto AB (fig. 1.ª) la traza de la linea de agua primitiva, y que esta linea, para hacer la figura más sencilla, el buque se ha inclinado, debido, por ejemplo, al cambio del centro de carena que estaba en C, vendrá á ocupar otra posición C', y para otro cambio $A''B''$ de la linea AB se tendrá otra nueva posición C''. El lugar de los puntos $CC'C''$..... es la curva de los centros de carena.

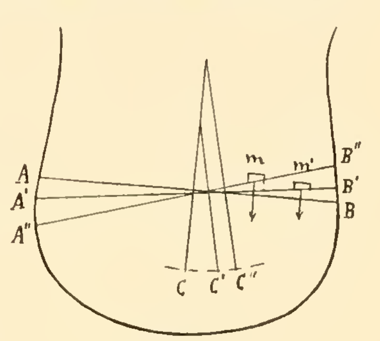


Figura 1.ª

—Si el navío suponemos que se mueve alrededor de un eje perpendicular al longitudinal, en virtud de la perfecta simetría del buque con relación á este plano, el centro de carena está comprendido en él, así como toda la curva, lugar de dichos centros.

Propiedades.—Al cambiar la linea de agua AB en la $A'B'$, el centro de carena que estaba en C viene á C', punto que está más próximo de AB; y al cambiar en la línea $A''B''$, viene el centro de carena á C'', punto más próximo de $A'B'$, y como al mismo tiempo que C, está más próximo de $A'B'$ que no C', el centro de gravedad se aproxima á $A'B'$, resulta que se puede aplicar á todos los puntos de la curva descrita por los centros de carena, que cada punto de esta curva es el más alejado de la línea de agua que le corresponde, y que, por consiguiente, la tangente en el punto considerado es paralela á esta línea de agua.

—Conocidas las tangentes, se trazarán las normales, que por sus intersecciones sucesivas nos darán la curva metacéntrica (ver esta voz), y el punto en que cada normal toque esta curva será el metacentro correspondiente al centro de carena, por el cual se ha trazado esta normal.

—La teoría de esta curva, su determinación y demás circunstancias que á ella se refieren, pueden estudiarse en las obras que se citan en el artículo *metacéntrica*.

Cicloide.

Del griego (κυκλος, *círculo*) ó trocoide (τροχος, rueda).

Definición.—La curva engendrada por un punto del plano de un círculo, cuando éste rueda sin resbalar á lo largo de una recta situada en el mismo plano, y de modo que los elementos consecutivos de su circunferencia vayan coincidiendo sucesivamente con los de la recta.

Clasificación.—El punto generador puede encontrarse sobre la circunferencia del círculo móvil, fuera de ella ó en su interior. En el primer caso, la cicloide engendrada se llama *natural;* en el segundo, *prolongada*, y en el tercero, *reducida*.

Historia.—Esta célebre curva fué en un principio nombrada *trocoide* por Roberval, *roulette* por Pascal, y, por último, se le da hoy el nombre de *cicloide,* nombre con que la denominó Galileo.

Al P. Mersenne, según unos autores, á Torricelli, según otros, se debe el verdadero descubrimiento de esta línea, encontrándose también la opinión de que el primero en señalarla fué Galileo, en 1615.

Roberval, en 1637, determina su área; algunos años más tarde Descartes y Fermat les trazan tangentes, y en 1644 Roberval encuentra (debido á una querella con Torricelli) el volumen de los sólidos engendrados por su revolución, alrededor de su base y de su eje.

Pascal, en 1658, bajo el nombre de A. Dettonville, propone á los matemáticos una serie de problemas que tienen por objeto buscar la cuadratura de varios espacios, la determinación del centro de gravedad de esta línea y la de los volúmenes de sólidos engendrados por la revolución de ciertas de sus partes.

Huyghens, Fermat y Wren resuelven separadamente algunos de estos problemas y envían sus resoluciones, sin pretender con ello al premio ofrecido. Huyghens cuadró un segmento particular; Wren determinó la longitud de un arco cualquiera y su centro de gravedad; Fermat obtuvo el área engendrada por un arco de la curva, lo cual supone que habría encontrado su longitud.

Los dos concurrentes que pretendieron el premio de Pascal fueron Wallis y el P. La Louère; el primero reclama en balde el premio, pues los comisionados para ello no encontraron que hubiera acerta-

do en la solución de los problemas propuestos, y el segundo pretende haber dado solución á los diferentes problemas de Pascal, pero rehusa comunicarlas, excepto una, la sola sin duda que él encontró.

En 1659, Pascal publica sus soluciones en la *Lettre de A. Dettonville á M. de Carvari*, y se ocupa de la cicloide en otros trabajos suyos, tales como *Problemata de cycloide proposita mense junii. Reflexions sur la condition des prix attrachés á la solution des problémes de la cycloide. Annotata in quasdam solutiones problematum de cycloide,* etcétera.

Más tarde, Huyghens demuestra que la evoluta de la cicloide es otra cicloide colocada en sentido contrario; Leibnitz y Juan Bernouilli descubren ciertos espacios cuadrables, y este último hace ver que un arco de cicloide es la curva del más rápido descenso.

Cicloide natural.—Ecuación.—Sea Ox (fig. 1.ª) la recta fija; C el

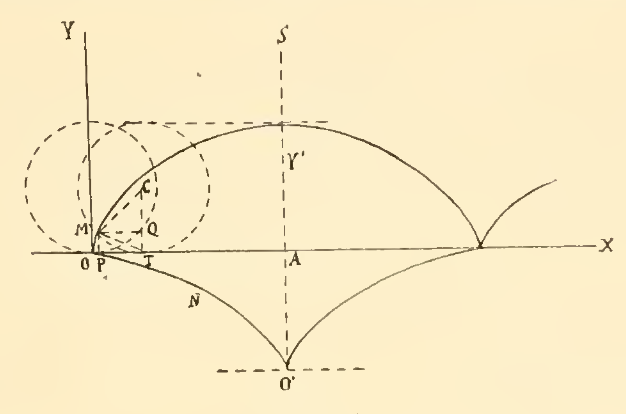


Figura 1.ª

centro del círculo móvil; M el punto descrito, ω el ángulo MCT; $OP = x$ y $MP = y$ las coordenadas del punto M de la curva y el arco $MT = OT$, se tendrá:

$$\left.\begin{aligned} x &= R\omega - R \,.\, \text{sen}\,\omega \\ y &= R(1 - \cos\omega) \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} \cos\omega &= \frac{R-y}{R} \\ \omega &= \text{arc}\left(\cos = \frac{R-y}{R}\right), \end{aligned}$$

y substituyendo

$$x = R\,\text{arc}\,.\left(\cos = \frac{R-y}{R}\right) - \sqrt{2Ry - y^2},$$

expresión que será la ecuación de la cicloide; y su ecuación diferencial será, por consiguiente,

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2R}{y} - 1}.$$

—*Tangente.*—La ecuación de la tangente á esta curva en el punto (x, y) será:

$$Y - y = \sqrt{\frac{2R}{y} - 1}\ (X - x).$$

—*Normal.*—La ecuación de la normal será, por consiguiente,

$$Y - y = -\frac{1}{\sqrt{\frac{2R}{y} - 1}} (X - x).$$

—La longitud de la tangente estará expresada por

$$T = y\sqrt{1 + \frac{1}{y'^2}} = y\sqrt{\frac{2R}{2R - y}},$$

y la de la normal, por

$$N = y\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{2Ry}.$$

Subtangente y subnormal.—La longitud de la subtangente será:

$$S_t = \frac{y}{y'} = \frac{y^2}{\sqrt{2Ry - y^2}},$$

y la de la subnormal

$$S_n = yy' = \sqrt{2Ry - y^2} = R\ .\ \text{sen}\,\omega.$$

Radio de curvatura.—El radio de curvatura se obtendrá substituyendo en el valor de ρ las expresiones

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2R}{y} - 1} \quad \text{y} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{R}{y^2},$$

y se tendrá:

$$\rho = \frac{\left(\frac{2R}{y}\right)^3}{\frac{R^2}{y^4}} = \frac{8R^3y}{R^2},$$

de donde

$$\rho = 2\sqrt{2Ry},$$

y como

$$\sqrt{2Ry} = MT,$$

se deduce que el radio de curvatura es doble de MT, y puesto que esta recta es la normal á la curva en el punto M, se tendrá el centro de curvatura prolongándola y tomando sobre su prolongación, á partir de T, una longitud igual á MT.

Evoluta.—Las coordenadas del centro de curvatura son, en consecuencia,

$$y = -MP \quad \text{y} \quad x = OP + 2MQ = OT + MQ,$$

de donde

$$x = R \,.\, \text{arc}\left(\cos = \frac{R+y}{R}\right) + \sqrt{-2Ry - y^2}$$

y si se transporta el origen al punto O', cuyas coordenadas son:

$$x = \pi R \quad \text{y} \quad y = -2R$$

$$x + \pi R = R \,.\, \text{arc}\left(\cos = \frac{y+R}{R}\right) + \sqrt{2Ry - y^2}$$

ó, por último,

$$x = R \,.\, \text{arc}\left(\cos = \frac{R-y}{R}\right) + \sqrt{2Ry - y^2}.$$

Así, pues, la evoluta de la cicloide es otra cicloide igual ONO', cuyo vértice está en el origen de la primera. Recíprocamente, la primera es la evolvente de la segunda.

Longitud de un arco.—Se obtendrá por la integral

$$\int^{y} dy\sqrt{1+\frac{2R-y}{y}} = \sqrt{2R}\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{y}};$$

ahora bien, como $\frac{dy}{\sqrt{y}}$ es la diferencial de $2\sqrt{y}$, resulta para la medida del arco,

$$SM = S = 2\sqrt{2Ry},$$

fórmula cuya interpretación geométrica es muy sencilla.

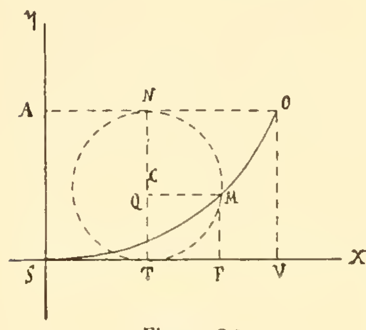


Figura 2.ª

Sea TMN el círculo generador, y M el punto de la curva (figura 2.ª) MT, la tangente será

$$MT = \sqrt{TN \times TQ} = \sqrt{2Ry};$$

por tanto, un arco de cicloide contado á partir del vértice, es doble de la porción de la tangente en su extremo que está comprendida entre este extremo y la tangente al vértice.

Semilongitud de la cicloide.— Bastará hacer $y = 2R$ en la fórmula

$$S = 2\sqrt{2Ry},$$

lo que nos da

$$\frac{S}{2} = 4R \quad \text{ó} \quad S = 8R,$$

y el arco entero sería, por consiguiente, igual á cuatro veces el diámetro del círculo generador.

Area del segmento.—Sea el segmento SMP, el cual estará dado por la fórmula

$$SMP = \int_0^y y\,dx = \int_0^y dy\sqrt{2Ry - y^2};$$

pero el área del segmento TMQ del círculo generador está representado exactamente por la misma integral, por tanto,

$$SMP = TMQ,$$

y la expresión analítica de este segmento es

$$A = \frac{1}{2} R^2 \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{R-y}{R}\right) - \frac{1}{2}(R-y)\sqrt{2Ry - y^2};$$

por tanto, vendrá á resultar que el área de la semicicloide ASO es $\frac{3}{2}\pi R^2$, y el de la cicloide entera

$$3\pi R^2.$$

Centro de gravedad del arco SM.—Su abscisa x_1 se determinará por la ecuación

$$sx_1 \int_0^y xds = \sqrt{2R}\int_0^y x\frac{dx}{dy},$$

é integrando

$$sx_1 = 2\sqrt{2R}\left[x\sqrt{y} + \frac{2}{3}(2R-y)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}2R\sqrt{2R}\right];$$

y para determinar y_1,

$$sy_1 = \int_0^y yds = \frac{2}{3}\sqrt{2R}\, y^{\frac{3}{2}}.$$

Centro de gravedad del semiarco SO.—Se tendrá para los valores de las ordenadas del punto

$$x_1 = \pi - \frac{4}{3}R \quad \text{y} \quad y_1 = \frac{2}{3}R$$

sin más que hacer en las fórmulas anteriores

$$S = 4R, \quad y = 2R \quad \text{y} \quad x = \pi R.$$

Areas. — El área de la superficie engendrada por el arco SM, girando alrededor de la tangente al vértice Sx, se obtendrá multiplicando el arco s por la circunferencia descrita por su centro de gravedad, es decir, por $2\pi y_1$, y se tendrá para el área buscada

$$\omega = \frac{4}{3}\pi y\sqrt{2Ry},$$

y para el área engendrada por el semiarco SP,

$$\Omega = \frac{16}{3}\pi r^2.$$

Centro de gravedad del segmento SMP. — Se tendrá para valor de sus ordenadas:

$$Ax_1 = \int_0^y xydy = \frac{R^2y}{2} + \frac{3}{4}Ry^2 - \frac{y^3}{3} +$$

$$+ \frac{R(y-R)\sqrt{2Ry-y^2}}{2}\operatorname{arc}\left(\cos = \frac{R-y}{R}\right) +$$

$$+ \frac{R^2}{4}\operatorname{arc}^2\left(\cos = \frac{R-y}{R}\right),$$

$$Ay_1 = \frac{1}{2}\int_0^y y^2dx = -\frac{1}{6}(2Ry-y^2)^{\frac{3}{2}} +$$

$$+ \frac{1}{4}R(y-R)\sqrt{2Ry-y^2} + \frac{1}{4}R^3\operatorname{arc}\left(\cos = \frac{R-y}{R}\right).$$

Centro de gravedad de la semicicloide ASO. — Se hará en las fórmulas anteriores

$$A = \frac{3}{2}\pi R^2 \quad \text{y} \quad y = 2R,$$

que nos dará para valor de sus coordenadas

$$x_1 = R\left(\frac{8}{9\pi} - \frac{\pi}{6}\right); \quad y_1 = \frac{2}{3}R.$$

Volumen.—El volumen engendrado por el segmento SMP, girando alrededor de Sx, estará representado por $2\pi A y_1$, y si se quiere aplicar al segmento SOV, se tendrá:

$$2\pi \frac{3}{2} \pi R^2 \frac{2}{3} R \quad \text{ó} \quad 2\pi^2 R^3.$$

Cicloide reducida.—*Ecuación.*—Sea R el radio del círculo (fig. 3.ª), G el punto interior que engendra la cicloide y a la distancia de este punto al centro C. El eje de las x será la recta sobre que gira la

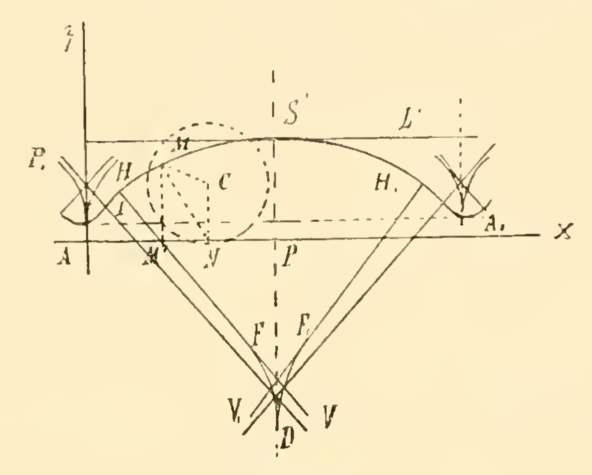


Figura 3.ª

circunferencia, y por eje de las y la perpendicular á esta recta por la posición A del punto G, que está á la distancia mínimum $R - a$.

Si el ángulo MCN se hace igual á φ se tendrá:

$$x = R\varphi - a \,.\, \text{sen}\varphi; \quad y = R - a \,.\, \cos \,.\, \varphi.$$

Tangente.

$$D_\varphi x = R - a \cos\varphi \qquad D_\varphi y = a \,.\, \text{sen}\varphi,$$

y llamando y' la derivada $D_\varphi y$, y siendo $R = an$;

$$y' = \frac{\text{sen}\,\varphi}{n - \cos\varphi},$$

de donde

$$D_\varphi y' = \frac{n \,.\, \cos\varphi - 1}{(n - \cos \,.\, \varphi)^2}.$$

Normal.—La normal en M pasa por el punto de contacto del círculo y del eje de las x, para cuya abscisa es

$$x + yy' = R\varphi,$$

propiedad que conduce á la ecuación diferencial

$$dx = \pm \frac{ydy}{\sqrt{a^2 - (R - y)^2}},$$

é integrando

$$x = R \,.\, \text{arc}\left(\cos = \frac{R - y}{a}\right) \mp \sqrt{a^2 - (R - y)^2}.$$

Radio de curvatura.— Su valor es:

$$\rho = \pm \frac{R}{n} \frac{(1 + n^2 - 2n \,.\, \cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}{n \,.\, \cos\varphi - 1}.$$

Arco.— El arco $AM = s$ es dado por

$$ds = a\sqrt{1 + n^2 - 2n \,.\, \cos\varphi \,.\, d\varphi}\,.$$

haciendo $\varphi = \pi - 2\psi$, é integrando

$$s = 2a\,(1 + n)\,\left[E\left(\frac{2\sqrt{n}}{1 + n}\right) - E\left(\frac{2\sqrt{n}}{1 + n}, \psi\right)\right]$$

y arco

$$AS = 2a\,(1 + n)\,E\left(\frac{2\sqrt{n}}{1 + n}\right).$$

Area.—El área de $OASA_1O_1$ tiene por medida

$$2\pi a^2\left(n^2 + \frac{1}{2}\right) = 2\pi R^2 + \pi a^2$$

y el segmento

$$OAMM' = A = a^2\left[\left(n^2 + \frac{1}{2}\right)\varphi - 2n\,.\,\mathrm{sen}\,\varphi + \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,.\,2\varphi\right].$$

Cicloide alargada. — El punto G está ahora fuera de la circunferencia (fig. 4.ª) generadora, de modo que $n < 1$. —Todas las ecuaciones anteriores, que no suponen sea $n > 1$, se aplican á este caso.

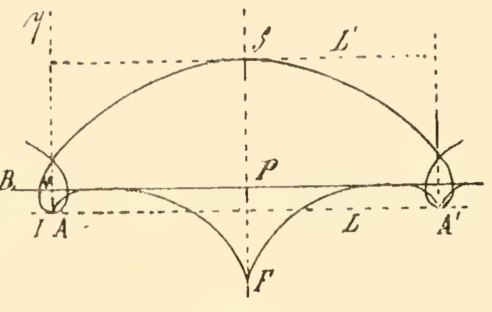


Figura 4.ª

Propiedades. — Además de las propiedades de que nos hemos ocupado, referentes á la cicloide, goza de otras mecánicas; así, en el vacío, ella es *tautócrona* (ver esta voz), y también esta curva es *braquistócrona.* (Ver esta voz, así como los Tratados de Mecánica, tales, por ejemplo, los de Poisson, Duhamel, Sturm, Laurent, Resal, etc.)

Trazado. — *Cicloide natural.* — Sea O el círculo móvil (fig. 5.ª), m el punto generador, situado en su circunferencia y mn la recta fija. Al rodar el círculo sobre la recta, todos los elementos de la circunferencia del primero se irán ajustando sucesivamente sobre porciones iguales de la segunda, y de aquí que la construcción de la cicloide se puede verificar del modo siguiente. Se divide la circunferencia y su rectificación, tomada sobre la recta fija, en igual número de partes iguales, y se traza por el centro O de la primera, una recta oh, paralela á mn. (*Geometría Descriptiva*, Elizalde, pág. 148). Las perpendiculares en los puntos 1', 2', 3'.... cortarán á oh en o_1, o_2, o_3..., que serán las posiciones del centro del círculo móvil cuando sea tangente á la recta fija en los 1', 2', 3'.... Descritas las circunferencias á que estos centros corresponden, bastará llevar sobre la de centro o_1, desde 1' hasta a, una de las partes en que se ha dividido la primitiva; dos de las indicadas divisiones sobre la circunferencia tangente en el punto 2', tres sobre la siguiente, y así sucesivamente, con lo cual se obtendrán los diversos puntos a, b, c de la cicloide.

Cicloide prolongada. — Una vez trazada la natural, se trazarán los radios que pasan por sus diferentes puntos, en cada uno de los círcu-

los que han servido para obtenerlos, y bastará tomar en las prolongaciones de estos radios las partes aa_1, bb_1, cc_1, dd_1, etc., iguales á $m\,m_1$, para obtener los puntos m_1, a_1, b_1, c_1, d_1, que unidos entre sí nos dan esta linea.

Cicloide reducida. — Se obtiene de una manera análoga á la ante-

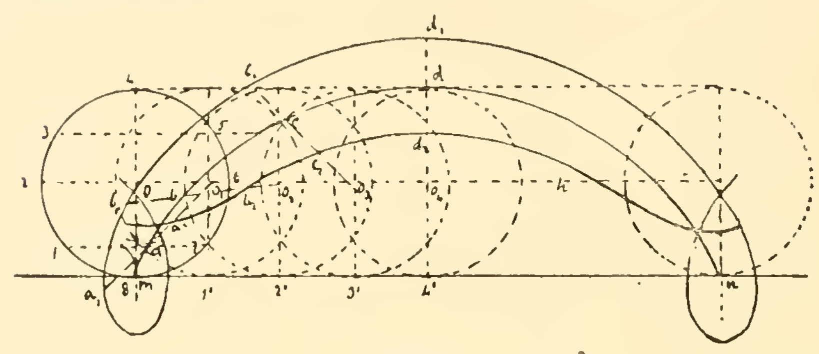


Figura 5.ª

rior, con sólo la modificación que es consiguiente, por el sentido en que debe llevarse la magnitud mm_2. Uniendo los puntos que así se obtengan, se tendrá la línea $m_2\, a_2\, b_2 ...\, n_2$, que será la buscada.

Aplicaciones. — Tanto por su importancia en Geometría, como la que hemos indicado tiene en la Mecánica, esta curva es de grandes aplicaciones, en estas partes de las ciencias matemáticas.

En construcción se emplea también el arco de cicloide, para directriz de bóvedas rebajadas y peraltadas; para el primer caso se hace uso del arco simple, y para el segundo se compone la directriz, de dos partes de arcos cambiados de posición; en el primer supuesto, la relación de la luz á la montea es como 22 : 7 y en el segundo, como 14 : 11.

—La cicloide *cilíndrica*, *cónica*, *esférica*, etc., han sido estudiadas por Böhme.

—Las cicloides *alargada* y *reducida* de Fermat tienen por ecuación:

$$x = a\,(n - \text{sen}\,.\,\omega)$$
$$y = b\,(1 - \cos\,.\,\omega).$$

—La *geométrica* de Ozanam tiene por ecuación

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 2ax^2y + ay^3 - a^2x^2 = 0,$$

la cual es una cardioidea.

Cicloimbra.

Definición. — La curva de doble curvatura, intersección de dos cañones que forman luneto en ángulo recto.

Historia. — Este nombre ha sido dado por Frezier: *Theorie et pratique de la coupe des pierres et du bois* (Strasbourg, 1738.)

Construcción. — Supongamos una galería horizontal, cuya directriz sea (fig. 1.ª) $abc - a'b'c'$, situada en un plano perpendicular á

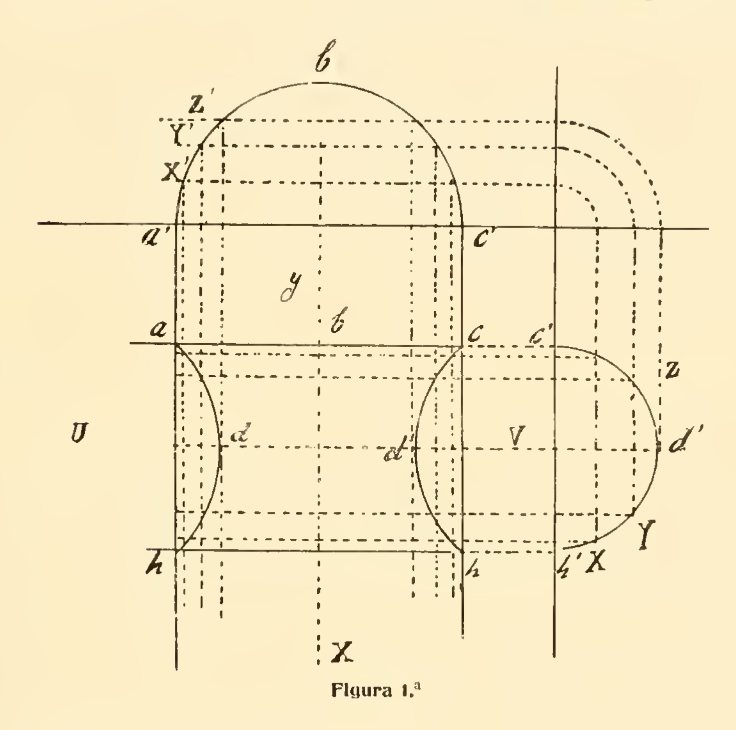


Figura 1.ª

las generatrices de la superficie cilíndrica, y que á ella se da ingreso por otra también cilíndrica y horizontal, cuya directriz es la curva $cdh - c'd'h'$, cuyo plano es perpendicular á las generatrices, siendo, además, perpendiculares entre sí, los dos planos de las directrices, los cuales se tomarán para verticales de proyección.

Cortando las superficies por planos horizontales X', Y'..., se obtendrán diferentes generatrices en ambas superficies cilíndricas, las cuales, por su intersección, según se marca en la figura, nos determinarán la curva cdh y la adh, que serán las proyecciones horizontales de las curvas buscadas.

— Si las directrices de ambas galerías fueran circulares, las curvas *cdh* y *adh* sería una hipérbola, cuyos ejes se encontrarían sobre las rectas *yx* y *uv*, ejes de los dos cilindros propuestos.

Cimacio.

Del latín *cymatium*.

Definición. — Curva sinuosa en forma de S, compuesta de dos porciones de círculo, cóncava arriba, y convexa abajo. Se la conoce, en general, con el nombre de *gola recta*. (Ver *gola*.)

Historia. — Vitruvio (lib. IV, cap. III) nombra al caveto de la cornisa dórica, *cimasio dórico*, y Castañeda, *Comp. de Vitruvio* (libro I, cap. IV) le menciona al determinar las proporciones de dicha cornisa. Bails, considera dos clases de cimacios, el *inferior*, y el *superior;* llama cimacio inferior, cuando viene á ser la primera moldura de un miembro por su parte inferior, y cimacio superior, cuando remata una cornisa ú otro cuerpo.

Trazado. — Siendo una gola recta; véase en la voz *gola*, el trazado de esta curva.

Círculo.

Del latín *circulus*.

Definición.— El círculo, propiamente hablando, es la porción de plano cerrado por una curva, en que todos sus puntos están distantes igualmente de un mismo punto interior llamado *centro*, y esta curva es la *circunferencia de círculo;* pero del mismo modo que no se distingue entre la elipse y su circunferencia, se confunde tambien en el lenguaje, el círculo y su circunferencia. Así se dice un *arco de círculo*, debiendo decir un *arco de circunferencia de círculo.*

Historia.— Esta curva es conocida desde los principios del estudio de la Geometría, cuyo origen se remonta al origen de las sociedades, si bien Thales y Pythágoras, son los que empiezan la consideración abstracta de las verdades geométricas, sentando los principios de esta ciencia.

Los antiguos geómetras dan el nombre de *Construcciones geométricas,* aquellas que ejecutan con sólo la recta y el círculo, y los problemas famosos en la antigüedad, tales como la *cuadratura del círculo*, *duplicación del cubo*, *trisección del ángulo*, etc., trataron de resolverlos sólo por la línea recta y el círculo, haciendo su solución imposible con estos elementos y adquiriendo, por este concepto, gran importancia, siendo así que, para ser tratados cual á la ciencia corres-

ponde, son necesarios conocimientos geométricos de un orden superior.

Ecuación.—La ecuación del círculo en coordenadas rectangulares; si C (fig. 1) es el centro, cuyas coordenadas son x_0, y_0, θ el ángulo de los ejes, y M (x, y) un punto cualquiera; será

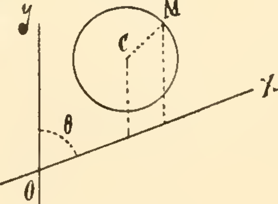


Figura 1.ª

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + 2(x - x_0)(y - y_0)\cos\theta - R^2 = U,$$

y se ve que se tendrá $U > 0$ ó $U < 0$, según que el punto (x, y) está situado en el interior ó en el exterior del círculo propuesto. Cuando el punto esté sobre la circunferencia, será $U = 0$.

—La ecuación de segundo grado

$$Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + 2By + 2B'x + A'' = 0,$$

identificada con la $U = 0$ nos da

$$A = A' = \frac{B''}{\cos\theta}.$$

Así, pues, para que una ecuación de segundo grado represente un círculo, es necesario: 1.°, que los términos en x^2 é y^2 tengan sus coeficientes iguales y de diferente signo, y 2.°, la relación de los coeficientes de los términos en xy, y en x^2, sea igual al doble del coseno del ángulo de los ejes.

—Si el centro está en el origen, permaneciendo los ejes oblicuos, la ecuación del círculo será

$$x^2 + 2xy \,.\, \cos\theta + y^2 - R^2 = 0.$$

—Si el centro está en el origen y los ejes son rectangulares,

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

—Si el eje de las x es un diámetro y el eje de las y la tangente en uno de sus extremos:

$$(x \mp R)^2 + y^2 - R^2 = 0 \quad \text{ó} \quad x^2 + y^2 \mp 2Rx = 0.$$

—Si el eje de las y es un diámetro y el eje de las x la tangente en uno de sus extremos:

$$x^2 + (y \mp R)^2 - R^2 = 0 \quad \text{ó} \quad x^2 + y^2 \mp 2Ry = 0.$$

—La ecuación de esta curva en coordenadas polares será, si se toma un punto cualquiera O (fig. 2) por polo, y la recta OC que pasa por el centro del círculo, por eje polar, siendo M (ρ, ω) un punto de la circunferencia, y d la distancia OC,

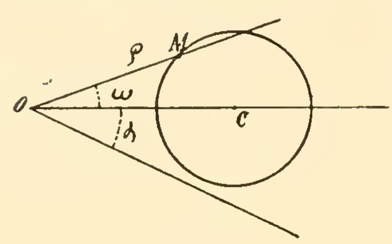


Figura 2.ª

$$\rho^2 - 2d\rho \,.\, \cos\omega + d^2 - r^2 = 0.$$

—Si el eje polar es una recta cualquiera OX que no pase por el centro y si el ángulo, $COX = \alpha$ será

$$\rho^2 - 2d\rho \cos(\omega - \alpha) + d^2 - r^2 = 0.$$

—Si el origen está en un punto de la curva, $d = r$ y la ecuación será en este caso,

$$\rho - 2r \cos\omega = 0.$$

—En coordenadas axiales, si la circunferencia es tangente al eje, siendo (λ, θ) las cordenadas de un punto, y a la distancia del punto de tangencia al polo

$$\lambda = a + R \,.\, \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}.$$

—En coordenadas triangulares, siendo A, B, C estas coordenadas para el centro de un circulo de radio R, referida á un triángulo $\alpha\beta\gamma$ y M (A, B, C) un punto variable sobre esta línea

$$A^2 \operatorname{sen} 2\alpha + B^2 \operatorname{sen} 2\beta + C^2 \operatorname{sen} 2\gamma -$$
$$- (A \,.\, \operatorname{sen}\alpha + B \operatorname{sen}\beta + C \,.\, \operatorname{sen}\gamma)(lA + mB + nC) = 0,$$

siendo l, m, n funciones de las coordenadas del centro y del radio,

quedando un círculo completamente determinado, si se conocen los valores de estos parámetros.

—En coordenadas tangenciales, siendo $nx + vy + 1 = 0$ la ecuación de una recta móvil, y $an + bv + 1 = 0$ la ecuación del centro, la ecuación del círculo para las coordenadas n y v será:

$$(an + bv + 1)^2 - r^2(n^2 + v^2) = 0.$$

Propiedades.— Forma y teoremas sobre el círculo.— La propiedad capital de la circunferencia de *círculo* es la de que todas sus partes son iguales entre sí. La recta, el *círculo* y la hélice son las únicas líneas que gozan de esta propiedad; la recta es la prolongación de un elemento simple de curva, la circunferencia de círculo es la prolongación uniforme de un par de dos elementos consecutivos de una curva plana, y la hélice es la prolongación regular de un par de dos elementos consecutivos de una curva de doble curvatura.

—Considerando la ecuación

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

se deduce que á cada valor de x corresponden dos de y iguales y de signo contrario é inversamente, y, por tanto, que los ejes XX' é YY' (fig. 3.ª) dividen al círculo y á su circunferencia en dos partes iguales, y que el radio OA perpendicular á la cuerda MM' divide esta cuerda y el arco que ella subtiende, en dos partes iguales.

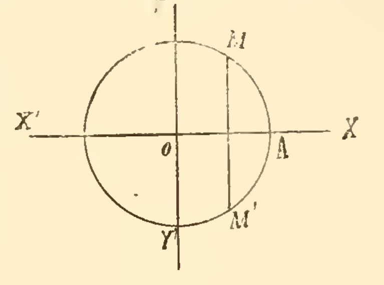


Figura 3.ª

—La ordenada perpendicular á un diámetro es medio proporcional entre los segmentos del diámetro.

—La cuerda que parte desde un extremo de un diámetro es media proporcional entre el diámetro y el segmento adyacente.

—Un ángulo inscrito en un semicírculo es recto.

—Todos los ángulos inscritos en un mismo segmento son iguales.

—Si desde un punto tomado en el plano de un círculo se le dirige una secante cualquiera, el producto de los segmentos determinados sobre esta secante por el punto y el círculo es constante. Esta cantidad recibe el nombre de *potencia del punto P con relación al círculo C*, y para obtenerla basta reemplazar en el primer miembro de

la ecuación del círculo las coordenadas usuales por las del punto considerado. (Steiner.)

—Si por un punto del plano se dirigen dos secantes perpendiculares, la suma de los cuadrados de las distancias de este punto á los cuatro de intersección de la secante y del círculo es constante.

—*Tangente.*—La ecuación de la tangente en un punto $M(x', y')$ es, estando el círculo representado por la ecuación, $x^2 + y^2 = R^2$

$$y - y' = -\frac{x'}{y'}(x - x') \quad \text{ó} \quad yy' + xx' = R^2,$$

si el círculo está dado por la ecuación

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2,$$

la de su tangente será:

$$(x - a)(x' - a) + (y - b)(y' - b) = R^2.$$

—Para ecuación de la tangente que pasa por un punto dado $M(x', y)$ fuera del círculo, representado por la ecuación $x^2 + y^2 = R^2$, y siendo (x'', y'') las coordenadas del punto de contacto, se tendrá:

$$x'' = \frac{R^2 x' \pm Ry'\sqrt{x'^2 + y'^2 - R^2}}{x'^2 + y'^2},$$

$$y'' = \frac{R^2 y' \mp Rx'\sqrt{x'^2 + y'^2 - R^2}}{x'^2 + y'^2}.$$

—La ecuación de la tangente á un círculo $x^2 + y^2 = R^2$, trazada por un punto (x', y'), es:

$$(xx' + yy' - R^2)^2 - (x'^2 + y'^2 - R^2)(x^2 + y^2 - R^2) = 0;$$

y si el círculo es dado por la ecuación $(x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0$

$$\left[(x - a)(x' - a) + (y - b)(y' - b) - R^2\right]^2 -$$

$$- \left[(x' - a)^2 + (y' - b)^2 - R^2\right]\left[(x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2\right] = 0.$$

—La ecuación de la tangente paralela á una dirección dada, siendo $y = mx$ la ecuación de la recta, á la cual la tangente debe ser paralela, será:

$$y = mx \pm R\sqrt{1 + m^2}.$$

—La tangente en un punto es perpendicular al radio del círculo del punto de tangencia.

—Si por un punto fijo se trazan dos cuerdas perpendiculares, las tangentes en los extremos de estas cuerdas forman un cuadrilátero que está inscrito en otro círculo fijo.

—Si dos tangentes á un círculo son fijas, y se trazan otras tangentes, las partes comprendidas entre las tangentes fijas, se verán desde el centro, según dos ángulos iguales ó suplementarios el uno del otro.

—En un cuadrilátero circunscrito á un círculo, las diagonales y las rectas que reunen los puntos de contacto de los lados opuestos se cortan en un mismo punto, y los puntos medios de las diagonales y el centro del circulo están en línea recta.

—Si por los diferentes puntos de una recta se trazan dos tangentes á un círculo, el producto de las tangentes trigonométricas de los semiángulos que forman con la recta es constante.

—Si por un punto de un diámetro de un círculo se traza una cuerda cualquiera, y las rectas que unen los extremos de esta cuerda con uno de los del diámetro; determinan en la tangente al círculo en el otro extremo del mismo diámetro, dos segmentos, cuyo rectángulo es constante.

Normal.—La ecuación de la normal en el punto $(x'\,y')$, siendo la del circulo $x^2 + y^2 = R^2$, será

$$y - y' = \frac{y'}{x'}(x - x') \quad \text{ó} \quad yx' - y'x = 0.$$

Si el círculo es:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0,$$

será:

$$(x - a)(y' - b) - (y - b)(x' - a) = 0.$$

—La normal es una recta que pasa por el centro del círculo y se confunde con el radio.

Eje radical.—La cuerda común á dos círculos que se cortan efec-

tivamente, es el lugar de los puntos de su plano, tales que las tangentes dirigidas por uno de ellos á los dos círculos son iguales. En efecto: el primer miembro de la ecuación referida á ejes rectangulares

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0$$

es la expresión del cuadrado de la longitud de la tangente dirigida á este círculo desde un punto (x, y) del plano; la ecuación á cero de la diferencia

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 - (x - a')^2 + (y - b')^2 + R'^2$$

de los primeros miembros de las ecuaciones de dos círculos, expresa que las tangentes dirigidas desde el punto xy á estos dos círculos, son iguales. Ahora bien; esta ecuación es la del lugar que pasa por los puntos comunes á los dos círculos, y como es de primer grado, es, por tanto, la ecuación de la cuerda común. La recta que ella representa se llama *eje radical* (Gaultier, de Tours) ó *cuerda ideal* (Poncelet) de dos círculos, y también cordal ó línea de potencia.

—Se puede ver. Plüker, *Analytisch geometrische Entwicklungen*—Steiner—*Journal de Crelle*, T. 1; Gaultier *Journal de l'Ecole Polytechnique* (Cahier XVI).

—Las cuerdas ideales de tres círculos tomados dos á dos, se cortan en un mismo punto. Este punto se llama *centro radical* de los tres círculos.

—Dos circunferencias tienen sólo dos puntos comunes á distancia finita, situados, como hemos dicho, sobre el eje radical. En ciertas especulaciones geométricas, se precisa considerar que todos los círculos de un plano pasan, *de una manera imaginaria,* por dos puntos fijos de este plano, situados en el infinito, los cuales reciben el nombre de *umbílicos* del plano, denominación debida á Laguerre. También se les da el nombre de *puntos singulares en el infinito sobre el plano* y *puntos cíclicos del plano.* (Nouv. Ann. de Mathe, 1859, página 57.)

—Los puntos de igual potencia con relación á dos círculos, están situados sobre el eje radical de estos círculos.

—La ecuación del eje radical de dos círculos se obtiene, restando como antes hemos visto, miembro á miembro, sus ecuaciones.

—Cuando dos círculos se cortan, la línea de los centros es perpendicular en su punto medio al eje radical.

—Dados dos círculos, si desde un punto de uno de ellos se traza una tangente al otro y una perpendicular á su eje radical, el cuadrado de la tangente está con la longitud de la perpendicular en una relación constante.

— Cuando tres círculos tienen el mismo eje radical, si desde un punto se les trazan las tangentes, las tres cuerdas de contacto concurren en un mismo punto, y desde cada punto de una de ellas, se ven los otros dos, según dos ángulos, cuyas mitades tienen sus tangentes trigonométricas en una relación constante.

Puntos límites.—Si consideramos una serie de círculos que tengan el mismo eje radical, tomando esta recta por eje de las y, y la línea que describe su centro por eje de las x, la ecuación de estos círculos será :

$$x^2 + y^2 - 2ax + \alpha = 0,$$

siendo α una constante y a un parámetro variable.

La ecuación anterior puede ponerse bajo la forma

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2 - \alpha;$$

así, pues, entre los círculos de la serie existirán dos que se reducen á dos puntos L y L' (fig. 4.ª). Estos círculos particulares corresponden á los valores siguientes del parámetro a:

$$a = \pm \sqrt{\alpha}.$$

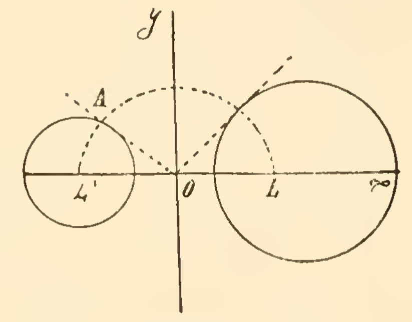


Figura 4.ª

Los dos puntos L y L' han sido denominados por Poncelet *puntos límites* y están situados sobre la línea de los centros y simétricos con relación al eje radical común.

—La potencia del origen O con relación á todos los círculos, es constante é igual á α; se obtendrán, pues, los puntos límites, dirigiendo desde el punto O una tangente, OA, á uno de los círculos, y tomando sobre el eje de las x, $OL = OL' = OA$.

Polo y polar.—Dado un círculo O (fig. 5.ª) y un punto fijo P, si por este punto se dirige una secante cualquiera, PAB, el punto M conjugado armónico de P con relación á los dos puntos A y B, describe una línea recta, que se llama la *polar* del punto P con relación

al círculo, y P es el *polo* de la recta CD con relación al círculo O.

—La polar CD es perpendicular al diámetro OP que pasa por P.

—El radio de un círculo es medio proporcional entre las distancias de su centro á un punto cualquiera del plano y á la polar de este punto, con relación al círculo.

—La polar de los diferentes puntos de una misma línea recta, pasan por un punto fijo, que es el polo de la recta considerada, y los polos de diferentes rectas que pasan por un mismo punto, están situados sobre una recta que es la polar del punto.

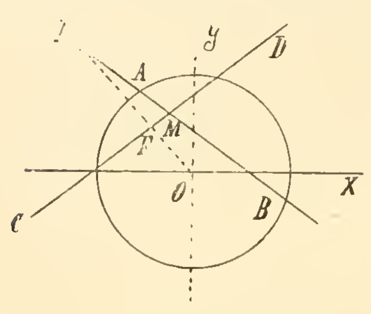


Figura 5.ª

—Las polares de un punto cualquiera del eje radical de dos círculos, se cortan sobre este eje.

—Las polares de un punto P_o, con relación á diferentes círculos que tienen el mismo eje radical, pasan por un punto fijo P_1, y recíprocamente las polares del punto P_1 pasan por el punto P_o. Además, la recta $P_o P_1$ es tangente en los puntos P_o y P_1 á dos círculos del haz, y el círculo descrito sobre $P_o P_1$ como diámetro, pasa por los puntos límites.

—Si un punto cualquiera del círculo se une á otros cuatro, tomados sobre esta línea, se obtiene un haz, cuya relación anarmónica es constante.

—Una tangente móvil encuentra á otras cuatro fijas en cuatro puntos, cuya relación anarmónica es constante.

—Si un cuadrilátero está inscrito á un círculo, toda transversal encuentra á dos pares de lados opuestos y al círculo en seis puntos en involución.

Centros de semejanza. — El punto de concurso de las tangentes exteriores, comunes á dos círculos, y el de las tangentes interiores, son los *centros directo é inverso de semejanza* de estos dos círculos.

— Estos dos puntos dividen armónicamente la recta que une los centros.

— El eje radical de dos círculos está á igual distancia de las polares de los dos centros de semejanza.

— Los puntos de concurso de las tangentes exteriores dirigidas á tres círculos considerados sucesivamente dos á dos, están en línea recta.

Ecuaciones del círculo que satisface á ciertas condiciones. — La ecuación general en coordenadas rectangulares del círculo que pasa por dos puntos dados $(x'y')$ y $(x''y'')$ será:

$$(x - x')(x - x'') + (y - y')(y - y'') +$$
$$+ \lambda [(y - y')(x'' - x') - (x - x')(y'' - y')] = 0.$$

— La ecuación del círculo que pasa por tres puntos dados (x', y'), $(x'' y'')$ (x''', y''') es

$$\frac{(x - x')(x - x'') + (y - y')(y - y'')}{(x''' - x')(x''' - x'') + (y''' - y')(y''' - y'')} =$$
$$= \frac{(y - y')(x'' - x') - (x - x')(y'' - y')}{(y''' - y')(x'' - x') - (x''' - x')(y'' - y')}.$$

— La ecuación de condición á que deben satisfacer las coordenadas (x', y'), (x'', y''), (x''', y''') y (x^{IV}, y^{IV}) de cuatro puntos, para que estén situados sobre un círculo, es:

$$\frac{(x^{IV} - x')(x^{IV} - x'') + (y''' - y')(y^{IV} - y'')}{(x''' - x')(x''' - x'') + (y''' - y')(y''' - y'')} =$$
$$= \frac{(y^{IV} - y')(x'' - x') - (x^{IV} - x')(y'' - y')}{(y''' - y')(x'' - x') - (x''' - x')(y'' - y')}.$$

— La ecuación de un círculo descrito sobre una recta dada como diametro, será, si (x', y'), (x'', y'') son las coordenadas de los extremos de la recta dada

$$(x - x')(x - x'') + (y - y')(y - y'') = 0.$$

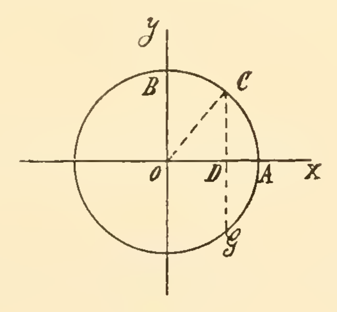


Figura 6.ª

Rectificación. — La longitud de un arco que parte del punto B (OR) (fig. 6.ª) y termina en $C(x', y')$ estará dado por la expresión

$$S = \int_0^{x'} dx \sqrt{1 + \frac{x'^2}{y'^2}} = \int_0^{x} dx' \frac{R}{y'} = R . \text{arc . sen} \frac{x'}{R}.$$

— Para la longitud del cuadrante AB se hará $x' = R$ y será

$$AB = R . \text{arc . sen . 1} \quad \text{ó} \quad AB = \frac{\pi}{2} R.$$

Por consecuencia, la longitud de la circunferencia entera será $2\pi R$.

Cuadratura. — Para valuar el área $BCDO$ se tendrá la fórmula

$$a = \int_0^{x'} \sqrt{R^2 - x^2} . dx,$$

de donde

$$= a \frac{x'}{2} \sqrt{R^2 - x'^2} + \frac{R^2}{2} \text{arc . sen} . \frac{x'}{R}.$$

— Para el área del cuadrante OAB se hace $x' = R$ y se tendrá

$$\text{Cuadrante circular} = \frac{R^2}{2} \text{arc . sen . 1} = \frac{\pi R^2}{4},$$

y, por consecuencia, para área de todo el círculo πR^2.

— El área del sector BOC será

$$\frac{R^2}{2} \text{arc . sen} \frac{x'}{R}$$

y la del segmento CAG

$$\frac{\pi R^2}{2} - x' \sqrt{R^2 - x'^2} - R^2 \text{arc . sen} \frac{x'}{R}.$$

Relación de la circunferencia al diámetro.— La relación de la circunferencia al diámetro, ó bien, supuesto el radio igual á uno, el valor de la semicircunferencia es un número constante. Se la representa por la letra π.

—Esta relación es transcendente, y por los medios de que dispone la Geometría Elemental, no se puede obtener sino de una manera

aproximada; considerando á la circunferencia como mayor que todo polígono que le es inscrito y menor que cualquiera que le sea circunscrito. Así, pues, el medio más sencillo de determinar π es el de calcular los perímetros de dos póligonos, uno inscrito y otro circunscrito de gran número de lados, hasta que la diferencia entre ambos nos da el grado de aproximación que queremos obtener.

—Arquímedes, en su obra *Medida del círculo*, fué el primero que se ocupó de la determinación del valor de π, valiéndose de los polígonos inscritos y circunscritos hasta los de 96 lados, encontrando que π está comprendido entre:

$$3\,\frac{10}{71} = 3,14084 \quad \text{y} \quad 3\,\frac{10}{72} = 3,14285,$$

relación que es la de 22 : 7, y que se emplea en aquellos cálculos que no precisa mayor aproximación.

— Endocio, en sus comentarios sobre el libro de Arquímedes, dice, que Apolonio encontró una relación más aproximada de aquél, como asimismo Claudio Ptolomeo; pero observa Eudocio que, sin embargo, el mérito de Arquímedes consiste en que fué el primero en encontrar una relación. La relación de Apolonio no ha llegado á nosotros. La de Ptolomeo es 3,1416666. En su tabla de cuerdas (Almagerta, Libro II), da para valor del arco de 30 minutos $\frac{1}{220}$ $\left(\frac{31}{60} + \frac{25}{60^2}\right)$ del diámetro; reduciendo y multiplicando por 120 se encuentra la relación indicada, porque Ptolomeo divide el diámetro en 120 partes iguales, cada parte en 60 primas y cada prima en 60 segundas, etc.

—Duchesne, en 1584, publicó en Delft una obra titulada *Quadrature du cercle oû Manière du trouver un carrè egal au cercle donné.*

— Ludolph Van Keulen, calculó 20 cifras de π en su obra *Vanden Cirkel..... door Ludolph Van Keulen* (1596). Acompañado de su discípulo P. Cornelitz, da luego el valor de π con 32 decimales, y no con 35 como dice Montucla en su obra *Fundamenta arithmetica et Geometrica in latinum traslatá á Will* (Leyde, 1625).

—Snellius, en su *Cyclometrié*, publicada en 1621, dice, que Ludolph llegó á calcular hasta con 34 decimales. Snellius publicó una traducción latina de la obra de Ludolph bajo el título *De circulo et adscriptis* (1615).

—Viéte, en su memoria *Ad angulares sectionis*, indica los límites

3,1415926535 y 3,1415926537

(*Opera mathemática*, pág. 392, edición Schooten, 1646).

—*Adrien Metius*, geómetra de Franeker, se hizo célebre por descubrir los números 113 : 355, cuyo mayor mérito es la facilidad en retenerla. Así llega á el valor 3,1415929, que no se diferencia del verdadero por exceso, sino en $\frac{3}{10.000.000}$.

—Pell, matemático inglés, publicó en 1647 la obra *De vera circuli mensura*. Lagni, calculó π con 127 cifras (*Memoires de l'Academie de París*, 1719). Faguano, en el mismo año de 1719, descubrió el siguiente valor de π

$$\pi = 8 \lg \left(\frac{1 - \sqrt{-1}}{1 + \sqrt{-1}} \right)^{\frac{1}{2}\sqrt{-1}}$$

siendo sus obras publicadas bajo el título *Produzzioni mathematiche del conte Fagnano*, etc. (Pésaro, 1750, en 4.°, dos volúmenes.)

—Vega, le determina con 140 cifras, y en un manuscrito de la biblioteca de Ratclif, en Oxford, se ha encontrado calculado con 155 decimales. Thibaut, en su Tratado de matemáticas, publicado en 1822, con 156. Mr. Dahse (*Journal de Mr. Crelle*, tomo XXVII, pág. 198), con 200 cifras. En las *Transactions philosophiques*, Mr. Rutherford da el valor de π con 208; los 152 primeros son los mismos calculados por Dahse, pero las 56 cifras restantes diferentes, y Mr. Specht (*Crelle*, tomo III, pág. 83 y pág. 405), señala una construcción aproximada del perímetro y del área del círculo.

—El primero que demostró que π es un número inconmensurable, fué Lambert (*Mem. de l'Academie de Berlin*, 1761.)

—Señalaremos también algunos valores y expresiones obtenidas para el valor π por diferentes geómetras, para hacer más completo este bosquejo histórico. De Leibnitz,

$$\pi = 4 \left\{ 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots\ldots \right\}$$

—Deducida de las funciones *factoriales* de Vandermonde y Kramp,

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{1}{2}^{\frac{1}{2}-1}.$$

— De Juan Bernouilli, por la consideración de los logaritmos de las cantidades llamadas *imaginarias*,

$$\frac{1}{2}\pi = \frac{\lg\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}.$$

— De Mr. Wronski,

$$\frac{1}{2}\pi = \frac{\infty}{\sqrt{-1}}\left\{\left(1+\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{\infty}} - \left(1-\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{\infty}}\right\}$$

(*Introduction á la Phil. des Math.*, pág. 26.)
— De Rivard,

$$\frac{333}{106}.$$

— Otros valores de autor desconocido,

$$\pi = \frac{13\sqrt{146}}{50} = 3{,}141591955,$$

$$\pi = \frac{501+80\sqrt{10}}{240} = 3{,}1415926536.$$

— De Wallis,

$$\frac{1}{2}\pi = \frac{2\,.\,2\,.\,4\,.\,4\,.\,6\,.\,6\,.\,8\,.\,8\,.\,10\,.\,10\,.\,12\,\ldots\ldots}{1\,.\,3\,.\,3\,.\,5\,.\,5\,.\,7\,.\,7\,.\,9\,.\,9\,.\,11\,.\,11\,\ldots\ldots}.$$

— De Brounker,

$$\frac{1}{4}\pi = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cfrac{81}{2+\&.}}}}}}$$

Por último, manifestaremos que Euler se ha ocupado de todas estas expresiones del valor de π; pudiéndose consultar á estos efectos su obra *Introduction á l'analyse des infiniment petits.*

Círculo asintótico.

Definición.—Se dice que un círculo es asintótico á una espiral, cuando esta curva está constituída en parte, por lo menos, por una infinidad de espiras, que dan vuelta alrededor de dicho círculo sin

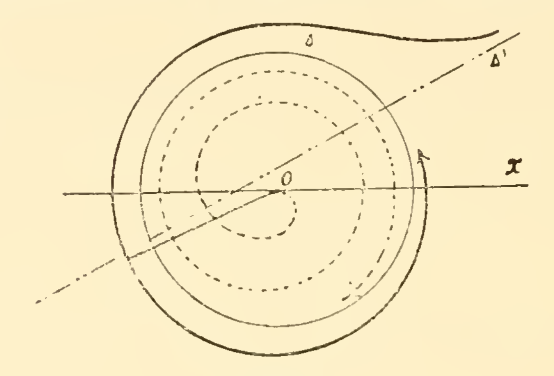


Figura 1.ª

llegar á tocarle, pero aproximándosele en una cantidad que tiende á ser cero.

Ejemplo.—Sea la espiral representada por la ecuación:

$$\rho = \frac{\omega}{3\omega - 1};$$

si se hace variar ω de o á $-\infty$, se tiene una primera parte de la curva formada de un número infinito de espiras interiores al círculo Δ. La curva es, por tanto, asintótica á este círculo, que tiene por centro el origen, y cuyo radio es igual á $\frac{1}{3}$.

La curva se completa por un brazo que parte del origen, situado en el tercer ángulo y asíntota á la recta Δ', que corresponde á la ecuación

$$\frac{1}{\rho} = 9 \operatorname{sen} (\omega - \alpha),$$

siendo α el ángulo en el centro, que en un círculo de radio 1, corresponde á un arco de longitud $\frac{1}{3}$, y por una segunda espiral, que da vuelta exteriormente á Δ, siendo asintótica á este círculo.

La curva tiene la forma representada en la figura.

Círculo conjunto.

Definiciones.—Se llaman *líneas conjuntas* dos rectas tales, que en tomándolas por ejes de coordenadas, los coeficientes de los dos cuadrados en la ecuación de la curva vienen á ser iguales.

—Estas líneas cortan en general á la cónica en cuatro puntos, situados sobre una misma circunferencia de círculo, que se denomina *círculo conjunto.*

Historia. — La denominación especial de *conjunto* dada á este círculo, es debida á Mr. Terquem, pudiéndose consultar sobre estas especies de líneas, entre otros trabajos, una Memoria de Mr. Chasles inserta en el *Journal Liouville* (t. III, pág. 385).

Ecuación y propiedades.—La ecuación de una cónica, tomando por ejes las líneas conjuntas, es

$$A(x^2+y^2)+Bxy+Dy+Cx+F=0.$$

—Todos los círculos conjuntos que corresponden á un mismo punto tienen sus centros colocados sobre una recta que pasa por este punto, perpendicularmente á la polar de este punto, y esta recta es una normal cuando el punto está sobre la cónica.

Círculo de curvatura.

Definición.—El círculo de curvatura á una curva en uno de sus puntos, es aquel en que la curvatura es igual á la de la curva en este punto.

Propiedades.—La curvatura de una curva en uno de sus puntos, es el límite del cociente del ángulo formado por la tangente á esta curva en el punto considerado con una tangente infinitamente próxima, dividido por la longitud del arco que separa los dos puntos de contacto.

—La curvatura en el círculo, no depende más que de la longitud del

arco á los extremos del cual se dirigen las tangentes, ó en otros términos, el cociente del ángulo de las tangentes dirigidas á los dos extremos de un arco por la longitud de este arco, es constante en un mismo círculo. Por consecuencia, buscar la curvatura de una curva en uno de sus puntos, es buscar el radio del círculo que tiene la misma curvatura que la curva en este punto.

—El coeficiente angular de la tangente á una curva en uno de sus puntos, es la derivada $\frac{dy}{dx}$ de la ordenada de esta curva, con relación á su abscisa en este punto; el coeficiente angular de la tangente infinitamente próxima es $\frac{d^2y}{dx^2}$. Por tanto, la tangente del ángulo de las dos tangentes infinitamente próximas, ó el ángulo mismo de estas dos tangentes, será

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2};$$

el arco comprendido entre los puntos de contacto de las dos tangentes es

$$ds = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2};$$

por consecuencia, el cociente del ángulo de las dos tangentes infinitamente próximas por el arco correspondiente es:

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

El radio del círculo que tiene igual curvatura que la curva en el punto (x, y) estará sujeto á la condición

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

de donde,

$$R = \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

—El círculo de curvatura, se confunde con el círculo osculador (ver esta voz) y con el círculo que pasa por el punto considerado de la curva y cuyo centro fuera el centro de la curvatura de la curva en este punto.

Círculos de declinación.

Definición.—Se da este nombre á círculos máximos de la esfera celeste que pasan por los polos del mundo.

Propiedades y usos.—Estos círculos cortan perpendicularmente al ecuador.

—Se llaman círculos de declinación, porque sirven para medir la declinación (ver esta voz) de los astros.

—Es evidente que estos círculos son como otros tantos meridianos, y efectivamente se les da este nombre, cuando están trazados sobre los globos y mapas terrestres.

—Sirven para referir un astro á un punto del ecuador, tomado por origen á fin de poder determinar su declinación y su ascensión recta. Se pueden imaginar tantos círculos de declinación, como puntos tiene el ecuador.

Círculo de garganta.

Definición.—Se llama *círculo de garganta* de una superficie de revolución, á aquel de los paralelos de dicha superficie que, sin ser nulo, es el menor de todos los demás.

Propiedades.—Esta curva tiene la propiedad, de que en uno cualquiera de sus puntos, la tangente á la meridiana es paralela al eje de la superficie; lo propio que sucede al ecuador.

Círculo de perpetua aparición.

Definición. — Se da este nombre á un pequeño círculo de la esfera

celeste, en el cual se verifica, que todos sus puntos se encuentran á una distancia del polo, igual á la altura de este punto sobre el horizonte.

Propiedades. — Este círculo separa la región de las estrellas circumpolares, de aquella otra en que se encuentran las estrellas que pasan más ó menos tiempo debajo del horizonte.

Círculo de perpetua ocultación.

Definición. — Se da este nombre á un pequeño círculo de la esfera celeste, en el cual se verifica, que todos sus puntos se encuentran á una distancia del polo, igual al suplemento de la altura de este punto sobre el horizonte.

Propiedades. — Las estrellas que están colocadas á una distancia mayor del polo, se encuentran constantemente por debajo del horizonte y son de las llamadas *ocultas ó no visibles.*

— El círculo de perpetua ocultación separa la región del cielo en que se encuentran las estrellas no visibles, de aquellas en que se mueven las que pasan un tiempo más ó menos largo por encima del horizonte.

Círculo de rodadura.

Definición y propiedades. — El método seguido por Euler para la determinación del centro de curvatura de la envolvente de una curva ligada á otra que rueda sobre una curva fija, ha sido perfeccionado por Mr. Trauson. Designando por R y R_1 los radios de curvatura de la curva fija y de la rotativa (Ver *Trocoide*); por p la distancia del punto de contacto de estas dos curvas al punto en que la curva arrastrada toca su envolvente; por i el ángulo de la normal común á la rotativa y á su envolvente, con la normal común á la curva arrastrada y á su envolvente, y por ρ el radio de curvatura de la envolvente; se obtiene, por la teoria de Euler,

$$\rho = \frac{p^2}{p - \frac{R R_1}{R + R_1} \cos . i}$$

Mr. Trauson hace notar que los radios R y R_1, no entran en el valor de ρ, sino por la función

$$\frac{R R_1}{R + R_1};$$

si se hace

$$\frac{R R_1}{R + R_1} = a;$$

de donde

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} = \frac{1}{a}$$

se podrá hacer variar arbitrariamente R y R_1, mientras que $\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}$ permanezca constante, sin que por ello ρ experimente variación; se podrá, por ejemplo, hacer $R = \infty$ y $R_1 = a$, es decir, substituir á la curva fija una recta y á la rotativa un círculo de radio a. Mr. Trauson da á este círculo el nombre de *círculo de rodadura*, y á su centro, el de *centro instantáneo de segundo orden*. Es de este centro instantáneo de segundo orden del que dependen todas las funciones relativas á la curvatura de la envolvente considerada, como todas aquellas que se relacionan á sus tangentes, dependen del centro instantáneo de rotación.

Historia. — Los desarrollos que Mr. Trauson ha dado de esta teoría, y que ofrecen un verdadero interés, han sido publicados bajo el título de *Methode géométrique pour les rayons de courbure*, en el *Journal de Mr. Liouville* (t. X, 1845).

Círculo desvanecido bitangente.

Definición. — Si se escriben las ecuaciones del problema, que consiste en dirigir una tangente á una curva de segundo grado por uno de sus focos, se encuentra que los coeficientes angulares de las dos tangentes son $\pm\sqrt{-1}$. La cuerda de los contactos es, por otra parte, perpendicular al eje focal; por consecuencia, las ecuaciones imaginarias de las dos tangentes representan realmente las tangentes dirigidas desde el foco de la curva á aquella de sus conjugadas, que la toca en los extremos del eje focal, y estas tangentes son perpendiculares la una á la otra. Esta propiedad es muy sencilla y carece de la importancia que han tratado de darla, dando por ello al foco el título de *círculo desvanecido bitangente.* (Plücker.)

Círculo director.

Definición.—Dada una cónica y un punto fijo en su plano, si se quiere obtener una segunda curva tal, que cada punto de la cónica esté igualmente equidistante de la segunda curva y del punto fijo, se llega á una ecuación diferencial de primer orden, y es evidente que una solución particular resuelve el problema. Pues bien; si el punto fijo es un foco, la solución particular es un círculo que ha recibido el nombre de *círculo director.*

Historia.—A Mr. Raabe se debe la denominación de *círculo director*, dada á esta línea por analogía con el que existe en la parábola. —Pueden verse los trabajos de M. E. Lemoine, sobre esta línea, y Blum. (T. II, pág. 60.)

Propiedades.—Si se considera un triángulo ABC inscrito en un círculo, O el centro y H el punto de concurso de las tres alturas, y se construye una cónica que tenga por focos los dos puntos O y H y por eje mayor el radio del círculo O, éste viene á ser el *círculo director* de la cónica.

—Si el triángulo es acutángulo, la cónica es una elipse que se convertirá en el círculo inscrito cuando sea equilátero.

—Si el triángulo es rectángulo, la cónica degenera en una recta que va desde el vértice del ángulo recto al medio de la hipotenusa.

—Si el triángulo es obtusángulo, la cónica es una hipérbola.

—Todo punto de la cónica equidista del centro del círculo director y de la circunferencia de este círculo.

—En la parábola, el círculo director viene á ser la recta directriz.

Círculo focal.

Definición.—Si por dos puntos situados en una cónica trazamos cuatro radios vectores á los focos, éstos formarán un cuadrilátero no convexo, circunscriptible á un círculo: éste se llama *círculo focal*, y á su radio se nombra *radio focal.*

Historia.—Propiedades de estas líneas han sido estudiadas por J. Mentión, y también se puede consultar *Bulletin de la classe phisique et mathematique de Saint-Petersbourg* (t. XVI, número 561, año 1857).

Propiedades.—Supongamos la cónica referida á sus ejes principa-

les. Sean α y β las coordenadas del centro del círculo focal, K el radio focal, se tiene la relación:

$$\text{para la elipse } a^2K^2 = a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2b^2,$$

$$\text{para la hipérbola } a^2K^2 = a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 + a^2b^2,$$

en que a es el semieje focal y b el otro.

—En la parábola

$$K^2 = \beta^2 - 2p\alpha,$$

en que p es el semiparámetro.

—El centro del círculo focal es el polo de la cuerda que reune los dos puntos de la cónica. En la parábola, dos de los radios vectores vienen á ser dos diámetros.

—La suma de dos tangentes trazadas por los focos al círculo focal, es igual al eje focal en la elipse, y es la diferencia en la hipérbola.

—La longitud de una tangente dirigida desde un foco al círculo focal, está con la distancia del centro de este círculo á la directriz, correspondiente al foco, en la relación conforme al módulo de la cónica.

Círculo imaginario.

Definición.—Se da este nombre al lugar representado por la ecuación

$$\left(x - a - a'\sqrt{-1}\right)^2 + \left(y - b - b'\sqrt{-1}\right)^2 = \left(r - r'\sqrt{-1}\right)^2.$$

Propiedades.—Si se hacen girar los ejes alrededor del origen un ángulo ω, tal que sea

$$\text{tg}\,.\,\omega = -\frac{b'}{a'},$$

se hará desaparecer la parte imaginaria de la ordenada del centro y su ecuación será

$$\left(x - a - a'\sqrt{-1}\right)^2 + (y - b)^2 = \left(r + r'\sqrt{-1}\right)^2,$$

y transportando los ejes paralelamente á sí mismo, al punto real (a, b), esta ecuación tomará la forma

$$\left(x - a\sqrt{-1}\right)^2 + y^2 = \left(r + r'\sqrt{-1}\right)^2.$$

—El círculo conjugado de uno real con relación á su centro, es un círculo imaginario.

Círculo oblicuo.

Del griego (λοξος—κύκλος).

Definición.—Con este nombre fué conocida la eclíptica (ver esta voz) por los griegos, en la escuela de Thales (580 a. J. C), debido á la inclinación que presenta con respecto al ecuador.

Círculo principal ú homográfico.

(Ver *elipse*, *hipérbola* y *parábola*).

Círculo ortotómico.

Definición.—Se da este nombre, al círculo que corta octogonalmente á tres círculos dados.

Ecuación.—Si $P = O$, $Q = O$, $R = O$, son las ecuaciones de los tres círculos dados, suponiendo los ejes rectangulares, se tendrá,

$$P = x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C,$$
$$Q = x^2 + y^2 + 2A'x + 2B'y + C',$$
$$R = x^2 + y^2 + 2A''x + 2B''y + C'';$$

y sea

$$x^2 + y^2 + 2\lambda x + 2\mu y + \nu = 0$$

la ecuación del círculo buscado. La relación de condición

$$2AA' + 2BB' = C + C',$$

establecida para que los círculos sean octogonales (ver *círculos octogonales*), nos dará

$$2\lambda A + 2\mu B - \nu - C = 0,$$
$$2\lambda A' + 2\mu B' - \nu - C' = 0,$$
$$2\lambda A'' + 2\mu B'' - \nu - C'' = 0;$$

ecuaciones que nos dan, por eliminación de los parámetros,

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ -C & A & B - 1 \\ -C' & A' & B' - 1 \\ -C'' & A'' & B'' - 1 \end{vmatrix} = 0,$$

que será la ecuación del círculo *ortotómico*, la cual, después de varias transformaciones, se puede poner bajo la forma:

$$\begin{vmatrix} P_z' & P_x' & P_y' \\ Q_z' & Q_x' & Q_y' \\ R_z' & R_x' & R_y' \end{vmatrix} = 0.$$

—Si en lugar de cortar el círculo ortotómico, según un ángulo recto á los otros tres círculos, lo hace según un ángulo θ, siendo la ecuación de este círculo

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0,$$

se tendrán tres relaciones de la forma

$$c' + 2Rr' \cos\theta - 2Aa' - 2Bb' + C = 0;$$

y eliminando A, B y C se tendrá:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2, & -x & -y & 1 \\ c' + 2Rr' \cos\theta, & a' & b' & 1 \\ c'' + 2Rr'' \cos\theta, & a'' & b'' & 1 \\ c''' + 2Rr''' \cos\theta, & a''' & b''' & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad \text{(Mr. Cathcart.)}$$

Propiedades. — Como los centros de los círculos que cortan octogonalmente á los círculos P y Q, están situados sobre el eje radical de estos dos círculos, resulta que el centro del círculo ortotómico, con relación á los circulos P, Q y R, coinciden con su centro radical.

— El radio del círculo ortotómico, es igual á la longitud de la tangente dirigida desde el centro radical á uno cualquiera de los tres círculos.

— Si desde un punto M se trazan tres rectas que pasan por los vértices A, B, C de un triángulo y cortan á los lados opuestos en los puntos a, b y c, el círculo ortotómico á los círculos descritos sobre Aa, Bb y Cc pasa por dos puntos fijos, cualquiera que sea el punto M. (H. Faure.)

Círculo ortotómico respecto á otros cuatro. — La condición para que un círculo corte en ángulo recto á otros cuatro, se obtiene eliminando á C, F, G, entre las cuatro ecuaciones:

$$2Gg + 2Ff - C - c = 0$$
$$2Gg' + 2Ff' - C - c' = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

cuya eliminación nos da

$$\begin{vmatrix} c & g & f & 1 \\ c' & g' & f' & 1 \\ c'' & g'' & f'' & 1 \\ c''' & g''' & f''' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ahora bien; c representa el cuadrado de la tangente desde el origen al primer círculo, y puesto que el origen puede ser un punto cualquiera, se puede interpretar esta condición, geométricamente expresando, que las tangentes desde un punto cualquiera á cuatro círculos que son cortados por otro octogonalmente, están ligadas por la relación

$$OA^2 . BCD + OC^2 . ABD = OB^2 . ACD + OD^2 . ABC;$$

teorema de Mr. R. J. Harvey (*Casey. Trans. Royal. Irish. Acad.*, T. XXIV, pag. 458).

Círculo osculador.

Definición. —El círculo osculador de una curva en uno de sus puntos es, según la noción introducida por Lagrange, el circulo cuyo contacto con esta curva es el más íntimo posible, es decir, el círculo cuya ordenada, á partír del punto común, tiene las mismas derivadas, en el mayor número posible, que la misma ordenada de la curva.

Historia.—En la obra de Maclaurin *Tractatus de propietatibus generalibus linearum* se encuentra el siguiente teorema: «Si por un punto cualquiera, tomado en el plano de una curva algebraica del grado m, se dirige una recta fija ó eje, y una recta móvil, y por los m puntos de encuentro de la recta móvil con la curva se dirigen tangentes á dicha curva, la suma de las inversas de las distancias del punto tomado, á los puntos de encuentro de la recta fija con las m tangentes trazadas, será constante é igual á aquella de las inversas de los segmentos comprendidos sobre la recta fija, entre el mismo punto fijo y los puntos de encuentro de esta recta fija con la curva.» De este teorema deduce su autor un medio de construir el círculo osculador á una curva en uno cualquiera de sus puntos; es suficiente para ello, el tomar el punto fijo, del que se hace cuestión en el enunciado de su teorema, como punto dado de la curva.

Ecuación.—Si $y = f(x)$ es la ecuación de una curva, para que la ecuación general de un círculo

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \rho^2,$$

que contiene tres constantes arbitrarias, tenga con la curva propuesta el mayor contacto posible, éste deberá ser de segundo orden. Así, pues, haciendo las dos diferenciaciones necesarias, substituyendo y eliminando se encuentran los valores

$$x - \alpha = \frac{\frac{dy}{dx}\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad y - \beta = -\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$\rho = \pm \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}. \qquad (1)$$

—La expresión de la normal á una curva es,

$$N = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

y se tendrá

$$\frac{N^3}{y^3} = \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}},$$

valor que, substituído en el obtenido para ρ, nos dará

$$\rho = \pm \frac{N^3}{y^3 \frac{d^2y}{dx^2}},$$

ó sea el valor del radio de curvatura en función de la normal.

—Si la ecuación de la curva está dada en coordenadas polares, la expresión de ρ será:

$$\rho = \frac{\left\{r^2 + \left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2 - r\frac{d^2r}{dt^2}},$$

en la cual, r representa el radio vector, y ω, el ángulo de la coordenada polar del punto de osculación.

Propiedades.—La fórmula (1) encontrada para el valor del radio del círculo osculador de una curva en uno de sus puntos, nos dice que su centro es el de curvatura de la curva en este punto, ó en otros términos, el círculo osculador á una curva, es aquel que tiene dos normales infinitamente próximas, comunes con la curva propuesta, ó también, que el círculo de mayor contacto, es el que pasa por tres puntos infinitamente próximos de la curva que él oscula.

—El centro del círculo osculador se encuentra colocado hacia la parte en que la curva presenta su concavidad.
—La curva y el círculo osculador tienen la misma tangente. El centro del círculo osculador está sobre la normal á la curva en el punto considerado.
—La recta que une el punto de contacto al centro del círculo osculador, es perpendicular á la tangente común.
—El círculo osculador tiene con la curva un contacto de segundo orden en general, y por consiguiente, del orden par, de donde se deduce que él corta la curva, excepción hecha en ciertos puntos particulares, en que el contacto es de un orden impar, como, por ejemplo, en los vértices de una cónica; y en este caso la curva y su círculo osculador están al mismo lado de la tangente común.

Aplicaciones.—La determinación del círculo osculador, nos lleva á conocer la curvatura de una línea, y á la consideración de las llamadas *evolutas* y *evolventes*. (Ver estas voces.)

Círculos de altura.

(Ver vertical).

Círculos de contacto.

Mr. Lamé, *Théorie Mathématique de l'elasticité des corps solides*, al estudiar la superficie de las ondas, distingue en ella cuatro círculos, que denomina de *contacto*, lugar de los puntos conjugados de los extremos de los ejes ópticos de dicha superficie, y les da este nombre, porque un cierto plano es tangente á la superficie de las ondas, en la extensión de toda su circunferencia.

Círculos de grados superiores.

Definición. — Se da este nombre á las curvas representadas por la ecuación general

$$y^{m+n} = x^m (a - x)^n,$$

en la cual a es el eje, x, la abscisa é y, la ordenada.

Casos particulares. — Si m y n son números enteros, las curvas representadas por la ecuación anterior son especies de óvalos, y se reducen á un círculo para cuando m y n son iguales á la unidad.

— La denominación de *círculos* dada á las curvas representadas por la ecuación anterior, es debida á estar el círculo comprendido entre ellas.

Círculos de la esfera.

Definición. — Se denominan así á los diferentes círculos imaginados en las esferas celeste y terrestre, para explicar los movimientos de los astros y fijar la posición de los lugares de la tierra.

— Estos círculos responden al sistema de Tolomeo; es decir, á la hipótesis de la tierra inmóvil en el centro del universo. Aun cuando el sistema de mundo está ya hoy fuera de toda discusión, la esfera de Tolomeo es la más usada, por ser la más sencilla para el estudio de la Astronomía y de la Geografía, y sirve para poner de manifiesto los hechos *aparentes* del movimiento de los cuerpos celestes.

Clasificación. — Aunque en la naturaleza no existe más que una sola esfera que comprende la tierra y los cielos, se han imaginado tres especies de esferas, á saber: la *celeste,* que representa el firmamento ó el cielo estrellado; la *terrestre*, que representa la superficie de la tierra, y la *armilar*, reunión de los diferentes *círculos de la esfera.*

— No se sabe á quién se debe la invención de esta última especie de esfera; algunos escritores atribuyen la primera idea de ella á Thales, y otros á Arquímedes; pero, según los testimonios más auténticos, créese que sea debida á Anaximandro. El nombre de *armilar* se deriva de *armilla*, brazalete.

— Se distinguen dos especies de círculos, los *máximos* y los *pequeños.* Los primeros son aquellos en que su plano pasa por el centro de la esfera, y, por consecuencia, la dividen en dos partes iguales, y tienen, además, el mismo centro que ella. Los pequeños son los que la dividen en dos partes desiguales, y no coinciden sus centros con el de la esfera.

— Los círculos máximos son: el *horizonte*, el *meridiano*, el *ecuador*, la *eclíptica* y los dos *coluros.* Los pequeños son: los dos *trópicos* y los dos *círculos polares.*

— Existen además otras especies de círculos, que no se representan en la esfera, aunque á ella pertenecen, y cuyo conocimiento es indispensable en la Astronomía y para la navegación. Estos son, tres clases de círculos máximos y otras tres de círculos pequeños.

— Los tres máximos son: los *verticales ó círculos de altura*, los *círculos de declinación* y los *círculos de latitud*, y los pequeños, los *almicantára-*

das ó paralelos de altura, los *paralelos de declinación* y los *paralelos de latitud.*

— Estos tres círculos máximos son respectivamente perpendiculares al horizonte, al ecuador y á la eclíptica, y los tres pequeños son, respectivamente, paralelos á estos mismos grandes círculos.

(En el lugar correspondiente nos ocupamos de cada una de estas especies de líneas).

Círculos de latitud.

Definición. —Los círculos máximos de la esfera celeste, que pasan por los polos de la eclíptica.

Propiedades y usos. —Estos círculos cortan perpendicularmente á la eclíptica.

Se llaman círculos de latitud, porque sirven para medir la latitud (ver esta voz) de los astros.

Sirven para referir un astro á un punto de la eclíptica tomado por origen, á fin de poder determinar su latitud y su longitud. Se pueden imaginar tantos círculos de longitud como puntos tiene la eclíptica.

Círculos diversos.

Círculos de Apolonio.— Son aquellos que tienen por diámetro el segmento interceptado sobre cada lado de un triángulo, por la bisectriz del ángulo opuesto y su perpendicular en el vértice ó bisectriz del ángulo suplementario.

— Son en número de tres y sus centros se encuentran sobre la recta de Lemoine.

— Los simétricos á los de Apolonio con relación á las medianas del triángulo se llaman *isotómicos.*

—Ver *Journal de Mat. Sp.*, 1888 y 1889, y *Mathesis,* 1885, trabajos de E. Vigarié y J. Neuberg.

Círculo de Brocard.— Definición.— Si en un triángulo ABC se determinan dos puntos F y F', tales que los ángulos FBC, FCA, FAB sean iguales, así como los ángulos $F'CB$, $F'AC$, $F'BA$, el círculo que pasa por estos dos puntos, y el centro del círculo circunscrito, se denomina *círculo de Brocard.* También se dice círculo de los cinco y de los siete puntos.

Historia. —Las propiedades de este círculo las ha dado á conocer Mr. Brocard, y más tarde Mr. Neubery, pudiéndose ver sobre él un

Etude sur le cercle de Brocard, publicado por Mr. Morel en *Journal de Math., élémentaires et spéciales*, en 1884.

Propiedades.—Los pares de rectas (BF, CF'), (CF, AF'), (AF, BF') determinan tres puntos A_1, B_1, C_1, situados sobre el círculo OFF', y el triángulo $A_1B_1C_1$ es semejante al ABC.

—El centro de las medianas antiparalelas del triángulo ABC se encuentra sobre el círculo OFF', y está diametralmente opuesto al centro O del círculo circunscrito.

—Las rectas AA_1, BB_1, CC_1 se cortan en un punto que es centro de homología para los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$.

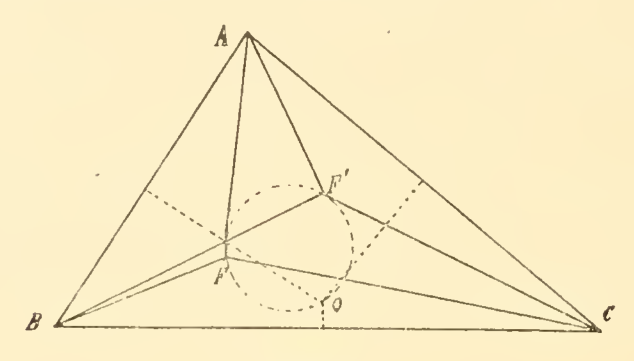


Figura 1.ª

—Los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ tienen el mismo centro de gravedad.

—La recta que une los puntos medios de los lados homólogos de los dos triángnlos se cortan en un punto que es el punto medio de la recta FF'.

Aplicaciones.—El conocimiento de esta curva, que goza, como vemos, de curiosas propiedades, es interesante, bajo el punto de vista de los estudios propios de la Geometría pura.

Círculos de Euler ó de los nueve puntos.— Se conoce en Alemania con el nombre de círculo de Fenerbach.

Definición. — Se da este nombre al lugar de los centros de las hipérbolas equiláteras circunscritas á un triángulo.

Propiedades. — El círculo de los nueve puntos es tangente al círculo inscrito y á los círculos ex inscritos. (Steiner.)

— El centro del círculo de nueve puntos ó el polo de la recta en el infinito, con relación á este círculo, coincide con el punto medio de la recta que une el centro del círculo circunscrito con el punto de concurso de las alturas.

— El radio del círculo de nueve puntos de un triángulo, es la mitad del radio del círculo circunscrito.

— Las cuatro tangentes comunes al círculo inscrito, á los ex inscritos y al círculo de nueve puntos de un triángulo (en sus puntos de contacto), tocan asimismo á la elipse tangente á los lados de este triángulo en sus puntos medios.

— Los medios de los lados de un triángulo, los pies de sus alturas ó vértices del triángulo órtico y los medios de los segmentos de las alturas entre los vértices y el ortocentro, son nueve puntos que están sobre este círculo.

— Puede consultarse sobre esta curva los trabajos de Mr. Trudi: *Giornale di matematiche ad uso degli Studenti della Universita Italiane* (1863).

Círculo de Fuhrmann.— Círculo cuyo centro es el punto medio de la recta que une el ortocentro de un triángulo con su punto de Nagel.—*Mathesis*, 1890.

Círculo de Joachimsthal.—Definición.—Se da este nombre al círculo que pasa por los pies de las tres normales trazadas á una cónica desde un punto dado.

Ecuación.—Si (α, β) son las coordenadas del punto desde el cual parten las normales, y A, B, C, D los pies de estas normales, entre los cuales distinguiremos el punto A, cuyas cordenadas sean x_1 é y_1, y suponemos la elipse cuya ecuación sea

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

la ecuación de círculo de Joachimsthal es

$$x^2 + y^2 + x\left(\frac{c^2 x_1}{a^2} - \alpha\right) - y\left(\frac{c^2 y_1}{b^2} + \beta\right) - \frac{b^2}{a^2} x_1^2 - \\ - \frac{a^2}{b^2} y_1^2 - \alpha x_1 - \beta y_1 = 0;$$

si en ella se hace

$$n = a^2 + \frac{b^2 \beta}{y_1} = b^2 + \frac{a^2 \alpha}{x_1},$$

se encuentra

$$x^2 + y^2 + x x_1 + y y_1 = n\left(\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} + 1\right).$$

Propiedades.—La ecuación anterior prueba: que el círculo de Joachimsthal pasa por los puntos comunes al círculo descrito sobre OA', como diámetro (siendo A' el punto diametralmente opuesto al A), y á la tangente á la elipse en el punto A'.

—Los pies de tres de las normales que parten de un punto á una elipse, y el punto diametralmente opuesto al cuarto pie, forman un cuadrilátero inscrito en un círculo.

—El círculo que pasa por los pies de tres de las normales trazadas desde un punto á una elipse, pasa asimismo por la proyección del centro de la curva sobre la tangente en el punto que está diametralmente opuesto al pie de la cuarta normal. (Laguerre.)

—Los pies de tres de las normales bajadas desde un punto á la parábola y el vértice de esta curva, forman un cuadrilátero inscriptible.

—Para el estudio de esta línea puede consultarse *Nou. Ann.* 1880 y 1881, *Nouvelle Correspondance Mathematique*, 1880 (J. Neuberg) y *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1876 y 77, etc.

—*Círculo de Longchamps.*— Círculo cuyo centro es el ortocentro del triángulo anticomplementario de un triángulo dado y cuyo radio es doble del de el *círculo polar conjugado*, ó círculo con relación al cual cada vértice del triángulo es el polo del lado opuesto.

—*Círculos de Lucas.*—Los tangentes entre si dos á dos, y tangentes al círculo circunscrito de un triángulo.—Son en número de tres.

—*Círculos de Mac-Cay.*—Los que tienen su centro sobre las mediatrices de un triángulo, pasan por el baricentro del mismo y por los vértices del segundo triángulo de Brocard.-*J. Casey-Geom. Anal.*

—*Círculos de Malfatti.*—Los tres círculos tangentes entre sí y á dos de los lados de un triángulo.

—*Círculos de Miquel.*—Geometria Longchamps, pág. 490.

—*Círculos de Monge.*—El circunscrito al rectángulo formado por las tangentes á una elipse en los extremos de sus ejes. En general, es el lugar de los vértices de las tangentes á una cónica de centro, que forman entre sí ángulos rectos.

Se denominan también *orthoptico* y diagonal.

—*Círculos de Neuberg.*—Si sobre cada uno de los tres lados de un triángulo se construyen otros triángulos que tengan el mismo ángulo de Brocard que el propuesto, los vértices libres describen los de Neuberg.

—El centro radical de los tres círculos de Neuberg es el punto recíproco del de Lemoine.

—*Círculo de Taylor.*—El concéntrico al inscrito al triángulo complementario del triángulo órtico de uno dado.

—*Círculos de Torricelli.*—Los seis círculos circunscritos á los triángulos equiláteros construídos exterior é interiormente sobre los lados de un triángulo.

—También se conocen los de *Schoute,* de *Brisse,* de *Tucker*, los *isotómicos*, el *orthocentroidal, potencial, radical, tritangente, secundario, lateral, pedal, podar,* de *inflexión,* de *convergencia,* etc., que pueden estudiarse en las obras de Matemáticas usuales, y muy principalmente en los escritos de Vigarie.

Círculos horarios.

Definición.—Se da el nombre de *círculos horarios* á los círculos de declinación, cuando, por tenerse en cuenta sus distancias con respecto al meridiano del lugar, se utilizan para determinar la hora que es.

Aplicaciones.—Los planos de estos círculos, que se consideran trazados á distancia de 15°, contados sobre el ecuador, producen por su intersección con la superficie de los cuadrantes, las líneas horarias. (Ver esta voz.)

Círculos focales.

Definición.—Se da el nombre de círculos focales, á los círculos tales que la distancia de un punto cualquiera M de una curva, al punto de contacto T de la tangente, trazada desde este punto al círculo, es una función racional de las coordenadas del punto de la curva.

Historia.—Sobre el particular estudio de estas líneas se puede ver la obra *Courbes et surfaces focales*, de A. Boset.

Ecuación y propiedades.—Si los ejes son rectangulares, la ecuación del círculo es

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2, \qquad (1)$$

en la cual $(\alpha \,.\, \beta)$ son las coordenadas del centro y R, el radio.

La expresión

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - R^2 = \delta^2 \qquad (2)$$

representa su primer miembro el cuadrado de la tangente MT, trazada desde un punto cualquiera $M\,(x\,,\,y)$ á un punto T del círculo (1).

El problema se reduce á buscar cuál debe ser, en magnitud y po-

sición este círculo, al objeto de que, la longitud de la tangente $MT = \delta$, sea una función racional de las coordenadas (x, y), del punto M situado sobre una curva algebraica.

—Si la curva es la general, representada por la ecuación de segundo grado:

$$y^2 + axy + bx^2 + cy + dx + e = 0 = \varphi(x, y)$$

ó

$$y^2 + (ax + c)y + \varphi(y_0) = 0,$$

se tendrá

$$y - \beta = -\frac{2\beta + ax + e}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{ax + c}{2}\right)^2 - \varphi(y_0)},$$

y substituyendo en la expresión (2)

$$\delta^2 = (x - a)^2 + \left[\frac{1}{2}\varphi'(y) \pm \sqrt{\left(\frac{ax + e}{2}\right)^2 - \varphi(y_0)}\right]^2 - R^2,$$

función que no puede ser racional sino cuando:

$$\varphi'(y) = 0 \quad \text{ó} \quad 2\beta + ax + c = 0,$$

de donde se deduce *que los centros de los círculos focales y los focos deberán estar situados sobre los ejes ó diámetros de estas curvas.*

—Dando á β el valor β', y haciendo

$$\varphi(y_0) = X,$$

se encuentra

$$\delta^2 = (x - \alpha)^2 + \beta'^2 - X - R^2;$$

luego *pueden existir una infinidad de círculos focales que satisfacen al problema propuesto.*

—Si la curva dada está representada por la ecuación

$$\varphi(x, y) = 0,$$

$$\delta^2 = (x - \alpha)^2 + \left[\frac{1}{2}\varphi'(y) \pm \sqrt{\beta'^2 - \varphi(y_0)}\right]^2 - R^2,$$

que no puede ser racional sino cuando $\varphi'(y) = 0$, es decir, *que los centros de los círculos focales se encuentran sobre las líneas diametrales.*

—Sobre el eje imaginario de la hipérbola y sobre el eje menor de la elipse existen una infinidad de círculos focales. Respecto á la parábola, no posee círculos focales sino sobre su eje de simetría ó eje de las abscísas.

—A cada círculo focal corresponden dos rectas paralelas á la cuerda de contacto y que tienen las mismas propiedades que las directrices. Puede, pues, decirse, que las directrices propiamente dichas, no son sino casos particulares de cuerdas de contacto de círculos focales cuyo radio es infinitamente pequeño ó nulo; del propio modo que los focos no son más que casos particulares de círculos focales.

—Las cónicas, y en general las curvas de segundo grado, son las curvas envolventes de sus círculos focales.

Círculos ortogonales.

Definición.—Dos círculos se dicen ortogonales en un punto, cuando sus tangentes en este punto son perpendiculares.

Ecuación. — La condición precisa y necesaria para que dos círculos o y o' sean ortogonales, se ve que es la de que (fig. 1)

$$\overline{oo'}^2 = \overline{oM}^2 + \overline{o'M}^2; \quad (a)$$

es decir, que el cuadrado de la distancia de sus centros sea igual á la suma de los cuadrados de sus radios.

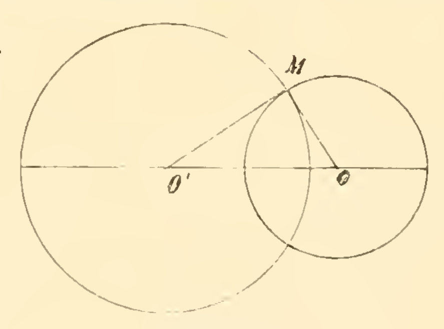


Figura 1.ª

Podemos traducir analíticamente esta condición. Sean:

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 2A'x + 2B'y + C' = 0$$

la ecuación de los dos círculos propuestos, y (α, β), (α', β') las coordenadas de los centros, o y o'; si R y R' designan los radios, las ecuaciones de estos círculos serán:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2,$$
$$(x - \alpha')^2 + (y - \beta')^2 = R'^2,$$

ecuaciones que, comparadas con las anteriores, nos dan:

$$-\alpha = A, \quad -\beta = B, \quad R^2 = A^2 + B^2 - C,$$
$$-\alpha' = A', \quad -\beta' = B', \quad R'^2 = A'^2 + B'^2 - C';$$

y teniendo en cuenta la relación (*a*), tendremos para la condición pedida:

$$2AA' + 2BB' = C + C'.$$

—Si los ejes forman entre sí el ángulo θ, la condición para que dos círculos que corresponden á las ecuaciones,

$$x^2 + y^2 + 2xy \,.\, \cos\theta + 2By + 2B'x + A'' = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 2xy \,.\, \cos\theta + 2\,b\,y + 2\,b'\,x + a'' = 0$$

sean ortogonales, es

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos.\theta & B' \\ \cos.\theta & 1 & B \\ b' & b & \frac{1}{2}(A'' + a'') \end{vmatrix} = 0.$$

Propiedades.—Si dos círculos se cortan ortogonalmente, un diámetro de uno de ellos es cortado por los círculos considerados en cuatro puntos que forman una división armónica.

—Todos los círculos que tienen sus centros sobre una misma recta y cortan ortogonalmente un círculo dado, tienen el mismo eje radical,

—Dados dos círculos que se cortan ortogonalmente, si se hace pasar un círculo por sus centros y los puntos de intersección, la suma de las potencias de un punto de este círculo con relación á los círculos dados es igual á cero.

—Dados tres puntos, A, B, C, se construyen tres círculos, lugares geométricos de los puntos P, Q, R, de modo que se tenga:

$$\overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = K\,.\,\overline{PA}^2, \quad \overline{QC}^2 + \overline{QA}^2 = K\,.\,\overline{QB}^2$$

y

$$\overline{RA}^2 + \overline{RB}^2 = K\,\overline{RC}^2;$$

estos círculos son ortogonales al círculo circunscrito al triángulo ABC.

—Si se tienen dos círculos C y C', la tangente en un punto P del círculo C corta en P' la polar de P con relación á C', y el círculo descrito sobre PP' como diámetro, es ortogonal á C y á C', pasando además por los círculos-puntos del sistema C, C'.

Círculos polares.

Definición.—Reciben este nombre, en Astronomía, dos círculos menores paralelos á el ecuador, descritos por los polos de la eclíptica durante el movimiento diurno de la esfera celeste alrededor de los polos del mundo.

Clasificación.—Se distinguen dos de estos círculos: uno recibe el nombre de *ártico* (del griego ἄρκτος, osa), *septentrional* ó *boreal*, por pasar por el polo del mismo nombre, y al otro, por idéntica razón, se le llama *antártico* (del griego ἀντὶ, opuesto, y ἄρκτος, osa, opuesto á la Gran Osa), *meridional* ó *austral*.

Propiedades.—Estos dos círculos están alejados 23° 27′ 15″ de los polos del Ecuador.

Aplicaciones.—Sirven los círculos polares para determinar los puntos en que la duración de los días y de las noche es mayor, ó sea de veinticuatro horas. En efecto; supongamos un observador sobre el círculo polar ártico, el trópico de Cáncer estará por completo sobre el horizonte de este observador, y el de Capricornio, por debajo del mismo horizonte; ahora bien, cuando el sol está en el solsticio de uno de los hemisferios, él describe el trópico de este hemisferio; luego, cuando un observador se encuentra sobre uno de los círculos polares, y el sol está en el solsticio del mismo hemisferio, tiene veinticuatro horas de día, pues es lo que tarda en describir el trópico de este hemisferio, que es visto todo por el observador. Si el sol está en el solsticio del hemisferio opuesto á aquel del observador, éste tiene veinticuatro horas de noche, puesto que el sol ahora describe el trópico de este hemisferio que está por completo debajo del horizonte del lugar de observación. En consecuencia, los habitantes de los círculos polares tienen veinticuatro horas de día ó veinticuatro horas de noche, según que el sol está en el solsticio de su hemisferio ó en el del hemisferio opuesto.

En Geografía, se llaman *círculos polares* á dos círculos supuestos trazados en la superperficie terrestre, de la misma manera que los precedentes, sobre la esfera celeste, y que sirven de límites á las zonas glaciales. El que es vecino del polo boreal se llama *ártico*, y el que del polo austral *antártico*.

Círculos radicales.

Definición.—Todas las circunferencias que tienen su centro sobre una recta *ab*, y cortan en ángulo recto á otra circunferencia dada, tiene un mismo eje radical, y todas estas circunferencias, tomadas dos á dos y la circunferencia dada, tienen un mismo centro radical.

Pues bien; estos círculos forman un *sistema radical*, del cual es *ab* el eje primitivo ó *serie P*, y si desde el centro de la circunferencia *m* se baja sobre *ab* la perpendicular *mh*, sobre esta recta se encuentran los centros de una serie ilimitada de círculos, que cortan según ángulos rectos á todos los de la serie *P* ó *radicales recíprocos* con respecto á esta serie *P*, y sobre la parte de esta recta, que es cuerda común á todos los círculos *P*, los centros de una nueva serie de círculos *radicales simples* con relación á los de la serie *P*.

Historia.—El teorema al principio expuesto se debe á M. Mannheim, habiendo sido demostrado por P. H. Rochette, y respecto á cuanto con estas líneas tienen particular relación, puede verse una Memoria de Mr. Gaultier de Tours, publicada en *Journal de l'Ecole Polytecnique.* (Cahier, XVI.)

Círculo regulador.

(Ver Espirales.)

Circunferencia.

Del latín, *circumferentia;* compuesto de *circum*, alrededor, y *fero*, llevar.

Definición.—Línea curva que limita un círculo (ver esta voz).
—Por extensión se da también este nombre al contorno de una curva cualquiera.

Propiedades.—Están expresadas al hablar del círculo, conforme á la salvedad indicada al empezar dicho artículo.

Circunferencia de las inflexiones.

(Ver Trocoide.)

Circunferencia de los centros.

(Ver Trocoide.)

Circunferencia osculatriz.

Nombre con que algunos autores distinguen al círculo osculador (ver esta voz.)

Circunferencias primitivas.

Definición.—En el estudio de la teoría general de los engranajes se da el nombre de *circunferencias primitivas* á las secciones rectas de los dos cilindros, que, girando alrededor de sus ejes, se conducen por simple contacto.

Aplicaciones.—Estas circunferencias, en que la magnitud de sus radios están en razón inversa de sus velocidades angulares, sirven de base para la construcción de los dientes de las distintas clases de engranajes.

—En la teoría de las máquinas, se llama también *circunferencia primitiva* de una polea, cuando una correa rueda sin resbalar sobre una polea; á la circunferencia ideal, cuyos puntos, sin pertenecer á la polea, tienen todos la misma velocidad que la que tiene el eje de la correa.

Cisoide.

Del griego κισσός, hiedra, y εἶδος, forma.

Definición. — Sea O un punto y Δ una curva dada; si desde O se traza una serie de secantes OM, ON, OP..., y á partir de los puntos M, N..., en una dirección fija, se toman magnitudes que guarden entre si una cierta relación, por ejemplo, constante, el lugar geométrico de los puntos m, n..., así obtenidos, se denomina *cisoide.*

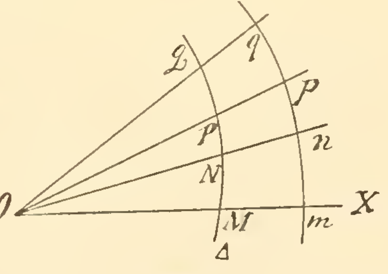


Figura 1.ª

Ecuación polar.—Sea O el polo, OX el eje polar, y f (ρ, ω) la

ecuación de la curva Δ. Si suponemos que la longitud que se toma es constante é igual á m, y llamamos ρ' y ω' á las coordenadas de un punto de la nueva curva, en virtud de la definición, se tendrá:

$$\omega = \omega'; \quad \rho = \rho' - m,$$

cuyos valores, substituídos en la ecuación de la curva Δ, nos dará:

$$f(\omega', \quad \rho' - m) = 0,$$

que representará la de la *cisoide.*

Clasificación. — Según que la curva Δ sea una circunferencia, elipse, etc., la cisoide se denomina circular, elíptica, etc., siendo estas dos las más usuales.

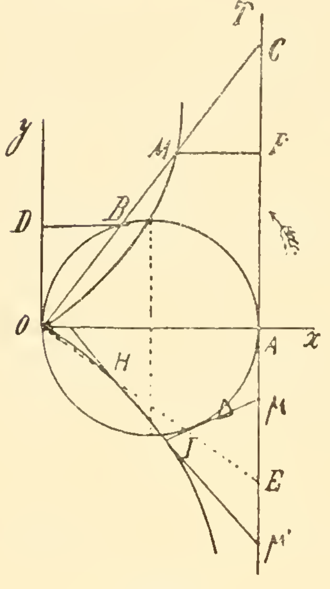


Figura 2.ª

Cisoide de círculo ó de Diócles.—Definición.— Imaginemos el círculo Δ, un diámetro OA y la tangente en su extremo A. Si desde el punto O se dirige una secante OC y se toma $OM = BC$, el lugar de los puntos M es la *cisoide de círculo.*

Historia. — Se considera á Diócles como inventor de esta curva, para llegar á la solución del problema de la inserción de dos medias proporcionales entre dos longitudes dadas (—100 ó —200 de J. C.), no sabiéndose á ciencia fija, cuándo vivió. Pappus, en sus obras, habla en diversos períodos de la cisoide, pero sin nombrar á Diócles (libro IV, prop. 30, pág. 35; lib. III, prop. 4.ª, pág. 7.ª). Así, pues, Diócles es anterior á Pappus. Por otra parte, refiriéndose á Géminus, habla de la cisoide, y Géminus es del primer siglo antes de J. C. Haremos notar que todos estos autores no conocieron, ó á lo menos no consideraron, más que la porción de la curva situada en el interior del círculo.

Hacia 1655, Huygens comunica á Wallis la medida obtenida por él del área total de esta curva, y este último publica, en 1659, una obra titulada *De cycloide et cissoide.* Guido Grandi se ocupa, en *Geometrica demonstratio hugenianorum problematum* (Florencia, 1701), de su rec-

tificación, y el mismo problema trata F. Nicole en el *Jaurnal des Savants*, por el año 1703, debiéndose á Newton el procedimiento para trazarla por un movimiento continuo.

Clasificación. — La cisoide definida como acabamos de hacerlo, ó sea, tomando el punto O diametralmente opuesto á aquel en que la circunferencia Δ es tocada por la tangente T, se distingue con el nombre de *cisoide recta*, y si el punto O se toma sobre un punto cualquiera de la circunferencia, entonces la cisoide engendrada se denomina *cisoide oblicua.*

También se pueden distinguir otras clases de cisoides, tales como las engendradas, reemplazando la tangente AT por una recta cualquiera que le fuese paralela, ó las que se originaran tomando por punto O otro cualquiera del diámetro OA.

Cisoide recta. — *Ecuación.* — Para determinar su ecuación polar, sea O el polo y OA el eje polar. Llamemos (ρ, ω) las coordenadas del punto M, y a al diámetro OA; los triángulos OAC y ODB nos dan

$$OB = a \, . \cos . \, \omega \qquad OC = \frac{a}{\cos . \, \omega},$$

y la ecuación de la curva será:

$$\rho = OC - OB = \frac{a}{\cos . \, \omega} - a \, . \cos . \, \omega,$$

y reduciendo,

$$\rho = \frac{a \, . \operatorname{sen}^2 \omega}{\cos . \, \omega}.$$

Su ecuación, en coordenadas cartesianas, se obtendrá haciendo,

$$x = \rho \, . \cos . \, \omega \qquad y = \rho \, . \operatorname{sen} . \, \omega,$$

y resultará

$$x\,(x^2 + y^2) = ay^2 \quad ó \quad y^2 = \frac{x^3}{a - x}. \qquad (1)$$

Forma. — La curva es simétrica con relación al eje de las x, puesto que la ecuación no contiene sino potencias pares de y.

— La curva está toda comprendida entre la tangente AT y el eje de las y, puesto que x no puede recibir valores negativos, ni crecer positivamente más allá de a.

— Si se hace $x = a$, el valor de y será:

$$y = \pm \frac{\sqrt{a^3}}{0} = \pm \infty;$$

es decir, que la curva no encuentra la recta AT, sino á una distancia infinita de A; luego esta recta es una asíntota con relación á las dos ramas de la curva.

— Para $x = \frac{1}{2} a$, se tiene $y = \frac{1}{2} a$; por lo tanto, la curva encuentra á la circunferencia Δ en los puntos, en los cuales la tangente á esta circunferencia es paralela al eje de las x.

De estas consideraciones se deduce que la forma de la curva es la representada en la (fig. 1.ª).

Tangente. — La tangente en un punto H se traza dirigiendo la tangente á la circunferencia en el punto I, y tomando $E\mu' = E\mu$; uniendo H con μ', ésta será la tangente.

Area.—El espacio asintótito indefinido, comprendido entre la asíntota y las dos ramas de la cisoide, es un espacio finito igual á tres veces la superficie del círculo generador Δ.—En efecto; la ecuación (1) puede escribirse:

$$y^2 = \frac{x^4}{ax - x^2}$$

y el área S será:

$$S = \int_0^a \frac{x^2\,dx}{\sqrt{ax - x^2}} \quad \text{ó} \quad S = \frac{3\pi a^2}{8}$$

y doblando este valor;

$$S = \frac{3\pi a^2}{4} = 3\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Observando esta fórmula, se ve que es idéntica á la del área de una cicloide engendrada por un círculo de radio $\frac{a}{2}$ en su parte interior.

Propiedades.— Mr. Marcon ha señalado (*Nou. Ann.* t. II, pág. 486), que si se tienen dos circunferencias tangentes exteriormente la una

á la otra y se dirige á estas dos circunferencias una tangente común, el radio de la primera siendo constante y el de la segunda variable, el punto de tangencia de esta segunda circunferencia describe una *cisoide*.

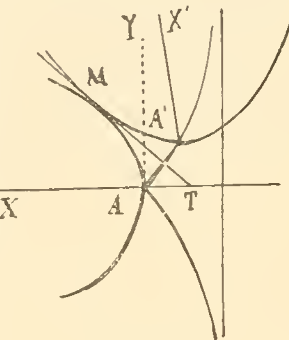


Figura 3.ª

—Se engendra también esta curva, según H. Lemounier (*Ann. Mathe*, t. II, 2.ª serie, pág. 460), tomando dos círculos sobre un plano; se hace mover un punto P sobre la circunferencia del primero, se toman los polares de este punto con relación á los dos círculos, y el lugar de los puntos de encuentro de las dos polares nos da la *cisoide*.

—Si sobre una parábola fija, cuyo eje es AX, rueda sin resbalar una parábola igual cuyo eje es $A'X'$, suponiendo que en el origen del movimiento los vértices A y A' están en contacto, el lugar del vértice A' es una *cisoide*, cuya ecuación será, siendo

$$AA' = \rho; \quad \widehat{A'AT} = \omega; \quad \rho = p\,\frac{\operatorname{sen}^2 \omega}{\cos . \omega}$$

y que tiene por asintota una perpendicular al eje de la parábola fija, trazada á la distancia p de su vértice.

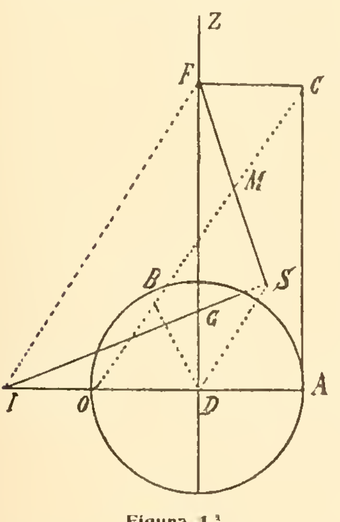
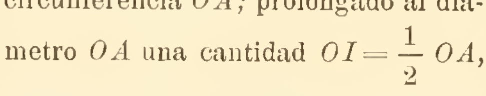


Figura 4.ª

—El lugar de los focos de las parábolas normales á una recta, y que la cortan en dos puntos fijos, es una *cisoide*. Mentión. (*Exercices de Geom. Analyt.*, A. Remond, pág. 248.)

Trazado.—A Newton se debe el siguiente medio para el trazado de esta curva por un movimiento continuo; imaginemos una escuadra, de la que uno de los lados, SI, es indefinido, y el otro, SF, es igual al diámetro de la circunferencia OA; prolongado al diámetro OA una cantidad $OI = \frac{1}{2}\, OA$,



se hace mover la escuadra en el plano, de modo que el lado indefinido pase constantemente por el

punto I, y el extremo F del otro lado recorra la línea DZ, prolongación del diámetro perpendicular á OA; el punto medio M del lado SF describe la *cisoide*, la que se puede comprobar con facilidad, geométricamente ó por el análisis.

Cisoide oblicua—Ecuación.— Como hemos dicho, el punto A está ahora sobre un punto cualquiera de la circunferencia, dirigiendo por A secantes tales como AD y tomando $AI = CD$, los puntos I

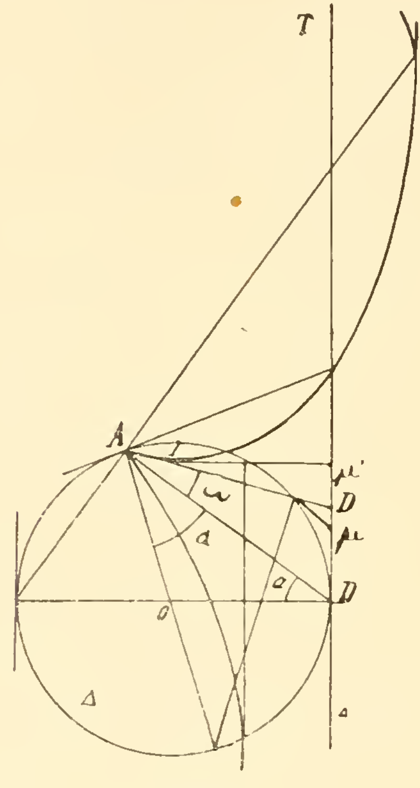


Figura 5.ª

son de la curva. Se tendrá, llamando α al ángulo de AB con OB, y ω al de la secante AD con AB,

$$AC = a \cdot \cos(\omega + \alpha); \quad AB = a \cdot \cos \cdot \alpha$$

y

$$\frac{AD}{\cos \cdot \alpha} = \frac{AB}{\cos(\alpha - \omega)} = \frac{a \cdot \cos \cdot \alpha}{\cos(\alpha - \omega)},$$

se tiene además

$$AI = \rho = AD - AC = \frac{a \cdot \cos^2\alpha}{\cos(\alpha - \omega)} - a \cdot \cos(\alpha + \omega),$$

y, por consecuencia,

$$\rho = a \frac{\cos^2\alpha - \cos(\alpha - \omega)\cos(\alpha + \omega)}{\cos(\alpha - \omega)},$$

ó, finalmente,

$$\rho = a \frac{\operatorname{sen}^2\omega}{\cos(\alpha - \omega)};$$

tal es su ecuación polar.

La ecuación cartesiana será:

$$(x^2 + y^2)(x \cdot \cos \cdot \alpha + y \cdot \operatorname{sen} \cdot \alpha) = a y^2.$$

La discusión de esta ecuación prueba que la curva tiene la forma general indicada en la figura.

Tangente.—Bastará tomar, como se indica en la figura, $D\mu' = D\mu$. Cuando el punto μ se aleja al infinito, se obtiene la tangente paralela á BT.

Cisoide elíptica.—Cuando la curva que hemos nombrado Δ es una elipse en vez de un círculo, se obtiene, según expusimos, la cisoide elíptica. Esta puede presentar las mismas variaciones que la cisoide circular, y, por tanto, se distinguirán, principalmente, la *recta* y la *oblicua* y se tendrán también las otras clases que en aquélla se comprendieron.

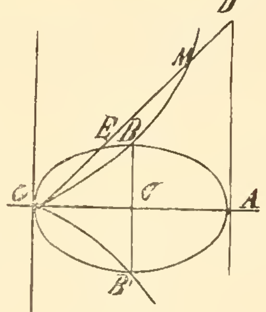


Figura 6.ª

Cisoide elíptica recta.—*Ecuación.*—Siendo ω el ángulo AOE, a y b los semiejes de la elipse y $OM = \rho$, se tendrá:

$$\rho = \frac{2a^3 \cdot \operatorname{sen}^2\omega\,(1 + i \cdot \operatorname{tg} \cdot \omega)}{a^2 \operatorname{sen}^2\omega + b^2 \cos^2\omega}.$$

á semejanza de la cisoide regular, esta curva será simétrica con respecto al eje OA, porque si se cambia el signo de ω no se altera el de

la abscisa, y cambia el signo de la ordenada á causa del factor $tg.\omega$ que contiene.

—Los puntos en que la cisoide corta á la elipse serán los B y C extremos de su eje menor, porque entonces

$$a^2 \operatorname{sen}^2\omega = b^2 \cos^2\omega;$$

y, por tanto, $tg.\omega = \pm \frac{b}{a}$, ó sea los puntos en que la tangente á la elipse es paralela á la recta OA, que son los B y C indicados.

La ecuación de la curva en coordenadas cartesianas es

$$y = \pm \frac{bx}{a}\sqrt{\frac{x}{2a - x}}. \qquad (1)$$

Cisoide elíptica oblicua.—Si en lugar de tomar dos vértices opuestos de la elipse, se toman los dos extremos de un diámetro para la generación de la cisoide, se obtiene esta curva.

Ecuación.—Llamando a la mitad del diámetro, cuyos extremos se han elegido, y b su conjugado, que será paralelo á la tangente trazada, tendremos los mismos cálculos que para el caso anterior, sin más diferencia que substituir el factor i por $\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$, siendo θ el ángulo de los diámetros conjugados, y la ecuación de la curva será:

$$y = \pm \frac{bx}{a}\sqrt{\frac{x}{2a - x}},$$

igual á la (1), si bien aqui está expresada en coordenadas oblicuas.

Las cisoides deducidas de las cónicas han sido estudiadas por Zahradnik y son cúbicas *unicursales* como todas las cisoides.— *Archiv. der Mathematik und Physik;* tomo LVI, pág. 8, y *Nouvelle Correspondance Mathematique,* 1874 y 75, pág. 86.

Clelias.

Definición.—Se ha dado este nombre á dos curvas de doble curvatura, de naturaleza especial, trazadas sobre la superficie de la esfera.

Historia.—El estudio de estas líneas y su denominación es debido

á Grandi (Francisco Luis Guido), matemático italiano, que vivió á fines del siglo XVII y principios del XVIII, y se encuentra en su obra *Flores geometrici ex rhodonearum et cleliarum curvarum descriptione resultantes* (Venecia, 1728), si bien Pappus en sus *Colecciones Matemáticas* había señalado algo relativo á estas líneas.

Ecuación.—Sus ecuaciones son:

$$\operatorname{sen}\lambda = l - h \operatorname{sen} kl \qquad \cos\lambda = h \,.\, \operatorname{sen} kl,$$

designando por l la longitud, λ la latitud y h la altura de la porción de esfera en que están situadas, supuesto igual á la unidad el radio de esta esfera.

Propiedades.—Una de estas curvas es la intersección de la superficie esférica con un helizoide rampante, que tenga por eje un diámetro de la esfera.

—En la obra citada de Grandi se encuentra la cuadratura de las porciones de la superficie esférica limitada por estas curvas.

Aplicaciones.—Estas líneas no tienen aplicación alguna, y de aquí que no se hayan hecho estudios ulteriores, sobre sus propiedades, á los que dejamos mencionados.

Coeficiente.

Definición.—Se da en Hidráulica el nombre de curva de los *coeficientes* á las que se obtienen considerando como abscisas las cargas sobre el vértice de un orificio de disposición determinada, abierto en pared delgada, y cuyas ordenadas son los valores de el coeficiente de gasto que corresponde á estas cargas.

Historia.—La idea de estas líneas es debida á Mr. Lebrós, el cual, en unión de Poncelet, hicieron en Metz, por los años de 1827 y 1828, experiencias muy notables para la determinación del valor de los coeficientes de gastos en circunstancias distintas, *Recueil des Savants étrangers* (1832), y principalmente la Memoria de Lebrós, premiada en 1850, insertas en el t. XIII de las *Memoires présentés par divers savants á l'Academie des Sciences de Paris.*

—Después se han hecho también diversas experiencias, siendo las más notables las de Mr. Boileau y Mr. Bazin.

Pueden consultarse, entre otras, las obras *Experiences sur la forme et la direccion des veines et courants d'eau lancés par divers ouvertures.* Bidone (Turín, 1829); *Essai sur les eaux courants*, de Boussinesq, y los *Traite d'Hydraulique*, de Bress, d'Aubuisson, etc.

Forma.—La curva media de los coeficientes de gasto, resultado de las experiencias de Lebrós y Poncelet, afecta para orificios en pared delgada de espesor no inferior á $0^m,03$ una forma parecida á la figura 1.ª La curva empieza por subir, presentando su concavi-

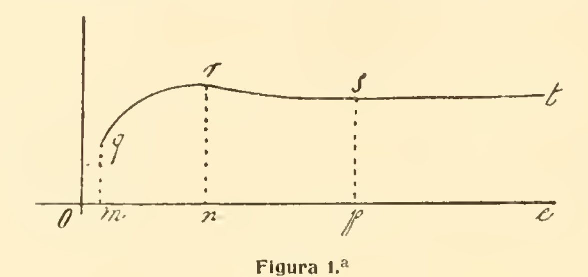


Figura 1.ª

dad al eje de las abscisas hasta un cierto máximo, para descender algo y cambiar de curvatura, continuándose después á partir de un cierto punto por una línea recta paralela al eje de las abscisas.

Para orificios de menos de $0^m,03$ de espesor, las mismas experiencias conducen á una curva que afecta la forma señalada en la figu-

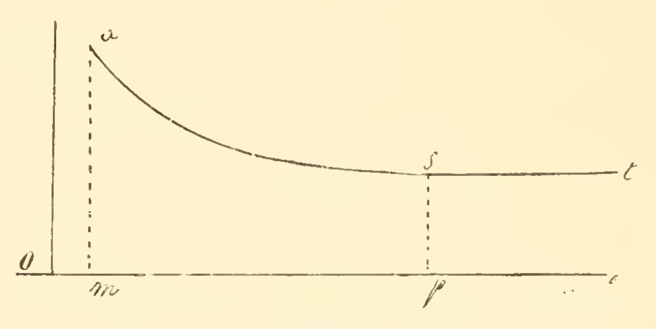


Figura 2.ª

ra 2.ª El máximum indicado en la figura 1.ª no se encuentra en este caso, y la curva desciende continuamente, presentando su convexidad hacia el eje de las abscisas, hasta que al llegar á un cierto punto *S* se continúa por una línea recta paralela á dicho eje, estando el punto *S* mucho más alejado del origen que el mismo punto *S* de la figura anterior correspondiente al primer caso indicado.

—En las experiencias ejecutadas en el depósito de Furens, todas las curvas de los coeficientes que se obtuvieron han sido de la forma de la figura 2.ª, y en ellas el punto *S*, á partir del cual el coeficiente

permanece constante, se encontró todavía más alejado del origen de coordenadas que en las experiencias de Lebrós.

— Si todos los orificios estuvieran sujetos á una misma ley, es claro no se tendrían diferencias tan marcadas como las que existen entre las dos curvas de Lebrós, lo cual demuestra que se trata de dos leyes diferentes, á cuya variación da lugar el menor espesor de las paredes de los depósitos, desarrollándose en los más delgados fenómenos de capilaridad, que si producen errores insignificantes para las grandes cargas, son muy dignos de apreciarse cuando las cargas son pequeñas.

— Mr. Boileau ha hecho también experiencias al objeto de obtener esta clase de líneas, y para ellas empleó una vertiente más larga que la usada por Poncelet y Lebrós, encontrando para valor del coe-

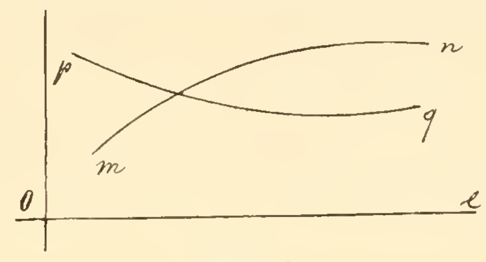


Figura 3.ª

ficiente medio un número casi igual al de estos experimentados, deduciéndose, por tanto, que la longitud del vertiente no ejerce sino muy pequeña influencia sobre el valor de los coeficientes de gastos. En cuanto á la curva que representa la ley de los coeficientes, según las experiencias de Mr. Boileau, afecta una forma tal como *mn* (fig. 3.ª), ligeramente cóncava hacia el eje de las abscisas, mientras que la curva de Lebrós tenía la forma *pq*, convexa respecto de dicho eje. Sin embargo, el valor del coeficiente medio obtenido, es, como hemos dicho, muy diferente.

Las experiencias de Mr. Bazin confirman las de Mr. Boileau, y las de Mr. Hirn, citadas por Lebrós en su *Hydraulique expérimentale*, confirman las de éste.

— Teniendo á la vista los resultados de estas representaciones y las tablas calculadas para valor de los coeficientes de gasto, por los distintos experimentadores que se llevan citados, se han deducido las siguientes consecuencias:

1.ª El coeficiente de pérdida depende del menor intervalo entre los bordes opuestos del orificio de salida, y permanece él mismo, to-

das las circunstancias idénticas, cualquiera sea la otra dimensión, siempre que ella no exceda de veinte veces la primera.

2.ª Todas las experiencias ejecutadas en una pared de espesor grueso, nos da, todas las demás circunstancias idénticas, los mismos resultados que en las de espesor delgado, cuando la vena se despega de todos sus bordes y sus cuatro lados están en un mismo plano vertical; en el caso en que el borde superior del orificio está formado por una paradera con un saliente de $0^m,05$ sobre el plano de los otros tres lados, Mr. Lebrós ha encontrado, comparativamente á los orificios practicados en un mismo plano vertical, aumentos relativos de pérdida variable entre 0,02 y 0,06; y

3.ª La disposición de las paredes y el fondo del depósito no tienen influencia marcada sobre el coeficiente de gasto, cuando el orificio está alejado de estos lugares; pero la influencia se hace sentir cuando la distancia de las paredes ó del fondo al borde correspondiente del orificio de salida, se reduce á 2,7 veces la longitud de éste.

— En el estudio de los canales se emplean también esta clase de líneas y para su trazado se toman por abscisas en lugar de la carga, el valor del radio medio.

Coincidencia.

Consideraciones generales.— Sabemos que un haz de curvas está caracterizado analíticamente por el hecho de que cada una de sus curvas depende linealmente de dos parámetros, y se podrá por consiguiente considerar éstos como las coordenadas de un punto de un plano.

En este supuesto, si designamos estas coordenadas por y_1, y_2, y_3, la ecuación del haz

$$\varphi y_1 + \psi y_2 + \chi y_3 = 0$$

asocia á cada punto y una curva del $m^{\text{ésimo}}$ orden, y á cada punto x una línea recta.

Si ahora consideramos, en general, dos sistemas de puntos representados por una ecuación homogénea, sea con relación á y, sea con relación á x y de los órdenes m y n con respecto á las x y las y respectivamente,

$$f(x^m, y^n) = 0, \tag{1}$$

á cada punto x corresponde una curva de $n^{\text{ésimo}}$ orden, y á cada punto y una curva de $m^{\text{ésimo}}$ orden.

—Si se nos dan dos sistemas de curvas de la especie (1),

$$f(x^m . y^n) = 0 \quad \text{y} \quad \varphi = (x^{m'} . y^{n'}) = 0,$$

á cada punto x del plano corresponden $\alpha' = nn'$ puntos y que son las intersecciones de las dos curvas, puestas en relación con este punto por $f = 0$ y $\varphi = 0$; del propio modo á cada punto y del plano corresponden $\alpha = mm'$ puntos x y se puede determinar cuáles son los puntos x que coinciden con sus puntos correspondientes y. Bastará hacer $x = y$ en las ecuaciones $f = 0$, $\varphi = 0$ para encontrar estos puntos que se llaman *puntos de coincidencia* y que serán las intersecciones de las dos curvas.

$$f(x^m, x^n) = 0, \qquad \varphi(x^{m'}, x^{n'}) = 0.$$

El número de estos puntos será

$$(m + n)(m' + n') = mm' + nn' + mn' + nm' = \alpha + \alpha' + \beta,$$

siendo

$$\beta = mn' + nm'. \qquad (1)$$

Definición.—La curva cuyos puntos son todos de coincidencia, es la curva de este nombre.

Historia.—Puede consultarse sobre esta línea, entre otros trabajos, los de Salmon, *Geometry of three dimensions* (2.ª edición, 1865), y los de Zenthen, *Comptes rendus des séances de l'Académie de Sciences* (1874).

Propiedades.—La cantidad β es en (1) igual al orden de la curva que describe un punto y, si x avanza sobre una recta. La curva recorrida por x, cuando y describe una recta, es del mismo orden.

—Si admitimos que á un punto x corresponden α' puntos y, y que á un punto y corresponden α puntos x; que además β es el orden de la curva que recorren los puntos y homólogos de x cuando x describe una recta, se podrá enunciar esta suposición, diciendo que, sobre una recta cualquiera deben existir β pares de puntos tales, que uno de sus puntos se encuentre comprendido en el grupo de los puntos homólogos de otro. Bajo esta forma β depende simétricamente de

los grupos de puntos x é y; β es, por tanto, al mismo tiempo, el orden de la curva que describen los puntos x homólogos de y cuando y avanza sobre una recta.

—Si designamos por γ el orden de la curva de coincidencia y por δ la clase de la curva, cuyas tangentes unen un punto x de la curva de coincidencia al punto homólogo y, que le es infinitamente próximo, y si se da en un plano una correspondencia en virtud de la cual se verifican las circunstancias anteriormente expuestas, se tendrán en el plano

$$\alpha + \alpha' + \beta - \gamma - \delta$$

puntos, en que dos puntos homólogos x é y se confunden, es decir, puntos de coincidencia.

Aplicaciones. —Las propiedades enunciadas son de aplicación para encontrar cierto género de proposiciones importantes; así, por ejemplo, la siguiente:

«En general existen

$$(n-1)^2 + (n-1)(n'-1) + (n'-1)^2,$$

puntos en los cuales las polares lineales con relación á una curva de $n^{\text{ésimo}}$ orden y con relación á otra del orden $n'^{\text{ésimo}}$ se confunden».

Son también de importante aplicación en la teoría de *connexos*. *Analytrich Geometrische Entwicklunger* (t. II, 1881), Plücker, y *Bulletin des Sciences mathematiques et astronómiques* (2.ª serie, t. II), y *Bulletin de la Société mathematique de France* (t. VII), por M. M. Darboux y Fouret.

Colatitud.

Definición. — Se nombra así al complemento de la latitud (ver esta voz) de un lugar, ó sea el ángulo que forma la vertical con el eje de la tierra, el cual es medido por un arco de meridiano. Fontecha, *Astronomía Náutica* (pág. 113).

Coluros.

Del griego (κόλουρον, de κόλον, truncado, y de οὐρά, cola; denominaciones cuyo origen no es conocido).

Definición. — Se denomina *coluros* á dos círculos máximos que se cortan perpendicularmente en los polos de la esfera celeste.

Clasificación.— De estos dos círculos, uno pasa por los puntos equinocciales y se llama *coluro de los equinoccios*, y el otro por los puntos solsticiales, y se denomina *coluro de los solsticios.*

Propiedades.— Estos círculos dividen á la eclíptica y al ecuador en cuatro partes iguales y sirven para distinguir las estaciones.

—El coluro de los equinoccios forma con la eclíptica un ángulo aproximado de 66° 32′ 45″, mientras que el coluro de los solsticios es perpendicular á dicho plano, puesto que, pasando por los puntos solsticiales y por los polos del mundo, debe pasar, al propio tiempo, por los polos de la eclíptica, que están á 23° 27′ 15″ de los polos del mundo, y, por lo tanto, un círculo máximo que pasa por los polos de otro, le es perpendicular. Así, pues, los puntos equinocciales son los polos del coluro de los solsticios, y los puntos de intersección del coluro de los solsticios y del ecuador, son los polos del coluro de los equinoccios.

Compañera.

Definición. — Se conoce con el nombre de *compañera* á toda curva que sigue á otra en su desarrollo. Tal es, por ejemplo, la *contravoluta* ó *compañera* de la voluta.

Historia. — La denominación de *compañera* aparece en la ciencia aplicada por Roberval, *De trochoide ejusque spatio*, á una curva que nombra *compañera de la trocoide* y que define diciendo, es el lugar de la proyección de un punto de la trocoide sobre el diámetro, perpendicular á la base, del círculo generador que pasa por este punto. Wallis la dió el nombre de *curva de los senos-versos.*

Roberval se sirve de esta curva para determinar la cuadratura de la cicloide y para hallar los volúmenes engendrados por el área de esta curva girando alrededor de la base, del eje ó de la tangente en su vértice.

— Para determinar la cuadratura, tomando por eje de las x la base y por origen el punto de retroceso, la ecuación de la cicloide es:

$$x = r\omega - r \,.\, \text{sen}\,.\, \omega \qquad y = r\,(1 - \cos\,.\,\omega),$$

siendo ω el ángulo en el centro, correspondiente al arco desarrollado. Roberval descompone la abscisa en sus dos partes $r\omega$ y $-r.\ sen.\ \omega$, y es $r\omega$, lo que toma por abscisa de la compañera, cuya ecuación es

$$y = r\left(1 - \cos\frac{x}{r}\right)$$

la de una sinusoide.

Por este artificio se ve que el área comprendida entre la curva y su base se compone del área de la compañera limitada de la misma manera y del área comprendida entre las dos curvas. Ahora, el área de la compañera es evidentemente mitad del área del rectángulo circunscrito á la cicloide, y, por otra parte, el área comprendida entre la cicloide y su compañera, que por un nuevo artificio, considera como compuesta de elementos paralelos á la base, es, evidentemente, igual al área del círculo generador; siendo la ordenada común á las dos curvas $r.\ sen.\ \omega$, aquélla del círculo, y la abscisa relativa de la una con relación á la otra, la abscisa de este círculo generador, contado á partir de su diámetro vertical.

El área comprendida entre la cicloide y la base es, por tanto, igual á la mitad del área del rectángulo, cuyos lados serán la circunferencia del círculo generador desarrollado, y el diámetro de este círculo, aumentado del área del mismo círculo, es decir, que será:

$$\frac{1}{2}\,2\pi R\,.\,2\,R + \pi R^2 \quad \text{ó} \quad 3\pi R^2.$$

— Para hallar el volumen engendrado por el área de esta curva girando, por ejemplo, alrededor de la base, transforma de la misma manera que en el caso anterior, la cuestión del volumen engendrado por el área comprendida entre las dos curvas, girando alrededor de la base, y considera esta área como compuesta de elementos rectangulares comprendidos entre dos paralelas á esta base. El círculo generador intercepta, sobre estas paralelas, dos partes respectivamente iguales á aquellas que están comprendidas entre las dos curvas, los volúmenes engendrados por los segmentos del área comprendida entre las dos curvas y por los segmentos del círculo generador, son iguales, puesto que los segmentos son dos á dos iguales y están igualmente distantes del eje de rotación. Así, el volumen engendrado, por la rotación, alrededor de la base del área comprendida entre la cicloide y su compañera, es igual al volumen engendrado por el círculo generador, girando alrededor de esta misma base, es decir,

$$2\pi^2 R^3;$$

es, pues, los $\frac{2}{8}$ del volumen engendrado por el rectángulo circunscrito á la cicloide, puesto que este volumen es

$$4\pi R^2 \times 2\pi R.$$

El volumen engendrado por la cicloide, girando alrededor de su base, es, por consiguiente, los $\frac{5}{8}$ del volumen engendrado por la rotación, alrededor de la misma base, del rectángulo circunscrito á esta curva.

Siguiendo este procedimiento, evalúa Roberval los volúmenes engendrados por la cicloide, girando, bien alrededor del eje de la curva, bien alrededor de la tangente á su vértice.

— Lagrange, en su obra *Addition aux premieres recherches sur la nature et la propagation du son (Miscellanea Tausinensia*, 1760-1761), al ocuparse del problema *De Chordis vibrantibus*, dada por Taylor en su obra *Methodus incrementorum directa é inversa* (Londres, 1715-1717), traduce el pensamiento de éste, diciendo que *este geómetra cree que las figuras afectadas por la cuerda no podían ser otras que las de una especie de cicloide alargada que él llama compañeras de la cicloide;* pero Taylor no designa la curva de que habla, con el nombre de *sinusoide* (aun conociéndola) porque esta palabra no estaba aún inventada y por darle algún nombre, usó el de *compañera de la cicloide*, que le había dado Roberval, y que, sin duda, Lagrange ignoraba: nota histórica que aquí apuntamos, por referirse á la curva de que nos venimos ocupando, y evitar confusiones en aquellos de nuestros lectores que consulten estas obras.

Compensación.

Definición.—Se da este nombre en Estereotomía á la curva que en los trazados gráficos de escaleras, en parte recta y en parte curva, sirve para determinar la dirección de las aristas de los escalones, de modo que éstas resulten en las mejores condiciones de comodidad para el paso.

Trazado.—Sea (fig. 1.ª) la proyección horizontal de una escalera, en parte recta y en parte curva, y *mon* la línea de huella. Se divide esta curva en tantas partes iguales entre sí cuantos sean los escalones que se hayan calculado establecer, y por cada uno de los

puntos de división se trazarán las normales á la curva exterior del ojo de la escalera, lo cual determinará los puntos 1, 2, 3, 4... y se ve desde luego resultará un cambio brusco de pendiente al pasar de la parte recta de la escalera á la parte curva, puesto que la disminución de los escalones por el lado del ojo se hace de una manera súbita, y el cambio sería incómodo y el servicio de la escalera molesto.

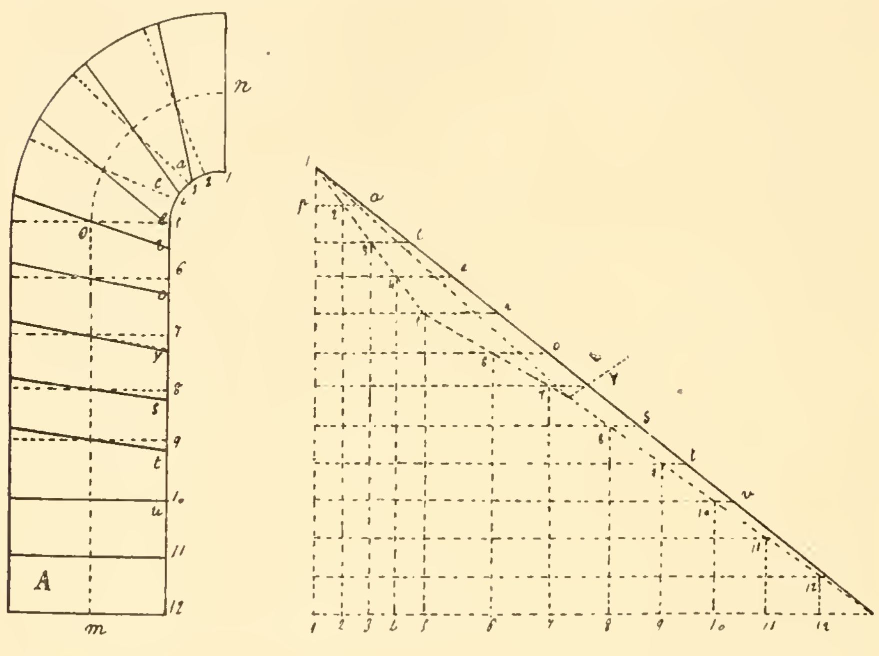


Figura 1.ª. Figura 2.ª.

Al objeto de remediarlo, se hace disminuir gradualmente la longitud del ancho de los escalones por la parte del ojo, repartiendo la disminución sobre un número mayor ó menor de escalones, y en el modo de verificar este reparto consiste el problema de la compensación.

Para resolver este problema haciendo uso de la *curva de compensación*, se procede de la manera siguiente: Se toman los arcos 1 — 2, 2 — 3, 3 — 4... á continuación los unos de los otros, sobre una recta horizontal 1 — 12 (fig. 2.ª), y se traza una perpendicular por cada uno de estos puntos hasta el encuentro de la horizontal, que determina la altura del escalón correspondiente. Se obtiene por este medio la línea quebrada 1 — 5 — 12, que representa el desarrollo de la curva que pasa por los ángulos salientes de los peldaños. Para

hacer desaparecer el ángulo 1 — 5 — 12 que forman las dos líneas rectas obtenidas, se reemplazan las 1 — 5 y 1 — 12 por una curva que sea tangente en los puntos en que principia y termina la compensación, dando lugar á la curva de este nombre.

Se resuelve mejor el problema, después de obtener la línea 1 — 5 — 12, haciendo las construcciones siguientes: Se prolonga la horizontal del punto 2 hasta que la distancia *pa* sea suficiente para poder poner el pie sobre ella; se traza la recta 1*a*, que se prolonga hasta el punto 13, en que encuentra á la recta 5 — 12. Ahora, se reemplazará el trazado 1 — 5 — 12 por la línea quebrada 1 — 13 — 12, y resultarán alargadas gradualmente el ancho de los escalones en la parte que toca al muro interior. Respecto al ángulo formado en el punto 13 se le hará desaparecer, reemplazando la línea quebrada 1 — 13 — 12 por un arco de círculo ó curva de dos centros, que será la *curva de compensación* en este caso, tangentes á las rectas 1 — 13 y 13 — 12. Las distancias 2 — *a*, 3 — *c*, 4 — *e*... referidas á la curva 1 — 2 - 3... de la figura 1.ª darán las aristas de los escalones con los puntos correspondientes de la línea de huella, quedando el problema resuelto.

—También se puede resolver este problema sin hacer uso de la curva de compensación y solamente sirviéndose del cálculo.

—Pueden ser consultadas, entre otras, las obras *Traité de l'art de la Charpenterie*, A. R. Emy; *Traité de la construction des escaliers*, Aubineau, y las obras de *Coupe des pierres*, de Douliot, Adhemar, Chaix, Launoy, Pillet, Monduit, etc.

Cóncava.

Del latín, *cóncavus*.

Definición.—Se dice que una curva es *cóncava* con respecto á una recta, cuando está comprendida entre su tangente y dicha recta, ó en otros términos: una curva presenta su *concavidad* del lado en que ella se encuentra con relación á su tangente.

Propiedades.—El sentido de la concavidad de una curva es el opuesto al sentido de la convexidad (ver convexa).

—Si la curva es plana y está referida á coordenadas rectilíneas, el coeficiente angular de su tangente es $\frac{dy}{dx}$, la curvatura de la curva está dirigida del lado de las *yy* positivas ó del lado de las *yy* negativas, según que $\frac{dy}{dx}$ crece ó decrece en el mismo tiempo que x; es

decir, según que la derivada de $\frac{dy}{dx}$ ó $\frac{d^2y}{dx^2}$ es positiva ó negativa. Los puntos en que $\frac{d^2y}{dx^2}$ tenga los valores cero ó infinito son puntos singulares.

—Cuando la curva está referida á coordenadas polares ρ y ω, se determina el sentido de su curvatura, comparando las derivadas segundas de ρ con relación á ω, formadas en el punto de contacto por las ecuaciones de la curva y de su tangente.

La curva se encuentra, en efecto, del otro lado de la tangente, con relación al polo, cuando $\frac{d^2\rho}{d\omega^2}$ es mayor para la curva que para la tangente.

Concéntricas.

Definición.—Reciben este nombre curvas cualesquiera que tienen un mismo centro.

Centro.—En el círculo, el centro es el punto que dista igualmente de todos los de la circunferencia; en una cónica, es aquel que divide sus diámetros en dos partes iguales, y en una curva de más alta especie, es el punto en que concurren dos diámetros, y cuando todos los diámetros concurren en el mismo punto se llama *centro general.*

Historia.—Las obras en que con particularidad se define el centro de las líneas y se trata de las concéntricas primeramente, son las de el Abad de Gua, *Usages de l'analyse de Descartes*, y de Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes.*

Caso particular.—Dos círculos serán concéntricos si sus ecuaciones difieren sólo en los términos independientes.

—También se dice círculos *subconcéntricos* cuando son casi concéntricos.

Concoides.

Del griego (κογχοειδής).

Definición.—Sea C una curva dada y O un punto fijo; si se toma sobre C un punto M y sobre el radio vector OM, á un lado y otro del punto M, magnitudes $MI = MI' = h$, siendo h una longitud fija dada de antemano, á cada punto M corresponderán dos puntos I é I'. El lugar descrito por estos puntos es una curva á la que se da el nombre de *concoide* de la curva dada C.

Resulta de esta definición que, para cada curva C, existen dos concoides, una, $C'C$, y otra, $C''C_2$; la primera se denomina *citerior*, y la segunda *ulterior*.

Ecuación.—Si se designa por $f(\rho, \omega) = 0$, la ecuación polar de C, las de las concoides serán $f(\rho \pm h, \omega) = 0$; el signo más, para la ulterior, y el menos para la citerior.

Tangente.— Para trazar la tangente en un punto tomado sobre esta curva, se describe desde el punto O como centro, y con h por radio, un círculo, y consideremos dos puntos tomados sobre C. El teorema conocido sobre las transversales recíprocas prueba que,

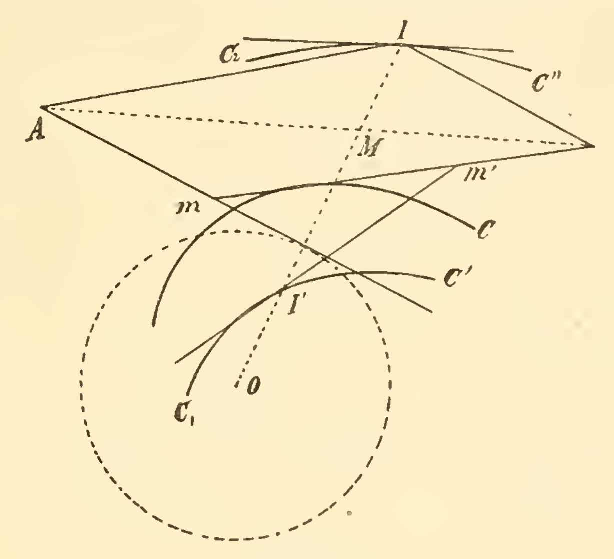


Figura 1.ª

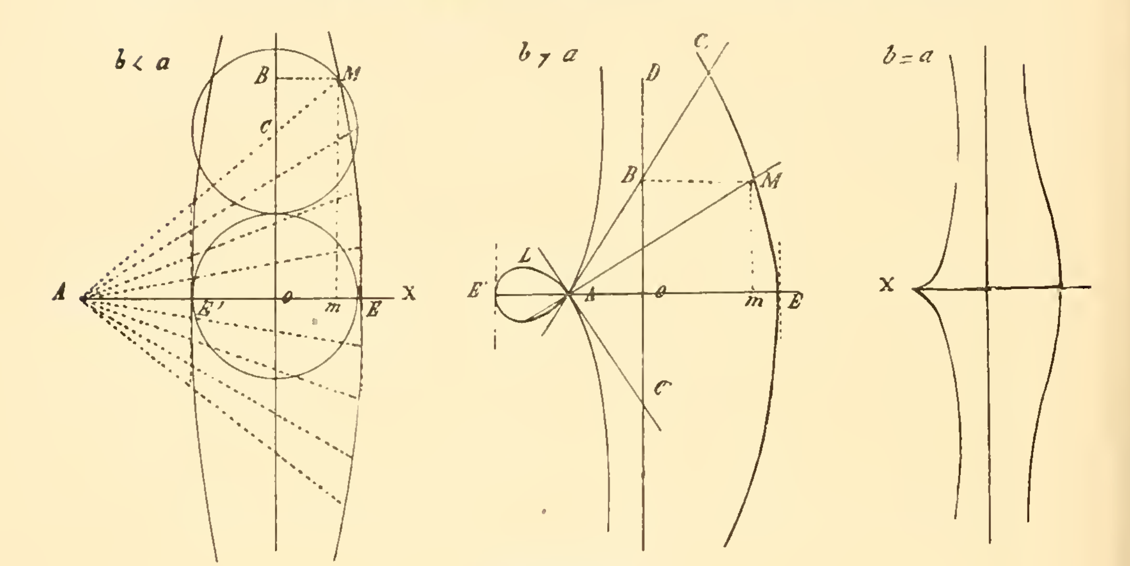
tomando $Mm' = Mm$, la recta $m'I'$ es la tangente en el punto I'. Este mismo teorema aplicado al punto I, muestra, que si se construye el paralelogramo $mAIB$, la tangente en el punto I á la concoide, es paralela ó la diagonal AB de este paralelogramo.

Clasificación.— Dos son principalmente las clases de concoides que han sido estudiadas por los geómetras. la *concoide de recta ó de Nicomedes* y la de círculo ó *caracol de Pascal*.

Concoide de recta ó de Nicomedes.— Definición.— Es aquella concoide en la que la curva C es una línea recta.

Historia.— Proclus, filósofo platoniano del siglo v, atribuye el descubrimiento de la concoide á Nicomedes, cuyas obras se han perdido, y que vivió, según unos, ciento cincuenta años antes de la

era vulgar, y según otros, uno ó dos siglos después. Era, por medio de esta curva, él, como Nicomedes, trataba de resolver los problemas tan célebres en la antigüedad, de la trisección del ángulo y de las dos medias proporcionales. Viete fué el primero en señalar que se pueden referir á estos dos problemas la resolución de las ecuaciones de tercer y cuarto grado, cuando dice: «*Generaliter, id verum est, opere saltem alterutro, vel constructionis duar um mediarum continue proportionalium interdatas, vel sectionis anguli in tres partes æquales, omnia problemata, alioqui non solublia, explicari, in quibus cubi solidis, vel quadrato-quadrata plano planis sine adfectione vel cum ad-*



Figuras 2.ª, 3.ª y 4.ª

fectione adæquantur» (pág. 256, edición de Schooten, 1646, Supp. geometría prop. XXV.) Newton se sirvió de la concoide, con preferencia á las cónicas, para construir dichas ecuaciones, por ser mecánicamente más simples que aquéllas (*Arithmetique universelle de Newton*, traducción al francés de Nöel Beaudeux, t. II, pág. 52).

Asimismo se han ocupado de esta curva, Pappus en el libro IV de las *Collections mathematiques* que juntamente con la cuadratriz, etc., la aplica á la trisección del ángulo y otros problemas; P. Nicolás, *De conchoidibus* (1696); Lahire, *Memoire sur les conchoides* (1708); Wolf, *Elementa matheses* (T. I, pág. 371); Bernouilli, *Opera* (T. III, página 400) y otros geómetras, tales como Mac-Laurin, Euler, Carnot, etcétera, y en diferentes trabajos insertos en las *Memoires de l'Acade-*

mie des Sciences (1708, 1733, 1734 y 1735) y Mr. Midy, que en los *Nouvelles Annales de Mathematiques* (T. II, pág. 281) ha discutido sus formas.

Ecuación.—Sea A el origen de las coordenadas y AX el eje de las x; si se hace $AO = a$, $Am = x$, $Mm = y$; $OE = CM = OE' = b$; se tendrá

$$Om = Am - AO = x - a,$$

la ecuación de la concoide será:

$$y^2 = \frac{x^2 (b^2 - (x - a)^2)}{(x - a)^2}.$$

Si se designa por φ el ángulo variable EAM y por z la recta variable AM ó AE, la ecuación polar será

$$z = \frac{b}{\cos . \varphi} \pm a,$$

el signo más es para la concoide ulterior y el menos para la citerior. —La recta es una asíntota de la curva.

Construcción de la curva.—La curva es simétrica con relación al eje de las x, porque su ecuación no contiene más que potencias pares de la ordenada; de esta ecuación resuelta con relación á y se deduce:

$$y = \frac{x}{x - a} \sqrt{(a + b - x)(x + b - a)}, \qquad (1)$$

tomando el signo más del radical.

Primer caso $= b > a$.—Para que la ordenada y sea real, es necesario que x esté comprendida entre $a + b$ y $a - b$, la curva está, pues, toda entera situada entre las rectas E, E' que tienen respectivamente por ecuaciones

$$x = a + b \qquad x = -(a - b).$$

Cuando x varia de $-(a - b)$ á o, y es positivo, parte del valor o, crece luego y decrece para llegar á hacerse nulo; se obtiene así el arco $E'LA$.

x variando desde o hasta $a - \varepsilon$, y viene á ser negativo y varía de o á $-\infty$, lo que nos da un arco asintótico á la recta D del lado de las y negativas.

Por último, variando después $a + \varepsilon$ hasta $a + b$, y vuelve á ser positiva, decrece de $+\infty$ á o y nos da el arco $C_1 ME$ asintótico de la recta D.

Se obtiene toda la curva construyendo la otra mitad simétrica con respecto á la recta AX.

Tangente en el punto A. — El coeficiente angular m de la recta AM, tiene por expresión:

$$m = \frac{y}{x} = \frac{1}{x - a} \sqrt{(a + b - x)(x + b - a)};$$

cuando x tiende hacia o, este coeficiente angular tiende hacia

$$-\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a},$$

siendo fácil el verificar que la tangente en el punto A no es otra sino la recta AC'.

Tangente en el punto E.—El coeficiente angular m' de la recta EM, tiene por valor,

$$m' = \frac{y}{x - a - b} \doteq - \frac{x}{x - a} \sqrt{\frac{x + b - a}{a + b - x}}.$$

se ve que m' viene á ser infinita cuando el valor de x tiende á acercarse á $a + b$; la tangente en el punto E es, pues, paralela al eje de las y.

Se verá, del propio modo, que la tangente en el punto E' es también paralela al eje de las ordenadas.

La curva tiene la forma indicada en la (fig. 3.ª)

Segundo caso $= b = a$. — La ecuación (1) será:

$$y = \frac{x}{x - a} \sqrt{x(2a - x)},$$

la vuelta $A\ L\ E'\ A$ desaparece, y el origen A es un punto de retroceso (fig. 4.ª)

Tercer caso $= b < a$. — La abscisa x puede variar entre los valores positivos $a - b$ y $a + b$; la curva no pasa por el origen A; tiene la forma indicada en la (fig. 2.ª). Este último caso da lugar á una importante consecuencia; la de que el origen sea un punto *aislado* ó *conjugado*, puesto que sus coordenadas satisfacen á la ecuación de la curva, y por dicho punto no pasa ninguna de las ramas de ésta.

Aplicaciones. — En Mecánica se ha usado de esta curva para los paralelogramos de las máquinas (*Guía Meunier*, t. I, pág. 417) y en Arquitectura para el trazado del galbo (ver esta voz) de las columnas, siéndole muy aproximada, la del trasdós en las bóvedas. (Ver trasdós.)

Concoide de círculo ó Caracol de Pascal. — Es aquella concoide en la que la curva C es una circunferencia de círculo.

Historia. — Este nombre ha sido dado por Roberval, según se indica en una Memoria de Lahire, inserta en el volumen de *L'Academie des Sciences* de París del año 1708, pág. 46.

También ha sido estudiada por Quetelet (*Nov. Mem. de l'Acad. de Bruxelles*, t. III, pág. 131).

Ecuación y forma de la curva. — Sea R el radio del círculo, tomando el diámetro AO como eje polar, se tiene, siendo $MP = d$, como ecuación del lugar de los puntos P,

$$\rho = 2R \cdot \cos \cdot \omega + d,$$

y tomando $MP' = MP$ en la dirección MA, se tiene para ecuación del lugar de los puntos P',

$$\rho = 2R \cdot \cos \cdot \omega - d;$$

pero si se hace variar ω de una manera continua, se está obligado á construir los dos lugares; las dos ecuaciones coinciden, y si se cambia en la primera ω por $(\pi + \omega)$ y ρ por $(-\rho)$, se cambia en la segunda.

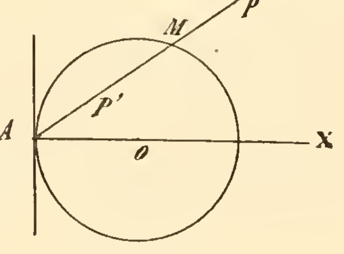
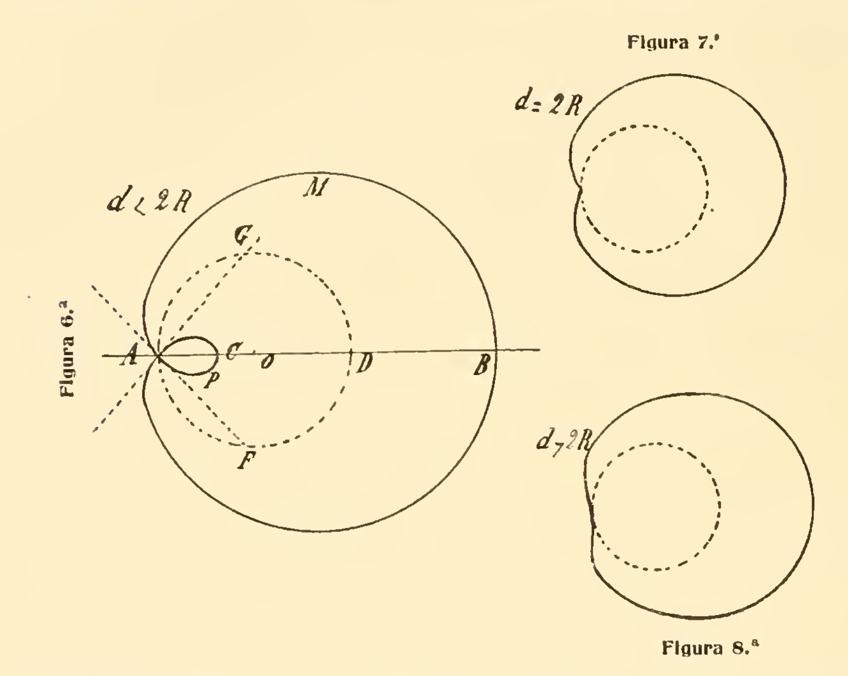


Figura 5.ª

Permaneciendo ρ finita, examinaremos las condiciones en que ρ se puede anular, distinguiendo tres casos; según que d sea menor, igual ó mayor que $2R$.

Primer caso. — $d < 2R$; ρ se anula para $\cos. \omega = \frac{d}{2R}$, la curva (fig. 6.ª) tiene un punto doble en el

polo y se construye fácilmente por puntos; las tangentes en el polo son las cuerdas AF y AG de la circunferencia, iguales en longitud á d. La curva simétrica, con relación al eje polar, encuentra este eje en los puntos B y C, obtenidos, tomando $DB = DC = d$; en estos puntos la tangente es perpendicular al eje polar; el arco continuo $BMAPC$ corresponde, por la parte BMA, á una longitud, d, llevada al lado del extremo del radio vector, contado á partir del polo, y por la parte APC, á una longitud d, contada en sentido contrario; se ve que la continuidad exige que se considere á la vez los dos lugares, cuya definición geométrica es, por tanto, diferente.



Segundo caso. — $d = 2R$. La curva presenta un retroceso en el origen, la tangente, siendo el eje polar, tiene la forma indicada (fig. 7.ª), no teniendo ningún punto en el interior del círculo. Esta curva particular se denomina *cardioidea* (ver esta voz).

Tercer caso. — $d > 2R$. La curva tiene un punto aislado ó polo y presenta la forma señalada en la (fig. 8.ª)

La ecuación de esta curva en coordenadas cartesianas es:

$$(x^2 + y^2 - 2Rx)^2 = d^2 (x^2 + y^2).$$

Propiedades. — Esta curva se puede considerar como el lugar de las

proyecciones de un punto sobre las tangentes á una circunferencia. Si el punto está sobre la circunferencia es una cardioidea.

—El lugar del vértice de un ángulo constante cuyos lados son tangentes á dos circunferencias dadas, se compone de diferentes caracoles de Pascal. Durante el movimiento del ángulo constante, un punto cualquiera describe sobre el plano de los dos círculos un caracol de Pascal; una recta cualquiera, una envolvente de la circunferencia y un punto cualquiera del plano fijo de los dos círculos, traza sobre el plano móvil una elipse.

Si se considera una posición cualquiera del ángulo móvil, la circunferencia que pasa por el vértice de este ángulo y por los puntos de contacto de sus lados y de las circunferencias dadas, contienen los polos de los caracoles de Pascal, del lugar precedentemente enunciado. El lugar de los centros de estas circunferencias, se compone de dos circunferencias (Mr. Mannheim, *Nou. Annales,* T. XV, página 289).

—La cáustica, por reflexión de un círculo, es una evoluta de un caracol de Pascal.

Congruentes.

Del griego προσαρμόςετ.

Definición.—Se ha dado este nombre á las líneas rectas ó curvas que tienen entre sí cierta condición de conmensurabilidad.

Historia.—El primero que aplicó esta denominación á la clase de líneas indicadas, fué Euclide en su Libro X, proposición LXXX. Esta palabra fué transportada por Gauss á la Aritmética, formando la base de una doctrina que forma época en la teoría de los números.

Cónicas.

Definición. — Se llaman *cónicas,* las secciones planas del cono de segundo grado, es decir, aquellas curvas cuyas ecuaciones pueden ser referidas á la forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

— C. Meray las define diciendo, que una *cónica* es el lugar de los puntos intersección de los radios homólogos de dos haces homográficos.

— También se puede definir una *cónica* diciendo que es la envolvente de las rectas que unen los puntos homólogos de dos divisiones homográficas.

Clasificación. — Las cónicas en general se dividen en tres géneros, *elipse, parábola é hipérbola;* según circunstancias particulares, que luego señalaremos, de la ecuación que las representan.

— También se suele tener en cuenta para clasificarlas los puntos de las mismas, situados en el infinito; si se supone transportado uno de los haces generadores paralelamente á sí mismo, de manera que su centro coincida con el del otro, se pueden distinguir tres casos: á saber, los radios dobles pueden ser reales y diferentes, imaginarios ó coincidentes. En el primer caso los puntos de la curva situados en el infinito son reales y diferentes, la curva tiene dos asíntotas reales paralelas á los radios dobles y es una *hipérbola;* en el segundo caso, los puntos en el infinito son imaginarios, la curva es una *elipse,* y en el tercer caso, los puntos en el infinito coinciden, la curva es una *parábola.*

— Algunas veces se las clasifica, considerándolas en tres grupos, según tengan un centro único, un centro en el infinito ó una infinidad de centros en línea recta.

Historia. — El primero que se ocupó de la teoría elemental de las cónicas, fué Ménechme (— 375), por lo cual estas curvas llevaron en la antiguedad el nombre de curvas de Ménechme (ver esta voz), si bien Pappus, en el prefacio del libro VII de sus «Colecciones Matemáticas» *Pappi Alexandrini Collectiones mathematicæ á Federico Commandino in latinum versæ et comentariis illustratæ* (Pisauri, 1588), dice que fué Aristeo (— 350) el primero que publicó una obra dividida en cinco libros sobre las secciones cónicas; que luego Euclides (— 285) escribió cuatro, y á los cuales Apolonio (— 247) añadió otros cuatro, siendo probable que se sirviera de los de los anteriores en sus primeros cuatro libros.

De las obras de Euclides, las mejores ediciones son: *Euclidis opera eum Theonis, expositione* (en griego, Bâle, 1650) y *Euclidis quæ supersunt omnia* (en griego y latín, Oxford, 1703); así como aquellas de Apolonio las hemos indicado en la *voz (apoloniana).* Los cuatro primeros libros del texto griego existen manuscritos en la Biblioteca Royale, Bodreyenne, en el Vaticano, en Munich y en Milán.

Serenus, que vivió hacia el año 10 de nuestra era, escribió dos obras, una sobre las secciones del cono y otra de las del cilindro, identificándolas entre sí.

—A partir del siglo XVII adquirió gran importancia el estudio de

las cónicas y á raíz de haber publicado Descartes su libro de *Los principios;* Desargues lo hace de su obra *Traité des sections coniques*, 1639, y Pascal del *Essai pour les coniques*, 1640, presentando esta teoría de una manera nueva y más general que lo había sido hasta entonces.

De esta época se pueden señalar muchas obras, escritas por matemáticos de diversas nacionalidades, que prueban lo que antes decimos, y asi entre otras citaremos las siguientes.

—*De organica sectionum conicarum descriptione*, Schooten, profesor de Leyde, 1646.

—*Quadrature de l'hyperbole, de l'ellipse et du cercle*, Huyghens (1651), obra en la cual, después de Gregoire de Sain-Vicent, el autor hace nuevas aproximaciones entre estos géneros de cónicas.

—*Traité analytique des sections coniques* (Wallis, 1655), en la que se considera por primera vez estas curvas, no como secciones de un cono, sino como curvas de segundo grado, siguiendo el método de coordenadas de Descartes; todas sus propiedades están deducidas de su definición analítica.

Geometriæ speciosæ elementa in sex partes distributa, Mengoli (Bologne, 1659), trata de las cónicas y de sus cuadraturas.

—*Traité analytique des sections coniques,* Kinckhuysen, geómetra holandés, 1660, fué con Schooten, de los que contribuyeron primeramente al desarrollo de la doctrina de las coordenadas de Descartes.

—*Traité des sections du cylindre et du cone,* Le Poivre, geómetra flamenco (París, 1704), una de las obras más estimadas de aquellos tiempos.

—*Exercitatio geometrica in qua agitur de dimensione omnium conicarum sectionum*, etc., Lorenzini, matemático italiano (Florencia, 1721). Esta obra está publicada por el P. Celestino Rolli.

—*Traité des sections coniques,* Rober Simson, geómetra escocés, 1735.

—*De æquatione generali sectionum conicarum*, Horrebov, astrónomo danés (Copenhague, 1748).

—*Sectionum conicarum, libri VII,* Robertson, geómetra inglés, 1793.

—*Nouvelles séries pour la cuadrature des sections coniques et pour le calcul des logarithmes*, W. Wallace, matemático escoces, 1808.

—*Geometrical analyses and geometry of curve lines*, J. Leslie, matemático escocés (Edimburgo, 1809, 1821); obra en la que se encuentra la solución de algunas dificultades relativas á la obra perdida de Apollonius *De sectione determinata* y una construcción de las cónicas por la intersección de dos rectas móviles alrededor de dos polos fijos que viene á ser la de Lahire.

—A Quetelet se debe la demostración geométrica, hoy día universalmente adoptada, de la identidad de las secciones cónicas con las curvas de segundo grado, y Dandelin extendió el método de Quetelet á las cónicas consideradas en el cono oblicuo.

—Respecto á obras más recientes, su número es indeterminado, siendo los matemáticos que más han contribuído á elevar estas curvas á la importancia que han alcanzado, Darboux, Cayley, Salmon, Sturm, Chasles, Wolstenholme, Longchamps, Kæhler y otros, cuyos trabajos están hoy en manos de cuantos al estudio de estas ciencias se dedican.

Discusión de las cónicas.—Adoptamos en este artículo y en los siguientes la notación inglesa, por ser preferible á la nuestra bajo el punto de vista de simetría de las fórmulas, y así por consiguiente escribiremos la ecuación general de segundo grado, bajo la forma

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad (1)$$

ó

$$(Ax + By + D)^2 + (AC - B^2)\,y^2 + 2\,(AE - BD)\,y + AF - D^2 = 0; \quad (2)$$

y haciendo

$$\delta = AC - B^2; \quad e = AE - BD; \quad f = AF - D^2,$$

se tendrá:

$$(Ax + By + D)^2 + \delta y^2 + 2ey + f = 0.$$

Si hacemos

$$X = Ax + By + D, \quad \text{y si} \quad \delta \gtreqless 0$$

se podrá escribir

$$\delta X^2 + (\delta y + e)^2 + \delta f - e^2 = 0,$$

de la cual, haciendo $\delta y + e = Y$ y considerando que

$$\delta f - e^2 = A\,(ACF + 2BDE - AE^2 - CD^2 - FB^2) = A\Delta,$$

siendo Δ el discriminante de la ecuación (1) y se tendrá

$$X^2 + \frac{1}{\delta}\,Y^2 + \frac{A\Delta}{\delta} = 0,$$

que conduce á las formas siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} X^2 + Y^2 - K^2 = 0 \\ X^2 + Y^2 + K^2 = 0 \end{array}\right\} \text{Elipses,}$$

$$X^2 - Y^2 \pm K^2 = 0 \text{ — Hipérbola,}$$

$$\left.\begin{array}{l} X^2 + Y^2 = 0 \\ X^2 - Y^2 = 0 \end{array}\right\} \text{Rectas.}$$

Si $\delta = 0$, la ecuación (2) conduce á la forma

$$X^2 + Y = 0 \text{. Parábola,}$$

siendo aquí Y la función $(2\,dy + f)$.

Si al mismo tiempo que $\delta = o$ es $d = o$, se encuentra:

$$X^2 + (AF - D^2) = 0;$$

es decir,

$$\begin{array}{lll} X^2 - K^2 = 0 & \text{si} & AF - D^2 < 0 \\ X^2 + K^2 = 0 & \text{si} & AF - D^2 > 0 \\ X^2 = 0 & \text{si} & AF - D^2 = 0, \end{array}$$

cuyas tres ecuaciones representan respectivamente dos rectas paralelas reales, imaginarias y que se confunden.

La expresión $\delta = AC - B^2$ se denomina la *función característica* ó simplemente la característica.

El cuadro que sigue nos da el resultado de la discusión de las formas que se acaban de indicar:

$\delta > 0$ — Elipses	Reales.......	si $A\Delta < 0$	si $\left\{\begin{array}{l} B = 0 \\ A - C = 0 \end{array}\right\}$ Círculo.
	Desvanecidas	si $\Delta = 0$	
	Imaginarias..	si $A\Delta > 0$	
$\delta = 0$	Parábola efectiva....	si $\Delta \gtreqless 0$	
$\delta < 0$	Hipérbola efectiva...	si $\Delta \gtreqless 0$	si $A + C = 0$ Hipérbola equilátera.
$\Delta = 0$ Rectas	Imaginarias (Elipse desvanecida)...	si $\delta > 0$	
	Reales se cortan..................	si $\delta < 0$	
	Paralelas $\delta = 0$. Reales distintas...	si $AF - D^2 < 0$	
	Paralelas $\delta = 0$. Confundidas......	si $AF - D^2 = 0$	
	Paralelas $\delta = 0$. Imaginarias......	si $AF - D^2 > 0$	

Tangentes.—La ecuación de la tangente vendrá expresada por la relación

$$Xf_x' + Yf_y' + Zf_z' = 0,$$

en la que deberá hacerse $Z = z = 1$.

Los puntos de contacto de las tangentes trazadas á esta curva por un punto (α, β) estarán sobre la curva auxiliar

$$\alpha f_x' + \beta f_y' + \gamma f_z' = 0,$$

Z y γ tomando el valor 1 y siendo $f\ (x, y) = o$ la ecuación de la curva.

—La tangente paralela á una recta dada cuyo coeficiente angular sea a, satisfará á las condiciones

$$f = 0 \quad f_x + af_y' = 0.$$

Normales.—La ecuación de la normal en el punto (x, y) será

$$\frac{Y - y}{f_y'} = \frac{X - x}{f_x'},$$

si las coordenadas son rectangulares, y

$$\frac{Y - y}{f_y' - f_x' \cos . \theta} = \frac{X - x}{f_x' - f_y' \cos \theta}$$

en el caso de coordenadas oblicuas.

—Si se trata de dirigir á una curva $f\,(x, y) = o$ las normales, por un punto exterior (α, β); se unirá á la ecuación de la curva la relación

$$(\alpha - x)\ (f_y' - f_x' \cos \theta) - (\beta - y)\ f_x' - f_y' \cos + \theta) = 0$$

y obtendremos las coordenadas de los pies de las normales que responden al problema.

Subtangente y subnormal.—El valor de la subtangente será

$$S_t = -\ \frac{y}{y}$$

y el de la subnormal

$$S_n = yy'.$$

Centro. — El centro de estas curvas tiene por coordenadas, la solución del sistema.

$$\left.\begin{matrix} F_x' = 0 \\ F_y' = 0 \end{matrix}\right\}$$

— Si la ecuación de la cónica encierra un parámetro variable, la del lugar de los centros de todas las cónicas del sistema se obtiene eliminando este parámetro entre las ecuaciones

$$f_x' = 0 \quad \text{y} \quad f_y' = 0.$$

— Se pueden distinguir, sobre el lugar obtenido, los puntos que provienen de centros de elipses ó de hipérbolas de la manera siguiente:

Las ecuaciones

$$Ax + By + D = 0$$
$$Bx + Cy + E = 0$$

permiten expresar x é y, coordenadas de los centros de las cónicas, en función del parámetro variable

$$\frac{x}{BE - CD} = \frac{y}{BD - AE} = \frac{1}{AC - B^2}.$$

Todos los valores de este parámetro que nos dan

$$\delta = AC - B^2 < 0,$$

serán formados por centros de hipérbola,

$\delta > o$ por centros de elipses y

$\delta = o$ por centros de parábolas, los cuales si están á distancia finita, se tiene una infinidad para la misma parábola, es decir, que aquélla se compone de dos rectas paralelas, distintas ó confundidas.

Diámetros. — Diámetro de una cónica, es el lugar de los puntos medios de un sistema de cuerdas paralelas. Este lugar es una recta, y

si $f(x, y)$ es la ecuación de la cónica, el diámetro de las cuerdas cuya dirección es m tiene por ecuación:

$$f_x' + m f_y' = 0.$$

—Se llaman diámetros conjugados, á dos diámetros tales que cada uno de ellos es el lugar geométrico del medio de las cuerdas paralelas al otro. La relación entre los coeficientes angulares de dos diámetros conjugados es

$$Cmm' + B(m + m') + A = 0.$$

—El lugar geométrico del medio de la parte de una secante móvil, limitada en una cónica, se obtiene eliminando el parámetro variable entre la ecuación de la secante y la de su diámetro conjugado con relación á la cónica.

Ejes.—Los ejes de una cónica son los diámetros conjugados perpendiculares entre sí. Existe un solo sistema de ejes, y la ecuación del sistema de estos ejes es

$$Bf_x'^2 - (A - C)\, f_x' f_y' - Bf_y'^2 = 0.$$

—La ecuación en coeficientes angulares de los ejes de una cónica representada por la ecuación general es

$$Bz^2 + (A - C)\, z - B = 0.$$

—Dos cónicas tienen la misma dirección sus ejes, cuando

$$\frac{C - A}{B} = \frac{C' - A'}{B'}.$$

—En el caso de que la cónica es una parábola, la ecuación de su eje es:

$$Af_x' + Bf_y' = 0.$$

Vértices.—Los vértices de una cónica son los puntos de encuentro de la curva con sus ejes de simetría. En estos puntos, la tangente á la curva es perpendicular al eje.

—Se obtiene el lugar de los vértices de una serie de cónicas, cuya ecuación encierra un parámetro variable, eliminando este parámetro entre la ecuación de las cónicas y la de sus ejes, resultando á veces un lugar para cada uno de los vértices de cada eje, en particular cuando las ecuaciones de los dos ejes sean racionales con relación al parámetro variable. En este caso, se separa en dos partes el lugar de los vértices.

Focos.—Son puntos tales que la distancia de un punto cualquiera de la cónica á uno de ellos es una función racional y lineal de las coordenadas del punto.

La recta que se obtiene igualando á cero esta función lineal y racional se llama la *directriz*, correspondiente al foco considerado. Ella es la polar de este punto con relación á la cónica.

—Plücker *(Journal de Crelle)* define los focos diciendo que son los puntos por los cuales se puede dirigir á una cónica dos tangentes isótropas.

—Si un foco tiene por coordenadas α y β, la ecuación de la cónica puede ponerse bajo la forma

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-\varepsilon^2\,(x\,.\cos\varphi+y\,.\operatorname{sen}\varphi-p)^2=0,$$

siendo $x\cos.\varphi+y\operatorname{sen}\varphi-p=0$ la ecuación de la directriz correspondiente al foco á que se refiere.

ε se llama la *excentricidad.*

—Si $\varepsilon>1$, la cónica es una hipérbola. Si $\varepsilon<1$ es una elipse, y si $\varepsilon=1$ es una parábola.

—Si $\varphi(x,\,y)=0$ es la ecuación de una cónica, sus focos son la intersección de las cónicas

$$4B\varphi\,(\alpha,\beta)-\varphi'_\alpha\,\varphi'_\beta=0$$

$$4\,(A-C)\,\varphi\,(\alpha,\beta)-(\varphi'^2_\alpha+\varphi'^2_\beta)=0,$$

φ'_{α}, φ'_β son las derivadas parciales de la función φ. La segunda ecuación se puede escribir, teniendo en cuenta la primera,

$$B\,(\varphi'^2_\alpha-\varphi'^2_\beta)+(C-A)\,\varphi'_\alpha\,\varphi'_\beta=0, \qquad (a)$$

lo que nos dice que los focos se encuentran sobre los ejes.

—La ecuación del lugar de los focos de las cónicas, cuya ecuación

encierra un parámetro variable, se obtiene eliminando este parámetro entre la ecuación del sistema de los ejes *(a)* y la de la cónica:

$$4B\varphi(\alpha, \beta) - \varphi'_\alpha \varphi'_\beta = 0.$$

—Si la ecuación de los ejes se puede descomponer en un producto de factores lineales, cuyos coeficientes sean funciones racionales del parámetro variable, se puede descomponer de una manera correspondiente el lugar de los focos.

Asíntotas.—Los coeficientes angulares de las asíntotas de las cónicas son raíces de la ecuación:

$$\varphi_2(1 \,.\, c) = Cc^2 + 2Bc + A = 0. \qquad (b)$$

—Si la curva es una elipse, las raíces de esta ecuación son imaginarias y la curva no tiene asíntota real.

—Si es una hipérbola, la ecuación de sus asíntotas será:

$$(Cc + B)\,y - (Cc^2 + Bc)\,x + (D + Ec) = 0,$$

y considerando que

$$Cc^2 + Bc = -(Bc + A)$$

puede tomar la forma

$$f_x' + cf_y' = 0,$$

y las asíntotas son los diámetros conjugados de las cuerdas, que tienen por coeficiente angular las raíces de la ecuación *(b)*.

—Si es una parábola

$$C = -\frac{A}{B} = -\frac{B}{C} = -\frac{D}{E},$$

que serán dos rectas paralelas, si bien situadas en el infinito.

—Si la curva se compone de dos rectas paralelas

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{D}{E}$$

y las ordenadas en el origen de las asíntotas estarán determinadas por la ecuación

$$Cd^2 + 2Ed + F = 0,$$

y la curva tiene dos asíntotas paralelas entre sí y confundidas con las rectas que la componen.

Determinación de las cónicas.— Una cónica queda determinada por cinco condiciones, las cuales se expresan por medio de ecuaciones que presentan ciertas particularidades, tales como las de ser satisfechas por valores reales de parámetros variables, y entonces las cónicas del sistema tendrán una ecuación de coeficientes reales, ó ser satisfechas por valores ya reales ó ya imaginarios de los parámetros, y entonces se tendrá que distinguir el caso en el cual la ecuación del sistema tenga sus coeficientes reales, y aquel otro en el cual éstos serán imaginarios.

He aquí algunas de las relaciones que nos dan las cónicas que satisfacen á diferentes circunstancias.

— Ecuación general de las cónicas que tienen su centro en el origen:

$$\lambda x^2 + 2\mu \,.\, xy + \nu y^2 + \theta = 0.$$

— Ecuación general de las cónicas referidas á su centro y á sus ejes:

$$\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu = 0.$$

— Ecuación general de las cónicas que tienen un foco conocido $(\alpha \,.\, \beta)$

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - (\lambda x + \mu y + \nu)^2 = 0.$$

— Ecuación general de las cónicas que tienen un foco conocido $(\alpha \,.\, \beta)$ y una directriz determinada $lx + my + p = 0$:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + \lambda^2\,(lx + my + p)^2 = 0.$$

— Ecuación general de las cónicas que tienen un vértice y un eje conocidos, tomando el origen en el vértice y el eje como eje de las x, la ecuación será

$$y^2 = 2\lambda x + \mu \,.\, x^2.$$

—Ecuación general de las cónicas circunscritas á un cuadrilátero, sean A y B los lados opuestos y $A=0$; $B=0$; $C=0$; $D=0$, las ecuaciones de los lados del cuadrilátero, será

$$AB+\lambda CD=0.$$

—Ecuación general de las cónicas que pasan por los puntos comunes á una cónica y á una recta dada;

siendo $S=0$ la ecuación de la cónica y $\alpha=0$ la de la recta, se tendrá:

$$S+\alpha(ax+by+c)=0.$$

—Ecuación general de las cónicas que pasan por los puntos comunes á una cónica y á dos rectas dadas

siendo $S=0$ la ecuación de la cónica y $\alpha=0$ y $\beta=0$ la de las dos rectas, se tendrá:

$$S+\lambda\alpha\beta=0.$$

—Ecuación general de las cónicas que pasan por los puntos comunes á dos cónicas $\nu=0$, $V=0$

$$\nu+\lambda V=0.$$

—Ecuación general de las cónicas circunscritas á un triángulo, siendo $A=0$, $B=0$, $C=0$, las ecuaciones de los lados del triángulo será:

$$\lambda BC+\mu\,.\,AC+\nu\,.\,AB=0$$

ó

$$\frac{\lambda}{A}+\frac{\mu}{B}+\frac{\nu}{C}=0.$$

—Ecuación general de las cónicas inscritas en el mismo triángulo:

$$\lambda^2A^2+\mu^2B^2+\nu^2C^2\pm2\mu\nu BC\pm2\lambda\nu AC\pm2\lambda\mu\,.\,AB=0$$

ó

$$\sqrt{\lambda A}+\sqrt{\mu B}+\sqrt{\nu C}=0.$$

—Ecuación general de las cónicas bitangentes á dos rectas dadas,

siendo las ecuaciones de las rectas $A=0$ y $B=0$; si los puntos de contacto son conocidos, y llamando $C=0$ á la cuerda de contactos será:

$$AB + \lambda C^2 = 0,$$

y si los puntos de contacto son arbitrarios y Z la cuerda de contactos, dada por la ecuación $Z = \lambda x + \mu y + \nu$, será

$$AB + Z^2 = 0.$$

—Ecuación general de las cónicas inscritas en un cuadrilátero, siendo las ecuaciones de las diagonales $A=0$, $B=0$, $C=0$, será:

$$A^2 = \frac{f^2 B^2}{\lambda} + \frac{m^2 C^2}{1-\mu};$$

en el caso del paralelogramo, y tomando las diagonales como ejes de coordenadas, se tendrá:

$$\frac{x^2}{a^2(1-\lambda)} + \frac{y^2}{b^2 \lambda} - 1 = 0,$$

y en el del rectángulo,

$$\frac{x^2}{1-\lambda} + \frac{y^2}{\lambda} - a^2 = 0.$$

Propiedades.—Por cinco puntos, reales, diferentes y situados en un plano de modo que, tres de ellos, no se encuentren en línea recta, se puede hacer pasar una cónica y nada más que una.

—Las cónicas que pasan por cuatro puntos fijos determinan sobre una secante cualquiera un segmento que se cambia en involución. (Désargues.)

—Cuando un cuadrilátero está inscrito en una cónica, el producto de las distancias de un punto movible sobre la curva á dos de los lados opuestos, está con el producto de las distancias del mismo punto á los otros dos lados, en una relación constante. (Pappus.)

—Si un exágono está inscrito en una cónica y numeramos sus lados consecutivos 1, 2, 3, 4, 5, 6, los puntos de encuentro de las rectas

asociadas (1 y 4), (2 y 5) (3 y 6) están situados en línea recta. (Pascal.)

—Si un triángulo está inscrito en una cónica, las tangentes en los vértices encuentran á los lados opuestos en tres puntos situados en línea recta.

—Si un exágono está circunscrito á una cónica y numeramos sus vértices consecutivos 1, 2, 3, 4, 5 y 6, las rectas 1,4 — 2,5 y — 3,6 concurren en un mismo punto. (Brianchon.)

—Si un triángulo está circunscrito á una cónica, las rectas que unen los puntos de contacto á los vértices opuestos pasan por un mismo punto.

—Si tenemos una cónica fija, cortadas por dos rectas desde un punto O, movibles, pero paralelas á direcciones fijas, estas rectas encontrarán á la cónica; la primera en los puntos A y A', y la otra en los B y B', y la relación $\frac{OA \,.\, OA'}{OB \,.\, OB'}$ tiene un valor constante. (Newton.)

—Si suponemos una cónica y un triángulo ABC situado en su plano; un móvil, que partiendo del punto A, por ejemplo, recorre el perímetro del triángulo en el sentido ABC, encuentra sucesivamente á la cónica en los puntos C_1, C_2; A_1, A_2; B_1, B_2; se tendrá la relación

$$\frac{AC_1 \,.\, AC_2}{AB_1 \,.\, AB_2} \cdot \frac{BA_1 \,.\, BA_2}{BC_1 \,.\, BC_2} \cdot \frac{CB_1 \,.\, CB_2}{CA_1 \,.\, CA_2} = 1 \quad \text{(Carnot).}$$

—Si se considera un sistema de cónicas móviles que pasan por cuatro puntos fijos, las polares de un punto cualquiera, supuesto fijo, pasan todas por un mismo punto. (Lamé.)

—Dos diámetros conjugados de una cónica determinan sobre una tangente fija á esta cónica dos segmentos, contados á partir del punto de contacto, cuyo producto es constante é igual al cuadrado del semidiámetro conjugado de aquel del punto de contacto. Si los dos segmentos están á un mismo lado del punto de contacto, la cónica es una hipérbola; en el caso contrario, una elipse.

—La recta que une el punto de encuentro de dos tangentes á una cónica con el punto medio de la cuerda de los contactos de estas tangentes, pasa por el centro de la cónica.

—Si por un punto fijo de una cónica se trazan dos rectas variables, paralelas á dos diámetros conjugados de otra cónica, llamada cónica

directriz, la recta que une los puntos en que estas rectas encuentran á la cónica pasan por un punto fijo. (Frégier.)

—En una cónica, el radio de curvatura es igual al cubo de la normal dividido por el cuadrado del semiparámetro.

—La cuerda focal de curvatura de una cónica es igual á la trazada por el mismo foco paralelamente á la tangente en el punto de osculación.

—En una cónica siempre hay tres puntos, cuyos círculos osculadores pasan por otro dado en la curva; estos puntos pertenecen á un círculo que pasa por el punto dado, y forman un triángulo cuyas medianas se cortan en el centro de la cónica. (Steiner, *Crelle*, XXXII-300.) (Joachimsthal, *Crelle*, XXXVI, pág. 95.)

—Toda cónica que divide armónicamente dos diagonales de un cuadrilátero completo, divide armónicamente la tercera. (O. Hesse.) *Vorlesungen aus der analytischen Geometrie.*

Construcción de cónicas.—Puesto que cinco condiciones determinan una cónica, siempre que ellas nos sean dadas, se podrá efectuar su trazado. Ahora bien; una condición geométrica impuesta al trazado de una curva es del orden p, si ella exige, para ser cumplida, que los coeficientes de la ecuación de la curva verifiquen p relaciones distintas. Si, pues, $p = 1$ la condición se dice es *simple*, si $p = 2$ es *doble*, etc. Para las cónicas se tiene el siguiente cuadro, que enumera algunas de las condiciones que se encuentran más ordinariamente en su trazado.

	La Cónica.		La Cónica.
Condición simple.	Pasa por un punto.	Condición doble.	Tiene por centro un punto dado.
	Es tangente á una recta.		Tiene por foco un punto dado.
	A una dirección asintótica dada.		Tiene por vértice un punto dado.
	A sus direcciones principales dadas.		Tiene una asíntota dada.
	Es semejante á una cónica dada.		Tiene una directriz dada.
	Etc.		Tiene una tangente en el vértice dado.
			Es homotética á una cónica dada.
			Etc.

He aquí algunos ejemplos de los muchos que pueden proponerse:

1.° *Construir una cónica que pasa por cinco puntos.*—Sean $ABCDE$ los cinco puntos dados. Busquemos en cuál punto H (fig. 1.ª) es encontrada la cónica por una recta cualquiera que pase por E; la incógnita del problema es el lado AH, que cierra el exágono; numerando los lados sucesivos, como se indica en la figura, se determinaran los

puntos P y Q, intersección de los lados (1 — 4) y (2 — 5), y trazando PQ se obtiene el punto R por intersección de esta línea y del lado 3. Por último, se tiene el lado 6 trazando la RA, y su intersección con el lado 5 determina el punto buscado H.

—Si se quiere construir la tangente en un punto A, como los cinco puntos dados forman los vértices de un pentágono $ABCDE$, la tan-

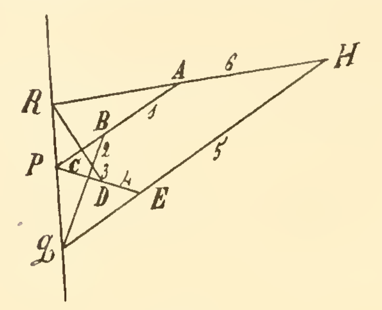


Figura 1.ª

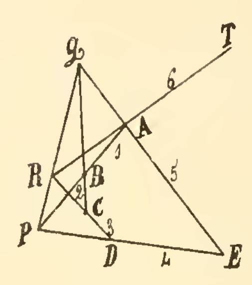


Figura 2.ª

gente incógnita en A (fig. 2.ª) forma con los lados del pentágono un exágono inscrito á la cónica; habiendo, pues, obtenido P y Q, se tomará el punto R intersección de PQ y la prolongación del lado 3; trazando RA, se tendrá el lado 6, ó sea la tangente AT.

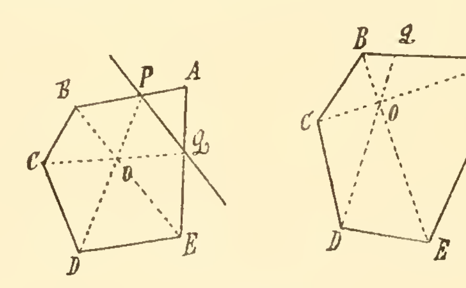


Figura 3.ª

2.º *Construir una cónica tangente á cinco rectas.*—Busquemos, en primer lugar, la tangente que se puede dirigir á la cónica por un punto tomado sobre una de las cinco rectas. Sea P (fig. 3.ª) un punto tomado sobre AB, y busquemos el punto Q en que la tangente dirigida desde el punto P encuentra á AE. Las rectas PB, BC, CD, DE, EQ, QP forman un exágono circunscrito á una cónica, y se puede aplicar el teorema de Brianchon. Se trazarán PD y BE, que se cortan en O; CO encontrará AE en Q; PQ será la tangente dirigida desde P.

Busquemos ahora el punto en que la cónica toca una de las tangentes. Las rectas AC, BE, se cortan en O, DO encuentra AB en el punto Q, que es el punto en que AB toca á la cónica, lo cual resulta del teorema de Brianchon, aplicado al caso en que los dos lados QA, QB del exágono se confunden.

3.° *Construir una cónica conociendo el centro y tres puntos.*—Sea O el centro (fig. 4), A, B, C, los tres puntos, trataremos de encontrar un sistema de diámetros, conjugados en magnitud y dirección. Uniendo

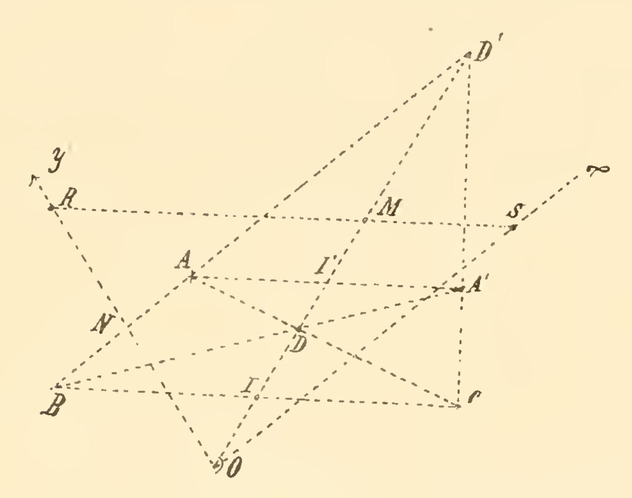


Figura 4.ª

el punto O con el medio I de la cuerda BC, tomando sobre una paralela á la recta BC, dirigida por el punto A, una longitud $I'A' = AI'$, se obtendrá en A un cuarto punto de la cónica.

Según el teorema de Desargues, el segmento determinado sobre la recta OI, por las cónicas que pasan por los cuatro puntos $AA'BC$, se cambia en involución.

Dos cónicas de este haz son:

1.° Las rectas AC, $A'B$ que encuentran la secante en D.

2.° Las rectas AB, $A'C$ que nos dan el punto D'.

Si se toma un punto M, tal que

$$\overline{OM}^2 = OD \,.\, OD'$$

se obtiene un punto de encuentro de la transversal OI con la cónica que tenga su centro en el punto O.

Sea $OM = a'$; éste es un diámetro de la curva estudiada; su conjugado es en posición Ox paralela á BC; para obtener su longitud, dirigiremos por el punto O el sistema de diámetros conjugados, definidos por la cuerda AB; este sistema se compone de la recta ON que une el centro O, al medio, N de AB, y de la paralela á esta línea trazada por el punto O.

Estas rectas Ox' y Oy' determinan sobre la tangente en M á la cónica dos segmentos, MR y MS, tales, que su producto es igual á b'^2.

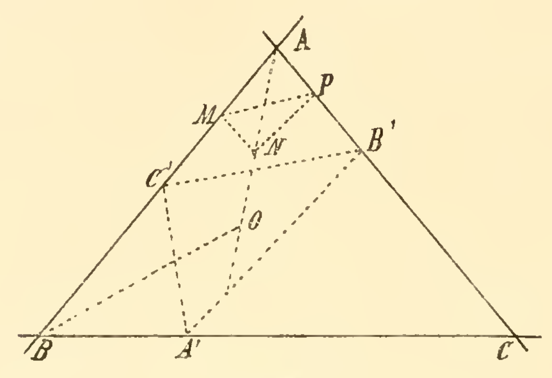


Figura 5.ª

Tomando sobre Ox, $OM' = b'$, se tiene un sistema de diámetros conjugados en posición y magnitud OM, y OM'.

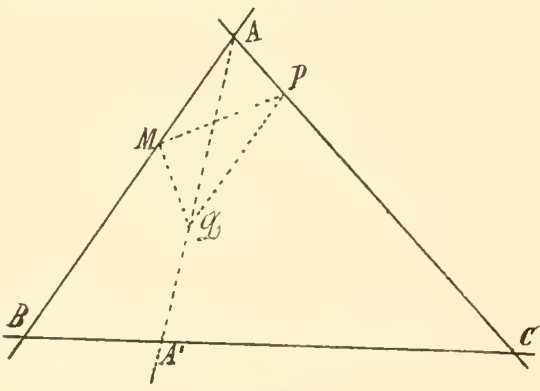


Figura 6.ª

La curva es una elipse ó una hipérbola, según que el punto de contacto M de la tangente, es interior ó exterior al segmento RS.

4.° *Construir una cónica conociendo el centro y tres tangentes.*— Busquemos los puntos de contacto de estas tangentes; sean (fig. 5)

A', B', C', estos puntos. Si se une el punto A al medio de la cuerda $B'C'$, esta recta pasa por el centro de la cónica; el triángulo $A'B'C'$ será tal, que los medios de sus lados estarán situados sobre las rectas AO, BO, CO, y los vértices, sobre las AB, AC y BC.

Determinemos ahora las direcciones de estos lados; para ello tomemos un punto M cualquiera sobre AB y tracemos una paralela al lado AC hasta su encuentro en N con la recta AO; tracemos por el punto N una paralela á la recta AB; la diagonal MP del paralelogramo así definido, es paralela al lado $B'C'$. Se obtendrán del mismo modo las direcciones de los otros dos lados.

Construyamos sobre MP (fig. 6) como lado, un triángulo MPQ semejante al triángulo $A'B'C'$; la linea AQ prolongada viene á cortar el lado BC en un punto A' que es un vértice del triángulo buscado; este es un punto de contacto.

Del propio modo se deducen los otros dos, y ahora el problema queda reducido al del caso anterior.

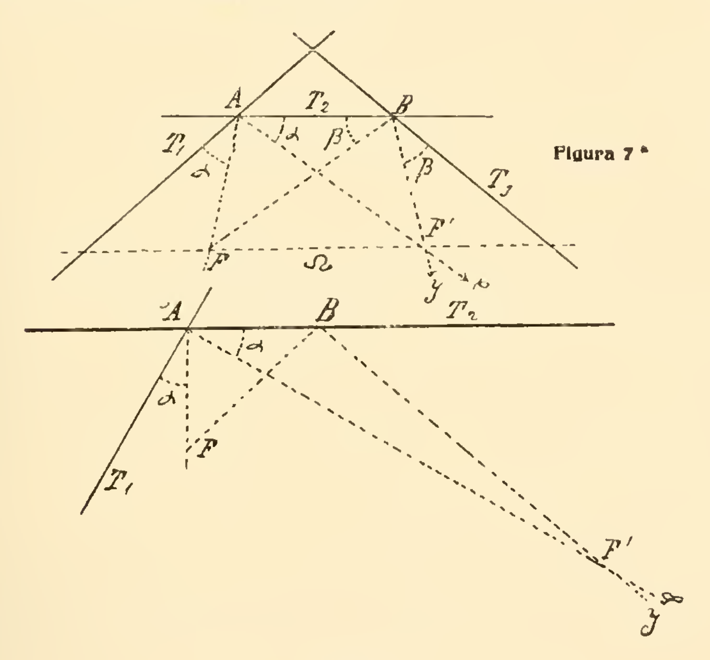


Figura 7.ª

Figura 8.ª

5.° *Construir una cónica conociendo el foco y tres tangentes.*— Sean (fig. 7), T_1, T_2 y T_3 las tres tangentes dadas, F el foco.

Tracemos AF; el segundo foco se encontrará sobre la recta Ax que forma con la tangente T_2 un ángulo $\alpha = FAT_1$.

La misma construcción repetida en B nos da, por intersección de las rectas Ax, By, el segundo foco F', de donde se deduce el centro Ω y el problema queda reducido al anterior.

6.° *Construir una cónica, conociendo un foco, dos tangentes y el punto de contacto de una de ellas.*—Sean (fig. 8) T_1 y T_2 las tangentes dadas; B el punto de contacto T_2, se obtendrá el segundo foco F' por la intersección de la recta Ax, trazada como en la construcción anterior, y de la recta By formando con T_2 y en sentido contrario un ángulo igual al ángulo FBA. Se conocen ahora dos focos y un punto; la cónica será una elipse, si los dos focos están á un mismo lado de la tangente y una hipérbola en el caso contrario.

—Cuando solamente son cuatro las condiciones dadas para determinar una cónica, existe un *sistema* de dichas curvas que las satisfacen, sistemas que dependen de un parámetro arbitrario y que ha originado, en la época actual, una parte de la Geometria, que elevándose al rango de una doctrina cada vez más completa, se la ha nombrado con razón *Geometría del número.*

Estos sistemas de curvas simplemente infinitos han sido estudiados por Mr. Chasles, que introdujo la *Theorie des caracteristiques,* ó sea de los números μ y v que en el sistema representan; el primero el número de curvas del sistema que pasan por un punto fijo cualquiera, y el segundo el número de curvas del mismo sistema, que tocan una recta fija dada. Esta teoría ha sido desarrollada por MM. Jouquiéses, Cayley, Salmon, Zeuthen, etc., pudiéndose consultar los trabajos siguientes: de Cayley, *On the curves which satisfy given condition (Philos. Transactions*, Londres, 1868, t. CLVIII); de Salmon, *Higher plane curves;* de Cremona, *Einleitung in die Theorie der algebraischen Curven;* de Painvin, *Bulletin des Sciences Mathematiques* (tomo III, pág. 155); de Mr. Halphen *(Comptes rendus*, 1876); de Zeuthen, *Nyt Bidrag til Laeren om Systemer of Keglesnit* (Kjobenharn, 1865), ó *(Nouvelles Annales,* t. VI, 1866); Clebsch, *Zur Theorie der Charakteristiken (Math. Annalen,* t. VI), etc.

Para un sistema doblemente infinito de cónicas existen tres números, ρ, σ y τ, que tienen una significación análoga á la de los μ y v para un sistema simplemente infinito; el primero, ρ, designa el número de cónicas del sistema que pasan por dos puntos; el segundo, σ, el número de las que pasan por un punto y tocan una recta, y el tercero, τ, el número de las que tocan á dos rectas.

No siendo pertinente entrar aquí en otros detalles, que harían muy extenso este trabajo, señalaremos al lector que puede consultar á este propósito los escritos siguientes, entre otros: Cremona, *Comptes*

rendus (t. LXIX, pág. 776); Chasles, *Comptes rendus* (1864); Zeuthen (*Math. Annalen*, t. III, pág. 153), etc.

Cónica alabeada.

Línea de tercer orden, intersección de dos hiperboloides de una hoja que tienen una generatriz recta común.

La estudió y dió nombre Seydéwitz.

Cónica base.

Definición.—En el sistema de coordenadas ideado por Mr. Darboux se considera una cónica dada, cuya ecuación es $V = (\rho - \rho_1)^2 = 0$, siendo ρ y ρ_1 las coordenadas del punto del sistema, á la cual cónica da el nombre particular de *cónica base.*

Determinación de V.—Si se considera una cónica,

$$V = y^2 - 4xz = 0,$$

se obtienen todas sus tangentes, haciendo variar el parámetro μ en la ecuación,

$$\mu^2 x + \mu y + z = 0;$$

si la tangente ha de pasar por el punto (x', y', z'), μ estará dado por

$$\mu^2 x' + \mu y' + z' = 0,$$

y llamando ρ y ρ' las raíces de esta ecuación, se tendrá

$$x' = -\frac{y'}{\rho + \rho_1} = \frac{z'}{\rho\rho_1}. \qquad (1)$$

Estas cantidades, ρ, ρ_1, pueden ser consideradas como las coordenadas del punto (x', y', z'); éstos son los valores del parámetro μ que caracterizan las dos tangentes trazadas desde el punto (x', y', z') á la *cónica base* $V = 0$.

Propiedades.—Las relaciones (1) permiten pasar de una ecuación entre ρ y ρ_1 á la ecuación correspondiente en coordenadas trilineares ó inversamente. Así, la cónica base, siendo su ecuación

$$V = (\rho - \rho_1)^2 = 0,$$

una cónica bitangente á ella tendrá por ecuación trilinear

$$V - (ax - by + cz)^2 = 0,$$

su ecuación en el nuevo sistema es

$$(\rho - \rho_1)^2 - [a - b(\rho + \rho_1) + c\rho\rho_1]^2 = 0,$$

que está comprendida en la forma general

$$A\rho\rho_1 + B\rho + C\rho_1 + D = 0,$$

la cual representa una recta si $B = C$.

—El grado de la ecuación trilinear de la curva $f(\rho, \rho_1) = 0$ es fácil de obtener. Supongamos la función f no simétrica y sean m su grado con relación á ρ y m_1 aquél con respecto á ρ_1. El grado de la curva es igual al número de puntos en que encuentra á una tangente cualquiera á la cónica base, esta tangente está definida por $\rho = a$ ó $\rho_1 = a$. A la hipótesis $\rho = a$ corresponden m_1 valores de ρ_1, y, por consiguiente, m_1 puntos; á la hipótesis $\rho_1 = am$ valores de ρ y m puntos. La curva es, pues, del orden $m + m_1$. Si la función f es simétrica en ρ y ρ_1, las hipótesis $\rho = a$ y $\rho_1 = a$ nos dan evidentemente los mismos puntos: la curva es del orden m.

Aplicaciones.—La consideración de la cónica base, ó sistema coordenado de Mr. Darboux permite la resolución de ciertos problemas, tales como los siguientes:

—Si un triángulo es circunscrito á la cónica, y dos de sus vértices giran sobre dos cónicas fijas, encontrar el lugar del vértice libre. «Se determina una curva de cuarto grado en ρ y ρ_1 que corta á la cónica base en ocho puntos, que contiene cada uno dos de intersección, ó sean, puntos dobles de la curva encontrada».

—Si las tres cónicas dadas forman parte de un mismo haz tangencial, el lugar se compone de dos cónicas del mismo haz.

—Cuando se tienen tres cónicas inscritas en un mismo cuadrilátero, si dos vértices de un triángulo circunscrito á una de ellas resbalan sobre las otras dos, el lugar del vértice libre se compone de dos cónicas inscritas en el mismo cuadrilátero que las tres primeras.

—Si los tres vértices de un triángulo se mueven sobre una cónica fija y dos de sus lados envuelven dos cónicas, encontrar la envolvente del tercer lado. «Este problema es un caso particular del general tratado por Mr. Cayley *(Quarterly Journal of mathematics,* t. I)

de trazar la envolvente del lado libre de un triángulo inscrito en una cónica y cuyos otros dos lados tocan una curva cualquiera». Cuando las cónicas dadas son tres círculos del mismo eje radical, la envolvente del tercer lado del triángulo móvil inscrito en uno de los círculos y cuyos otros dos lados tocan á los otros dos círculos, se compone de dos círculos que tienen el mismo eje radical que los círculos dados; caso particular que Mr. Chasles, *Geometrie Superiure,* demuestra geométricamente, si bien su demostración no señala la existencia de dos círculos envolventes.

—Si dos vértices de un triángulo móvil circunscrito á una cónica se mueven respectivamente sobre dos cónicas bitangentes á ésta, el lugar del vértice libre se compone de otras cuatro cónicas bitangentes á la primera.

Para más detalles pueden consultarse los trabajos del ya mencionado Mr. Darboux y la obra *Mathematical Problems*, de Mr. Wolstenholme.

Cónicas bitangentes.

Definición. — Aquellas que tienen dos puntos de tangencia, como muestra su nombre.

Propiedades. — Dadas dos cónicas bitangentes U y V, si desde el punto O se le trazan las tangentes (OM, ON) y (OM', ON'), se puede construir otra cónica W, que pase por M', N' y que tenga con V un doble contacto según MN.

Sean (coordenadas trilineales) las ecuaciones de las cónicas dadas de las formas

$$V = ax^2 + 2fyz = 0; \quad V = a'x^2 + 2f'yz = 0,$$

y (x', y', z') las coordenadas del punto O; la ecuación de W será

$$x'^2 (af' - a'f)(ax^2 + 2fyz) - f'(axx' + fyz' + fy'z)^2 = 0.$$

— Si por el polo de contacto C de dos cónicas bitangentes se dirige una transversal que corte á la primera en M, N, y á la segunda en otro punto M', la relación armónica de los puntos C, M, N, M', es constante.

— Si dos cónicas U y V tienen un doble contacto y desde un punto cualquiera C de su cuerda de contacto se dirigen las tangentes CA, CB á U; CA', CB' á V, y se construye una cónica W que pase

por A', B', y tangente á CA y CB; las tangentes á W en los puntos en que ésta encuentre á U son tambien tangentes á V.

— Si dos cónicas son bitangentes y desde un punto de la una se dirigen tangentes á la otra, éstas determinan con la cuerda de contacto un triángulo tal, que la relación de su superficie al producto de las perpendiculares bajadas de sus vértices sobre la cuerda de contacto de las dos cónicas es constante.

— Si dos cónicas son bitangentes respecto á una tercera, las cuerdas de contacto y las secantes comunes son rectas concurrentes que forman un haz armónico.

Cónicas concéntricas.

Definición. — Cónicas de igual centro, como indica su nombre.

Ecuación. — La ecuación de estas curvas, tomando el centro común por origen, tienen la forma:

$$Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy = 1$$

y

$$ax^2 + a'y^2 + 2b''xy = 1,$$

ecuaciones que para ser resueltas pueden ser combinadas de la siguiente manera:

$$(A - a)\,x^2 + (A' - a')\,y^2 + 2\,(B'' - b'')\,xy = 0,$$

y el problema se resuelve por las ecuaciones de segundo grado.

Casos particulares. — Si además de ser las cónicas concéntricas fuesen octogonales á una cónica dada, su ecuación se tendrá considerando que si la cónica dada está representada por

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r'^2} = 1,$$

las condiciones para que la concéntrica

$$ax^2 + a'y^2 + 2b''xy = 1$$

le sea octogonal, será

$$\frac{ar^2 - 1}{b'r^2r'^2} = \frac{2}{r^2 + r'^2} = \frac{a'r'^2 - 1}{a'r^2r'^2},$$

b'' permanecerá arbitrario y se tiene la ecuación

$$\frac{x^2(r^2+r'^2)}{r^2(r^2-r'^2)} - \frac{y^2(r^2+r'^2)}{r'^2(r^2-r'^2)} - 1 + 2b''xy = 0.$$

Todas las curvas que esta ecuación representa pasan por los puntos de intersección de los ejes $xy = 0$ de la cónica dada, con una cónica coaxial y homofocal, que tiene por asíntotas los diámetros conjugados iguales, á saber:

$$\frac{x^2(r^2+r'^2)}{r^2(r^2-r'^2)} - \frac{y^2(r^2+r'^2)}{r'^2(r^2-r'^2)} - 1 = 0.$$

Si $b'' = 0$, se tendrá

$$\frac{ar^2-1}{ar^2r'^2} = \frac{a'r'^2-1}{a'r^2r'^2} \quad \text{ó} \quad r^2 - r'^2 = \frac{1}{a} - \frac{1}{a'},$$

que nos da las cónicas homofocales.

— Si las cónicas, siendo concéntricas á una dada, son tales que la porción de toda tangente común comprendida entre los puntos de contacto, se vea desde el centro, según un ángulo recto, se tendrá su ecuación, siendo

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r'^2} = 1$$

la ecuación de la cónica dada,

$$ax^2 + a'y^2 + 2b''xy = 1$$

la de la concéntrica, é

$$y = mx + \sqrt{r^2m^2 + r'^2},$$

la de la tangente á la primera; identificando las dos ecuaciones de segundo grado en m obtenidas, considerando que las rectas dirigidas á los puntos de contacto son perpendiculares, lo que nos dará:

$$a = -\mu r'^2; \quad a' = \mu r^2; \quad b''^2 = \mu\left(\frac{r^2-r'^2}{r^2+r'^2} - \mu r^2 r'^2\right),$$

ó bien haciendo

$$r^2 r'^2 \mu = \frac{\lambda^2 (r^2 - r'^2)}{r^2 + r'^2} \quad \text{y} \quad r^2 - r'^2 = c^2$$

$$a = -\frac{c^2 \lambda^2}{r^2 (r^2 + r'^2)}; \quad a' = \frac{c^2 \lambda^2}{r'^2 (r^2 + r'^2)}; \quad b'' = \frac{c^2 \lambda \sqrt{1 - \lambda^2}}{rr' (r^2 + r'^2)}$$

y si hacemos $\lambda = cos.\ \theta$, siendo un ángulo arbitrario, la ecuación general de esta especie de cónicas será

$$\frac{y^2 \cos^2 \theta}{r'^2} - \frac{2xy \,.\, \text{sen} \,.\, \theta \,.\, \cos \,.\, \theta}{rr'} - \frac{x^2 \cos^2 \theta}{r^2} = \frac{r^2 + r'^2}{r^2 - r'^2}.$$

— Si las cónicas concéntricas son asimismo bitangentes á dos cónicas homofocales, su ecuación general, siendo

$$S = a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2 = 0$$

y

$$S' = (a^2 - K^2)\, y^2 + (b^2 - K^2)\, x^2 - (a^2 - K^2)(b^2 - K^2) = 0,$$

las dos cónicas dadas, y α el ángulo excéntrico de un punto de contacto situado sobre la primera curva, será

$$S'' = a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2 + \lambda\, (bx \,.\, \text{sen} \,.\, \alpha - ay \,.\, \cos \,.\, \alpha)^2 = 0.$$

Y para expresar que esta curva es bitangente á la segunda cónica, basta expresar que $S'' + \mu S' = 0$ representa una recta doble que pasa por el origen, lo que determina λ y μ.

Se tendrá por tanto, para ecuación de las cónicas buscadas,

$$(b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2)(K^2 - a^2 \text{sen}^2 \alpha - b^2 \cos^2 \alpha) - K^2 (bx \,.\, \text{sen} \,.\, \alpha -$$
$$- ay \,.\, \cos \,.\, \alpha)^2 = 0.$$

Cónicas confocales.

Definición. — Se da este nombre á las cónicas que tienen los mismos focos.

Historia. — Algunos autores, Mr. Chasles entre ellos, *Leçons sur les courbes homofocales* (*Comptes rendus*, 1860), dan á estas cónicas el

nombre de homofocales, expresión híbrida, recientemente introducida en la ciencia, según creo con motivo de los bellos descubrimientos de Mr. Lamé (1837); pero la expresión legítima que debía ser, la de *homocéntrica* existe desde largo tiempo; así se encuentra en una obra de Jerónimo Fracastor, titulada *Homocentrica sive de Stellir* (Verona, 1538), en la que hace mover las plantas en círculos concéntricos.

Señalaremos como particulares trabajos sobre estas curvas los de Bishop Graves, *Translation of Chaslés Memoirs on Cones and Spherical Conics*, pág. 77; Mr. Hart (*Cambridge and Dublin Mathematical, Journal*, t. IV, pág. 193); Laguerre, *Nouvelles Annales* (segunda serie, t. VIII, pág. 421), así como los de M. Mac-Cullagd, Salmon, Terquem, etc.

Ecuación. — La ecuación de las cónicas de un sistema confocal en coordenados puntos, será

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} = 1.$$

—Los puntos comunes, si una de las cónicas tiene por ecuación,

$$x^2 + y^2 = D^2,$$

y la otra,

$$x^2 + y^2 = D'^2,$$

verificarán la ecuación

$$(D + D')(D - D') = 0,$$

y el problema se resolverá por medio de ecuaciones de segundo grado.

Propiedades. — Toda recta del plano es tocada por una cónica de un sistema confocal, y por todo punto del plano pasan dos cónicas de este sistema.

—Los pares de puntos comprendidos en el sistema son los puntos circulares imaginarios y los dos pares de focos.

—Todas las curvas tienen los mismos ejes; los que forman con la recta del infinito el triángulo polar común á las curvas del sistema confocal.

—Las tangentes de dos curvas confocales que pasan por un punto son los elementos dobles de la involución por los pares de tangentes

dirigidas desde dicho punto; es decir, que ellas son constantemente armónicas á las dos tangentes dirigidas por este punto á otra curva del sistema, y, por consiguiente, armónicas á las dos líneas que unen el punto de que se trata á los puntos circulares, ó, en otros términos, que «dos cónicas de un sistema confocal que pasan por un punto se cortan octogonalmente».

—Entre los pares de tangentes trazadas desde el punto considerado á las curvas del sistema están las que pasan por los dos focos reales; estas líneas son igualmente armónicas á los radios dobles de los dos haces del mismo vértice en involución, y forman, por consiguiente, puesto que estos radios dobles son perpendiculares entre sí, ángulos iguales con ellos.

—El centro de curvatura de cualquiera de dos cónicas confocales en sus puntos de intersección, es el polo, con respecto á la otra, de la tangente á la primera en dicho punto de intersección.

—Si se tienen una elipse y una hipérbola confocal, cuyo centro común sea O, y por un punto cualquiera P de la hipérbola se dirigen dos rectas paralelas á las normales á la elipse en los puntos en que la corta la hipérbola, y si H y K son los puntos en que estas rectas cortan á la hipérbola, é I el punto medio del segmento HK; las dos rectas OP y OI están igualmente inclinadas sobre el eje mayor y la relación de OP á OI es constante.

—Si desde un puuto cualquiera de una elipse se trazan dos tangentes á otra elipse confocal, el exceso de la suma de estas tangentes sobre la longitud del arco interceptado es constante.

—Si desde un punto cualquiera T de una hipérbola, se trazan dos tangentes, PT y KT, á una elipse confocal, la diferencia de los arcos PA y KA, contados en la elipse desde los puntos de tangencia al de intersección de las dos curvas, es igual á la diferencia de las tangentes PT y KT.

—Dadas una elipse y un círculo variable, que tengan dos puntos fijos (reales ó imaginarios) en común con la elipse, el lugar del centro de homología es una hipérbola confocal. Si la cónica dada es una hipérbola, el lugar geométrico será una elipse confocal; y si la cónica dada es una parábola, el lugar buscado será otra parábola igual del mismo foco y dirigida en sentido opuesto.

—Si desde un punto P se trazan tangentes á dos elipses fijas confocales, la relación de los senos de los ángulos ψ y ψ' que estas tangentes forman con la trazada á la elipse confocal á las anteriores y que pasa por P será constante, cualquiera que sea la posición del punto P en la tercera elipse.

—Si un polígono circunscrito á una cónica, apoya todos sus vértices, menos uno, en cónicas confocales, el lugar del vértice libre será también una cónica confocal.

Aplicaciones. — La homofocalidad parece ser que fué aplicada por Boscowich á la Física Matemática antes que Lamé las estudiara en las superficies de segundo orden isotermas (*Journal de Mathematiques,* tomo II, pág. 147, 1837) en donde tienen su mayor aplicación.

Cónicas de Chasles.

Definición. — Mr. Chasles obtiene la generación de las cónicas, haciendo girar dos rectas alrededor de dos polos fijos de modo que formen haces homográficos, y considerando los puntos intersección de las ramas correspondientes. Estos puntos pertenecen á las cónicas, y éstas pasan por los polos.

Serán O y O' los polos de los dos haces; supongamos que el primero sea la intersección de dos rectas fijas $P = O$, $Q = O$; siendo el segundo el punto común de las otras rectas fijas $R = O$, $S = O$.

Una recta cualquiera Δ, que pase por O, tendrá por ecuación

$$P - \lambda Q = 0;$$

y una recta Δ', que pase por O',

$$R - \mu S = 0.$$

Las rectas Δ y Δ', que son móviles, cuando se supone que λ y μ son variables, describen dos haces homográficos si los parámetros λ, μ verifican constantemente la ecuación homográfica.

$$\alpha\lambda\mu + \beta\lambda + \gamma\mu + \delta = 0.$$

La ecuación del lugar será, por consiguiente,

$$\alpha PR + \beta PS + \gamma RQ + \delta QS = 0,$$

que es la ecuación de una cónica que pasa por los puntos O y O'. — Ei recíproco es verdadero y se establece sin dificultad.

Cónicas de Mac-Laurin.

Definición. — Se da este nombre á las cónicas obtenidas por el lugar del vértice I de un triángulo HKI, cuyos lados pasan por tres puntos fijos, A, B, C, apoyando los extremos de las bases en dos rectas también fijas Ox y Oy.

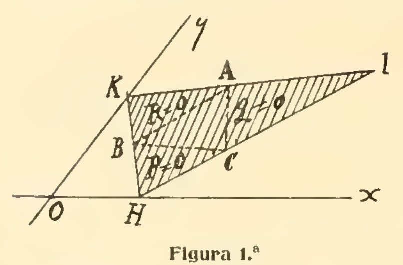


Figura 1.ª

Historia. —Mac-Laurin en su obra *Geometría orgánica sen descriptio linearum curvarum universalis* (Londres-1720), y en su segunda parte, dedicada á las curvas del segundo grado, se ocupa del sistema de generación de las cónicas que aquí se expone, por lo cual á dichas curvas así definidas se dice *cónicas de Mac-Laurin.* También se ocupó del estudio de estas líneas Braikensidge.

Ecuación. — Las ecuaciones de las rectas Ox y Oy serán *(coordenadas trilineares):*

$$\alpha P + \beta Q + \gamma R = 0,$$

$$\alpha' P + \beta' Q + \gamma' R = 0;$$

la transversal HK tiene por ecuación

$$R - \lambda P = 0,$$

y las intersecciones de HK con Ox y Oy estarán determinadas por las relaciones:

$$P(\alpha + \lambda\gamma) + \beta Q = 0,$$

$$R\left(\gamma + \frac{\alpha}{\lambda}\right) + \beta Q = 0.$$

La forma de los primeros miembros de estas ecuaciones prueban que la primera representa una recta que pasa por C, y la otra una recta que pasa por A; así, pues, estas ecuaciones son las de las rectas CH y AK. La ecuación de la cónica se obtendrá por consiguiente, eliminando λ entre estas dos ecuaciones, y así se obtiene

$$(\alpha P + \beta Q)(\gamma R + \beta Q) = \alpha\gamma PR.$$

Esta curva pasa por los puntos A y C.

— Este método de generación de las cónicas de Mac-Laurin puede también demostrarse sirviéndose de las propiedades anarmónicas de estas líneas. Para ello basta suponer trazados cuatro triángulos que cumplan las condiciones del problema, siendo idénticos los haces

$$(C \,.\, a a' a'' a''') \quad \text{y} \quad (C \,.\, b b' b'' b'''),$$

tendremos

$$(a a' a'' a''') = (b b' b'' b'''),$$

de donde

$$(A \,.\, a a' a'' a''') = (B \,.\, b b' b'' b'''),$$

y según las condiciones pedidas,

$$(A \,.\, V V' V'' V''') = (B \,.\, V V' V'' V''');$$

luego los puntos A, B, V, V', V'', V''', están en una cónica si se trazan los tres primeros triángulos; el lugar de V''' será por consiguiente la cónica que pasa por los A, B, V, V', V''

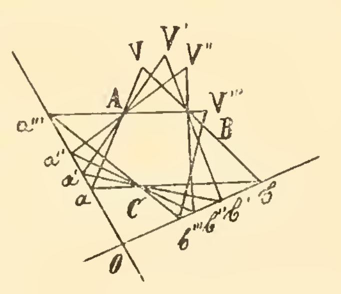


Figura 2.ª

—Al mismo resultado se llega considerando los haces que parten de A y B, que son, respectivamente, homográficos con el que parte de C; luego aquéllos serán homográficos entre sí; por lo tanto, el lugar de la intersección de los radios correspondientes será una cónica que pasa por A y B.

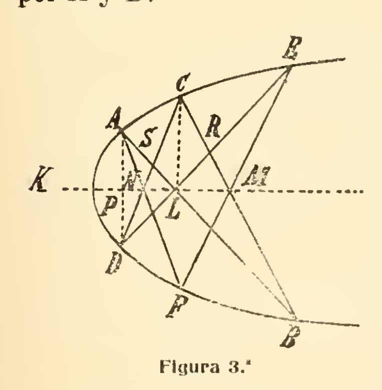


Figura 3.ª

—Mr. Chasles ha demostrado que si en lugar de pasar la recta ab por el punto C, fuera tangente á una cónica que tocara á Oa y Ob, los puntos V pertenecerían asimismo á una cónica.

Recíproca del sistema.—La recíproca de este sistema de generación de las cónicas de Mac-Laurin es el siguiente problema:

Dados cuatro puntos, A, B, F, E, de una cónica, y dos rectas fijas, DC y DE, que pasan por uno de ellos, hallar la envolvente de la CE que une los puntos en que dichas dos rectas, encuentran otra vez á la cónica dada.

— Los vértices del triángulo CEM se apoyan en las rectas fijas DC, DE, NL, y dos de sus lados pasan por los puntos fijos B, F; el tercer lado, por lo tanto, será siempre tangente á una cónica que toca á las rectas DC y DE.

Generalización del sistema. — Si los extremos de ab se apoyan sobre una cónica que pasa por A y B, el lugar de los puntos V seguirá siendo una cónica.

En efecto, se tiene

$$(aa'a''a''') = (bb'b''b''')$$

y, por lo tanto,

$$(A\,.\,aa'a''a''') = (B\,.\,bb'b''b'''),$$

pudiéndose seguir la demostración como se hizo arriba.

Cónicas de Newton.

Definición. — Si se consideran dos ángulos a y b de magnitud constante, que giran sobre sus vértices fijos P y Q, de modo que las intersecciones de dos de sus lados estén en la recta fija AA', los otros dos lados se cortarán en puntos V, V'... que pertenecerán á una cónica.

Historia. — Este sistema de generación de las cónicas, debido á Newton, por lo que se las da este nombre á las así obtenidas, lo expuso en su opúsculo *Enumeratio linearum tertii ordinis* (1704), en su última parte, que se ocupa de la descripción orgánica de las cónicas. Fué más tarde estudiado y desenvuelto con mayor generalidad por Mac-Laurin y Braikensidge y últimamente por Chasles.

Demostración del método. — Este método de generación de las cónicas de Newton puede demostrarse sirviéndonos de las propiedades anarmónicas de estas líneas. En efecto, consideremos cuatro posiciones de los ángulos a y b, se tendrá:

$$(P\,.\,AA'A''A''') = (Q\,.\,AA'A''A''');$$

pero

$$(P\,.\,AA'A''A''') = (P\,.\,VV'V''V''')$$

$$(Q\,.\,AA'A''A''') = (Q\,.\,VV'V''V'''),$$

puesto que los ángulos de los haces son iguales; luego

$$(P \,.\, V V' V'' V''') = (Q \,.\, V V' V'' V'''),$$

y, por lo tanto, el lugar de V''' es una cónica que pasa por los puntos P, Q, V, V', V''

Generalización.—Mr. Chasles ha dado mayor generalización al sistema, suponiendo que el punto A se mueve sobre una cónica que pasa por P y Q en vez de apoyarse en una recta. En efecto, con esta hipótesis se verifica también la igualdad

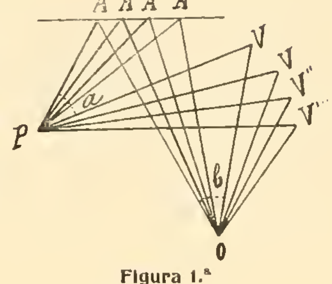


Figura 1.ª

$$(P \,.\, A A' A'' A''') = (Q \,.\, A A' A'' A''').$$

—El método subsiste y su demostración es la misma si los ángulos APV y AQV en vez de ser constantes determinan sobre dos rectas fijas segmentos de longitud constante, porque la igualdad de los segmentos nos da

$$(P \,.\, A A' A'' A''') = (Q \,.\, V V' V'' V''').$$

Se deduce de aquí que el lugar del vértice de un triángulo cuya base permanece fija, y cuyos lados determinan sobre una recta dada un segmento de longitud constante, es una cónica.

Cónica de Rivals.

Ver *Journal de Mathématiques spéciales*, 1892, pág. 124. Balitrand.

Cónica de Simson.

Ver *Association française pour l'avancement des Sciences* 1887. E. Vigarié.

Cónica de nueve puntos.

Definición. — Recibe este nombre la cónica lugar de los centros de las cónicas circunscritas ó un cuadrilátero dado.

Propiedades. — Trazando en una de las cónicas circunscritas los diámetros que dividen en partes iguales á los lados del cuadrilátero, la razón anarmónica de estos cuatro diámetros es igual á la de sus conjugados, razón conocida, pues éstos son paralelos á los lados del cuadrilátero. Por consiguiente, la cónica pasa por los puntos medios de los lados del cuadrilátero.

— Esta curva pasa también por los puntos de concurso de las diagonales del cuadrilátero dado.

— Si la cónica se convierte en dos rectas, los puntos de intersección de las diagonales, y los de los lados opuestos, son puntos del lugar; luego estará en una cónica que pasa por los puntos medios de los lados y de las diagonales.

Cónica directriz modular.

En el sistema de generación que los ingleses llaman *modular*, y en el cual se dan un punto fijo (foco), una recta fija (directriz), un plano fijo ó de dirección conocida y en el que todo punto queda determinado de modo que su distancia al foco, dividida por la distancia á la directriz, medida paralelamente al plano dado, sea igual á un número dado que se llama *módulo;* conservando el mismo módulo y el mismo plano director, la misma superficie puede ser engendrada por una infinidad de focos y de directrices. Todos estos focos están situados en una cónica (cónica focal de Mr. Chasles) (ver *Cónicas focales)* situada en el plano principal perpendicular á la directriz, y todas las direcciones están sobre un cilindro recto.

Cada directriz tiene por polar recíproca, con relación á la superficie, una tangente á la focal cónica y el punto de contacto es el foco correspondiente. La base del cilindro ha recibido el nombre de *cónica directriz modular.*

Cónicas esféricas ó esferocónicas.

Definición. — Aquellas cónicas trazadas sobre la superficie de la esfera.

Historia. — La ecuación general de las cónicas de esta especie, asi como sus propiedades, han sido tratadas por Gudermann en su tratado de *Esferogeometría Analítica* (1835), y en varias Memorias insertas en el *Journal de Crelle.*

Ecuación. — Si consideramos la figura de la voz *elipse esférica*, y proyectamos un punto de la curva allí obtenida sobre los ejes rec-

tangulares pA'' y pC', haciendo $px = x$ y $py = y$, la ecuación de una cónica esférica será:

$$\frac{tg^2 y}{tg^2 b} + \frac{tg^2 x}{tg^2 a} = 1.$$

Propiedades. — Para las curvas de esta especie se verifica el teorema de Magus sobre la igualdad de los ángulos que forman con el arco tangente á la cónica los dos arcos vectores trazados desde los dos focos al punto de tangencia, y otras propiedades debidas á Mr. Steiner y á Mr. Chasles.

— También son extensivas á las cónicas esféricas muchas de las propiedades de las planas; por ejemplo, la de los polos y las polares de La Hire, la de la involución de Desargues, la descripción de una cónica al modo de Mac-Laurin y de Braikensidge, el exágrama de Pascal, el teorema de Brianchon, etc.

— El lugar del centro de un círculo variable tangente á dos círculos de la esfera, es una cónica esférica.

Casos particulares. — Son cónicas esféricas, la *elipse esférica* y la *curva de Lexell,* en cuyos artículos correspondientes se la describe.

También se tienen las cónicas esféricas homofocales estudiadas por Mr. Chasles, *Comptes rendus de l'Academie des Sciences*, 1860, y de la cual pueden verse algunos teoremas curiosos dados por Mr. Vannson en *Nouvelles Annales,* t. XIX, pág. 197.

Cónicas focales.

Definición. — Cónicas, lugar geométrico de todos los focos, situados en los planos principales, de una superficie de segundo orden.

Historia. — Estas curvas han sido particularmente estudiadas por Chasles, que las llamó *Cónicas excéntricas*, *Memoires de l'Académie de Bruxelles*, 1829; *Aperçu historique sur l'origine et le developpement des methodes en Geometrie* (1837, pág. 385), á fin de no confundirlas con las focales de Quetelet *(Ver, Focal y Strofóide);* pero ha prevalecido el nombre de *focales*, mucho más cuanto que ya hoy aquéllas tienen otra denominación.

Los focos de las cuádricas han sido definidos de diferentes modos y tratados, así como las cónicas que los enlazan, por diferentes autores, entre los cuales podremos citar los siguientes: Magnus, *Annales de Gergonne* (t. XVI, pág. 33, 1825-1826); Mac-Cullagh, *Proceeding of the Royal Irish Academy* (t. II, pág. 446, 1836); Towusend, *Cam-*

bridge and Dublin mathematical journal (t. III, págs. 1, 97, 148; 1842); Amiot, *Journal de Liouville* (t. VIII y X, 1843 y 1845); Briot y Bouquet, *Complement de la Geometrie anolytique* (pág. 261); Painvin, *Principes de la Géométrie analytique à trois dimensions (Geom. de l'espace*, 2.ª parte, pág. 314; 1870), etc.

Propiedades. — En las cuádricas con centro existe una infinidad de focos situados sobre tres cónicas, que se encuentran en los planos principales, y corresponden á las ecuaciones:

$$z=0,\quad \frac{x^2}{A-C}+\frac{y^2}{B-C}=1; \qquad (a)$$

$$x=0,\quad \frac{y^2}{B-A}+\frac{z^2}{C-A}=1; \qquad (b)$$

$$y=0,\quad \frac{z^2}{C-B}+\frac{x^2}{A-B}=1; \qquad (c)$$

siendo (x, y, z), las coordenadas de un punto cualquiera de la cuádrica dada por su ecuación general. En el caso de elipsoide $(a^2>b^2>c^2)$, *(a)* representa una elipse real; *(b)*, una elipse imaginaria, y *(c)*, una hipérbola.

—Cada una de las cónicas focales tiene por focos los de la sección principal correspondiente, y por vértices los focos de las otras secciones principales.

—Las cónicas focales pasan por los umbílicos; en particular, en el caso del elipsoide, la focal *(c)* pasa por los umbílicos reales de la superficie, de aquí el nombre de *cónica focal* umbilical.

—En el hiperboloide de una hoja y en el paraboloide hiperbólico, las dos cónicas focales reales son modulares, y pueden servir para engendrar la superficie; pero en el elipsoide, en el paraboloide elíptico y en el hiperboloide de dos hojas, no es modular más que una de las focales, aquella que no encuentra á la superficie.

—Las focales representan el lugar geométrico de los vértices de los conos de revolución circunscritos á la cuádrica correspondiente. En efecto, si un cono de revolución es circunscrito á la cuádrica, su vértice puede ser considerado como una esfera, punto al cual el cono es circunscrito; el cono siendo circunscrito á la par á la esfera y á la cuadrica, estas dos superficies se cortan según dos curvas planas. Se distinguen dos especies de focos, según que las curvas sean reales ó imaginarias.

—Cuando un cono está circunscrito á una superficie de segundo gra-

do, sus tres ejes van á encontrar cada uno de los planos principales de la superficie en puntos A, B, C, tales que BC es la polar de A con relación á la cónica focal situada en el plano principal considerado. (Chasles.)

—El producto de las distancias de cada punto de una cónica focal de una superficie de segundo grado, á dos planos tangentes á la superficie, paralelos entre sí y paralelos á la tangente, á la cónica en un punto tomado sobre ella, es constante cualquiera que sea este punto. (Chasles.)

—Estas curvas dan lugar, con relación á las superficies, á una teoría análoga á la de los focos en las secciones cónicas.

Cónicas homocyclicas.

A causa de la dualidad constante á que está sujeta toda la geometría de la esfera; la teoría de las cónicas homofocales da lugar á una serie de teoremas, que como le llama el autor de ellas, Chasles, es la teoría de las cónicas *homocyclicas:*

Las ecuaciones

$$A = ax^2 + by^2 + cz^2 + \lambda (x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$
$$A' = ax^2 + by^2 + cz^2 + \lambda (x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

representan dos esféricas *homocyclicas.*

Cónicas homológicas.

Definicion.—Dáse este nombre á las cónicas que tienen entre sí la relación de homología. (Ver homológicas.)

Propiedades.—Dos cónicas trazadas de cualquier modo en un plano son homológicas. Consideremos dos cónicas que se cortan en cuatro puntos reales, y tracémoslas las tangentes comunes A y B. Sean C y D las secantes comunes conjugadas que pasan por el punto de intersección de las cuerdas de contacto de las tangentes comunes. Refiriendo las dos curvas al triángulo ABC, las ecuaciones de las cuerdas de contacto serán de la forma

$$\lambda A + \mu B + v C = 0 \qquad \lambda A + \mu B + v' C = 0,$$

puesto que la segunda pasa por el punto de intersección del lado C

con la primera. Así, pues, las dos cónicas están representadas por las ecuaciones:

$$AB - (\lambda A + \mu B + v C)^2 = 0,$$
$$AB - (\lambda A + \mu B + v' C)^2 = 0;$$

y como para pasar de la primera á la segunda se tienen las relaciones:

$$\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta} = \frac{vC}{v'C},$$

las dos cónicas son *homológicas.*

—El punto de concurso de las tangentes comunes es el centro, y la secante común C, el eje de homología.

—Se llegará al mismo resultado, tomando para tercer lado del triángulo de referencia la otra secante común D; por tanto, las secantes conjugadas C y D son dos ejes de homología que corresponden al centro S. Del propio modo se verá, que el punto de concurso S' de las otras dos tangentes comunes es también un centro de homología en que los ejes son las mismas secantes comunes C y D. Los otros puntos de intersección de las tangentes comunes son asimismo los centros de homología, que tienen por ejes las otras secantes comunes conjugadas.

—Cuando dos cónicas se tocan, el punto de contacto es un centro de homología de estas dos curvas.

—Cuando dos cónicas tienen un doble contacto en los puntos S y S', las tangentes en estos puntos se cortan en un punto A que será un centro de homología, cuyo eje correspondiente es la cuerda de los contactos. Los puntos S y S' son asimismo dos centros de homología, cuyos ejes son las tangentes que concurren al punto A.

—Dos cónicas que tienen un foco común son homológicas. En efecto; cuando el origen de coordenadas está en un foco, una cónica está representada por una ecuación de la forma

$$X^2 + Y^2 - (\alpha X + \beta Y + \gamma)^2 = 0,$$

y si se hace

$$X = \frac{x}{lx + my + n}; \quad Y = \frac{y}{lx + my + n};$$

se encuentra una ecuación de la misma forma, que será la de una

nueva cónica que tenga por foco el origen. El foco común es, pues, un centro de homología de las dos curvas.

— Un círculo de radio cualquiera, descrito desde el foco de una cónica, como centro, es homológico á esta cónica.

— Dos cónicas semejantes son homológicas, y los centros de semejanza de estas curvas serán los puntos de concurso de sus tangentes comunes.

— Dos cónicas homotéticas tendrán una secante común en el infinito, que no es otra cosa sino el eje á que van á concurrir las rectas homólogas paralelas.

Trazado. — Para resolver linealmente el problema de determinar la cónica homológica de una cónica dada, distinguiremos los casos siguientes: 1.°, se da el centro, el eje de homología y un punto ó una tangente de la cónica buscada; 2.°, se da el centro ó el eje de hemología con tres puntos ó tres tangentes, ó dos puntos y una tangente, ó dos tangentes y un punto de la cónica buscada, y 3.°, se dan ó los dos centros de homología, ó los dos ejes y un punto, ó una tangente de la cónica pedida. Indicaremos la solución de algunos de estos casos generales.

Primer caso. — Se conoce el centro y el eje de homología y un punto de la cónica no descrita. Para construir esta cónica se une el centro al punto dado; esta recta irá á cortar la cónica dada en dos puntos, que podrán ser considerados, cualquiera de ellos, como el homólogo del punto dado: tomando sucesivamente el uno y el otro, y siguiendo el orden de las construcciones indicadas en *(Homológicas)* se obtendrán las cónicas que satisfacen á la cuestión.

Segundo caso. —Se nos da el centro y el eje de homología con una tangente á la curva no descrita. Si se prolonga la tangente dada hasta su encuentro con el eje de homología, y por el punto de encuentro con este eje se dirigen las dos tangentes á la curva dada, una y otra podrán ser consideradas como la homóloga de la tangente dada. En uniendo el punto de contacto al centro, este radio cortará á la tangente dada en el punto de contacto de esta tangente con la curva buscada. Estaremos, por tanto, en el caso anterior. El problema tendrá dos soluciones.

Tercer caso. — Se nos da el centro de homología y tres puntos de la curva no descrita. Uniendo los tres puntos dados con el centro y prolongando cada radio hasta sus dos encuentros con la curva dada, se tendrán seis puntos que determinarán ocho triángulos, que podrán ser considerados como los homólogos del triángulo dado. Se tendrán ocho ejes de homología, los cuales serán conjugados dos á

dos con relación al centro de homología dado; no encontrándose, por tanto, más que cuatro cónicas distintas que respondan á la solución buscada.

Cuarto caso. — Conociendo el centro de homología y tres tangentes de la cónica no descrita, construir esta cónica. Los vértices del triángulo formado por las tangentes dadas, tendrán por homólogos dos puntos situados sobre los radios correspondientes. La cuestión quedará, pues, referida á circunscribir á la cónica dada un triángulo cuyos tres vértices sean las tres rectas dadas, problema que sabemos resolver.

Quinto caso. — Se da el centro de homología con dos puntos y una tangente de la cónica no descrita. Uniendo al centro los dos puntos dados y prolongando estas rectas hasta que corten á la cónica dada, se tendrán los homólogos de los puntos dados. La recta que las una será la homóloga de la que pasa por los puntos dados, y el punto de encuentro de estas dos rectas será un punto del eje de homología. Por otra parte, prolongando hasta su encuentro la tangente dada y la recta que une los puntos dados, proyectando el punto de encuentro sobre la cuerda homóloga de la cuerda dada, dirigiendo por el punto obtenido una tangente á la cónica dada y prolongando las dos tangentes homólogas hasta su intersección, se tendrá un segundo punto del eje de homología, etc.

Aplicaciones. — Esta teoría nos da también los medios de construir, según datos suficientes, la cónica que tenga con otra cónica dada en un punto dado, un contacto de primero, segundo ó tercer orden. Así, por ejemplo, si se quiere construir la cónica que tenga con otra dada cuatro puntos confundidos en uno solo dado, este punto será el centro de homología, puesto que será el punto de encuentro de dos tangentes comunes. Por otra parte, la tangente en este punto será el eje de homología, puesto que será una secante común á las dos cónicas.

En general, la teoría de las cónicas homológicas ofrece preciosas ventajas en todas las circunstancias en que se trata de construir una cónica por medio de ciertos datos. Bastará para ello trazar sobre el plano de esta cónica un círculo que le sea homológico con relación á un eje y á un centro que se pueda determinar.

Cónicas homotéticas.

Definición. — Se da este nombre á las cónicas que guardan entre sí la razón de homotesia. (Ver homotéticas.)

Propiedades. — Para que dos cónicas sean homotéticas, es necesario y suficiente que los coeficientes de los términos de segundo grado sean proporcionales.

Sean

$$(1)\qquad U = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

$$(2)\qquad V = A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 + 2D'x + 2E'y + F' = 0$$

las ecuaciones de las dos cónicas propuestas. La ecuación general de las cónicas homotéticas á la primera es

$$(3)\qquad A\left(\frac{x-\alpha}{K}\right)^2 + 2B\left(\frac{x-\alpha}{K}\right)\left(\frac{y-b}{K}\right) + C\left(\frac{y-b}{K}\right)^2 + 2D\frac{x-\alpha}{K} + 2E\frac{y-b}{K} + F = 0,$$

desarrollando é identificando las ecuaciones (2) y (3) se obtendrán las relaciones:

$$\frac{A}{A'} = \frac{C}{C'} = \frac{B}{B'} = \frac{EK - B\alpha - C\beta}{E'} = \frac{DK - A\alpha - B\beta}{D'} = \frac{A\alpha^2 + C\beta^2 + 2B\alpha\beta - 2E\beta K - 2D\alpha K - FK^2}{F'}.$$

En estas igualdades, las incógnitas son α, β y K; se ve, por tanto, que ellas exigen que las relaciones

$$\frac{A}{A'} = \frac{C}{C'} = \frac{B}{B'}$$

sean iguales; así, pues, estas relaciones son necesarias.

Resta demostrar que son suficientes, admitiendo, sin embargo, que el valor de K sea susceptible de tomar valores imaginarios.

Llamemos λ el valor común de estas relaciones; las incógnitas α, β y K verificarán las ecuaciones siguientes:

$$A\alpha + B\beta - DK + D'\lambda = 0$$
$$B\alpha + C\beta - EK + E'\lambda = 0$$
$$A\alpha^2 + C\beta^2 + 2B\alpha\beta - 2E\beta K - 2D\alpha K + FK^2 - F'\lambda = 0,$$

las cuales dan

$$\begin{vmatrix} A & B & -DK + D'\lambda \\ B & C & -EK + E'\lambda \\ D'\lambda + DK & E'\lambda + EK & -FK^2 + F'\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

ó bien:

$$-K^2\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} - \lambda K \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D' & E' & 0 \end{vmatrix} + \lambda K \begin{vmatrix} A & B & D' \\ B & C & E' \\ D & E & 0 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} A & B & D' \\ B & C & E' \\ D'\lambda & E'\lambda & F' \end{vmatrix}$$

y simplificando

$$K^2\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} A & B & D' \\ B & C & E' \\ D'\lambda & E'\lambda & F' \end{vmatrix}$$

ó, finalmente,

$$K^2\delta = \lambda^3\Delta;$$

designando δ y Δ las discriminantes de las dos cónicas propuestas. Se puede suponer desde luego que A y A' son positivas; en este caso λ es una cantidad positiva, y los valores de K son reales si las dos cónicas consideradas tienen sus discriminantes del mismo signo; en el caso contrario serán imaginarias.

Se notará que el valor de K^2 no es nulo, ni infinito, cuando Δ y δ son diferentes de cero

—Dos cónicas homotéticas son del mismo género. Porque siendo homotéticas se tendrá:

$$\frac{A}{A'} = \frac{C}{C'} = \frac{B}{B'},$$

y si llamamos λ el valor de estas relaciones se encuentra:

$$B'^2 - A'C' = \frac{B^2 - AC}{\lambda^2};$$

por consiguiente, los dos binomios $B^2 - AC$ y $B'^2 - A'C'$ son del mismo signo.

—Para que dos cónicas sean homotéticas, es suficiente y necesario que sus asíntotas sean paralelas. Las ecuaciones que nos dan los coeficientes angulares de las asíntotas de las cónicas (1) y (2), son:

$$Cm^2 + 2Bm + A = 0, \qquad C'm^2 + 2B'm + A' = 0,$$

y como para que dos cónicas tengan sus asíntotas paralelas, es suficiente y necesario que se tenga

$$\frac{A}{A'} = \frac{C}{C'} = \frac{B}{B'},$$

se puede considerar que dos cónicas homotéticas tienen sus ejes paralelos.

—Dos cónicas homotéticas tienen una cuerda común en el infinito.

—Dos cónicas homotéticas y concéntricas tienen un doble contacto sobre la recta situada en el infinito.

—Para más detalles sobre estas especies de curvas pueden consultarse, entre otros trabajos, el de F. Wœpcke, *Theoremes sur les coniques homothetiques* (*Journal de Crelle*. 1857).

Cónicas polares.

Definición y ecuación. — Se ha dado este nombre á cierta clase de curvas que, referidas á coordenadas polares, tienen por ecuación:

$$r^2 = \frac{4a}{\alpha^2}(\alpha n + n^2), \quad r^2 = \frac{4a}{\alpha^2}(\alpha n - n^2) \quad \text{y} \quad r^2 = 2mn,$$

en las que $r =$ al radio vector,

$n =$ al arco correspondiente

y a, α y m representan constantes dadas.

Historia. — El estudio y denominación de estas curvas es debido á R. Rubini, *Nouvelles Annales* (t. X, pág. 237).

Propiedades. — Las tres curvas representadas por las ecuaciones anteriores pasan evidentemente por el polo.

—La primera es una curva cerrada. — *Elipse polar.*

—La segunda tiene dos ramas infinitas en hélice.—*Hipérbola polar.*

—La tercera tiene una rama infinita en hélice. — *Parábola polar.*

—Las construcciones de estas líneas ofrecen ejercicios y lugares geométricos instructivos.

—Sus cuadraturas se refieren á la de arcos de círculos y la rectificación á funciones elípticas.

Cónicas polares recíprocas.

Definición.—Reciben este nombre las cónicas que guardan entre sí la relación de las curvas polares recíprocas. (Ver esta voz.)

Ecuación.—Sea

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

ó

$$F(x, y) = 0, \qquad (1)$$

la ecuación de la cónica directriz, y

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + cx + f = 0$$

ó

$$f(x, y) = 0, \qquad (2)$$

la cónica, cuya polar recíproca se desea conocer.

La relación $\varphi(m, n) = 0$ entre las constantes de la polar representada por $y = mx + n$ se obtendrá, reemplazando en (2) y por $mx + n$ y expresando que la ecuación resultante de segundo grado en x tiene sus dos raíces iguales. Se encontrará:

$$(b^2 - 4ac)n^2 + 2(2ae - bd)mn + (d^2 - 4aK)m^2 + 2(bc - 2cd)n +$$
$$+ 2(de - 2bK)m + e^2 - 4cK = 0,$$

en la que sustituyendo por m y n sus valores

$$m = -\frac{F'x}{F'y} \qquad n = -\frac{p}{F'y}$$

se tendrá para ecuación de la polar recíproca de la cónica (2)

$$(e^2 - 4cK)(F'y)^2 - 2(de - 2bK)F'yF'x + (d^2 - 4aK)(F'x)^2 -$$
$$- 2(be - 2cd)p \,.\, F'y - 2(bd - 2ae)pF'x + (b^2 - 4ac)p^2 = 0.$$

Si se toma por directriz la cónica (2), la ecuación de la polar recíproca de la cónica (1) será:

$$(E^2 - 4CK)(f'y)^2 - 2(DE - 2BK)f'yf'x + (D^2 - 4AK)(f'x)^2 -$$
$$- 2(BE - 2CD)p \,.\, f'y - 2(BD - 2AE)p \,.\, f'x + (B^2 - 4AC)p^2 = 0.$$

—Si la cónica auxiliar es un círculo $x^2 + y^2 = r^2$ y la cónica tiene por ecuación en coordenadas rectangulares:

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0,$$

la polar recíproca será una cónica definida por la ecuación correspondiente:

$$r^4(An^2 + 2Bnv + Cv^2) + (2Dn + 2Ev)r^2 + F = 0.$$

Si la cónica dada tiene por ecuación en coordenadas tangenciales:

$$(D^2 - AF)n^2 + 2(BF - DE)nv + (E^2 - CF)v^2 -$$
$$- 2(AE - BD)n - 2(CD - BE)v + B^2 - AC = 0,$$

la de su recíproca será:

$$(D^2 - AF)x^2 + 2(BF - DE)xy + (E^2 - CF)y^2 -$$
$$r^2[2(AE - BD)x + 2(CD - BE)y] + r^4(B^2 - AC) = 0.$$

Propiedades.—La especie de la segunda curva S' depende de la posición del centro de la directriz con relación á la primera S. Si el centro O de la directriz está fuera de la curva S, se puede desde él

trazar dos tangentes á la curva S, los polos de estas dos tangentes están en el infinito, la curva S' tiene, pues, dos ramas infinitas, es una *hipérbola*. Si el centro de la directriz está sobre la curva S no se la puede trazar desde él más que una tangente á S, la curva S' no tiene en el infinito puntos, sino en una sola dirección, es una *parábola*. Por último, si el centro de la directriz está dentro de la curva S, todas las tangentes á esta curva S tienen sus polos á distancias finitas; la curva S' es, pues, una *elipse*.

—A los puntos de contacto de las dos tangentes trazadas por el origen, corresponden las tangentes en los dos puntos en el infinito á la curva recíproca, esto es, las asíntotas de esta curva. La excentricidad de la hipérbola recíproca, función del ángulo que forman sus asíntotas, dependerá, por consiguiente, del que forman las tangentes trazadas por el origen á la curva primitiva.

—La intersección de las asíntotas de la curva recíproca, esto es, su centro, corresponde á la cuerda de contacto de las tangentes trazadas por el origen á la curva primitiva.

—Los ejes de la cónica recíproca de otra dada, son paralelos á las bisectrices de los ángulos que forman las tangentes trazadas por el origen á la cónica dada.

—La recíproca de una parábola, con respecto á un punto cualquiera de la directriz, es una hipérbola equilátera.

Aplicaciones.—Como se dice en polares recíprocas (ver esta voz), ciertas propiedades una vez demostradas, lo quedan sus recíprocas; sirvan de ejemplo las siguientes:

El polo de una tangente á la cónica es el punto de contacto de esta tangente.	La polar de un punto de la cónica es la tangente en este punto.
Dos cónicas se cortan en general en cuatro puntos.	Dos cónicas tienen en general cuatro tangentes comunes.
Toda recta del plano es tocada por dos cónicas de un haz.	Por todo punto del plano pasan dos cónicas del sistema.
Los puntos de intersección de las cónicas de un haz con una recta forman sobre ella una involución. En cada uno de dos puntos dobles de esta involución, la recta es tocada por una curva del haz.	Las tangentes dirigidas desde un punto á las cónicas de un sistema forman una involución. Cada uno de dos radios dobles de ésta es tocada en el punto dado por una curva del sistema.

Las tangentes trazadas por un punto cualquiera á dos cónicas con focales, forman entre sí ángulos iguales.

Los segmentos determinados en una secante cualquiera por dos círculos, subtienden ángulos iguales en cualquiera de los puntos límites.

La intersección de las alturas de un triángulo circunscristo á una parábola, es un punto de la directriz.

La intersección de las alturas de un triángulo inscrito en una hipérbola equilátera, es un punto de la curva.

Cónicas semejantes.

Condición de semejanza. — Para que dos cónicas sean semejantes (ver esta voz) y semejantemente dispuestas, es necesario que los coeficientes de los tres términos de segundo orden, sean proporcionales.

Así, pues, si

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$
$$A'y'^2 + B'x'y' + C'x'^2 + D'y' + E'x' + F' = 0$$

representan las ecuaciones de dos cónicas semejantes; se tendrá

$$K = \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'},$$

de donde resulta

$$B^2 - 4AC = K^2(B'^2 - 4A'C'),$$

y como estos binomios característicos tienen el mismo signo, las dos curvas serán siempre del mismo *género.*

— En el caso de que las cónicas dadas, asimismo por sus ecuaciones generales, sean semejantes, aunque no semejantemente dispuestas; se hallará la condición necesaria refiriendo la ecuación de una de ellas á un sistema de ejes que forme con el primitivo un ángulo cualquiera θ, y se investigará qué valor deberá tener θ para que los nuevos coeficientes A, B, C, sean proporcionales á los A', B', C', de la segunda cónica.

Propiedades. — Si por el centro de semejanza de dos cónicas semejantes se trazan dos radios vectores, las cuerdas que unen sus ex-

tremos serán paralelas ó se cortarán sobre la cuerda intersección de las dos cónicas.

— Dadas tres cónicas semejantes, y semejantemente dispuestas, sus seis centros de semejanza, tomados tres á tres, están en línea recta.

— Si una recta corta á dos cónicas semejantes y concéntricas, los segmentos de aquélla interceptados por éstas, son iguales. Toda cuerda de la cónica exterior tangente á la interior, queda dividida en partes iguales en el punto de contacto.

— Si dos cónicas son semejantes, semejantemente colocadas y concéntricas, toda tangente á la cónica interior determina en la exterior un segmento de área constante.

— Dos cónicas semejantes, y semejantemente dispuestas, se cortan en dos puntos en el infinito, y, por tanto, no pueden encontrarse más que en otros dos puntos.

Cónicas suplementarias.

Mr. Poncelet llama *Cónicas suplementarias* relativamente á la dirección Oy á las cónicas representadas por las ecuaciones

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{é} \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

tales que la relación de las ordenadas correspondientes á una misma abscisa es $\sqrt{-1}$.

— Entre una cónica y su *suplementaria ó conjugada* (ver esta voz) se establece una continuidad más ó menos íntima, pero íntima al fin, resultado de ser formadas unas y otras por las soluciones reales y las soluciones imaginarias, continuas entre sí, bajo el punto de vista algebraico de una sola y misma ecuación, punto de vista desde el cual ha tratado este asunto Poncelet en su Teoría sobre la continuidad.

Conjugadas ó suplementarias.

Definición. — Conjugada de un lugar $f(x, y) = 0$ son los lugares correspondientes á las soluciones de la ecuación $f(x, y) = 0$, en que las partes imaginarias de y y de x están en una relación constante, aunque arbitraria; es decir, á las soluciones que forman todos los sistemas, tales como

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$
$$y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}.$$

— Se sabe también que Marié construye cada uno de estos lugares tomando para sus coordenadas

$$x_1 = \alpha + \beta,$$
$$y_1 = \alpha' + \beta C,$$

y que todos ellos están ligados al lugar real de tal manera, que siempre son los mismos, tienen la misma figura y la misma situación con respecto á la curva real, cualquiera que sean los ejes á los que dicha curva se encuentre ó sea referida; así, pues, *se podrá considerar una ecuación de dos variables como representando una curva real*, *más una infinidad de curvas conjugadas.*

Historia. — El estudio de estas curvas se debe principalmente á Mr. Marié, *Theorie des fonctions de variables imaginaires*, el cual ha podido demostrar la fijación de las reglas de convergencia de la serie de Taylor (*Journal de Liouville*, 2.ª serie, t. VI, 1861) y dar una interpretación geométrica sencilla de períodos de las integrales simples, dobles ó de un orden cualquiera. Asimismo, la obra de Lambert, *Trigonometrie hiperbolique*, ha dado á Marié la base de una teoría sobre la curvatura de las líneas imaginarias.

Ecuación de la tangente. — La ecuación general de las tangentes á una curva $f(x, y) = 0$, es

$$Y - y = -\frac{f_x'(x, y)}{f_y'(x, y)}(X - x).$$

Si x é y toman los valores

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$
$$y = \alpha' + \beta C\sqrt{-1},$$

satisfaciendo, bien entendido, á la ecuación del lugar, la ecuación de la tangente se reduce aritméticamente á la fórmula

$$Y = \left(m + n\sqrt{-1}\right) X + p + q\sqrt{-1},$$

ecuación que representa un haz de rectas que parten del punto

$$\begin{cases} Y = mX + p \\ o = xX - q. \end{cases}$$

Las que pertenecen al sistema C pasan por el punto

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1} \qquad y = \alpha' + \beta C\sqrt{-1},$$

y es fácil ver que es tangente en este punto á la conjugada C de la curva.

Curvatura de una conjugada. — La curvatura de la hipérbola equilátera conjugada del círculo en el punto de contacto de las dos curvas, es la misma que la del círculo; de donde se deduce que *una conjugada de una curva cualquiera en el punto en que toca á esta curva, tiene igual curvatura que ella en este punto.*

Si $r + r'\sqrt{-1}$ es el valor de la expresión

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

en un punto imaginario (x, y) de una conjugada que tenga por característica C, la curvatura de esta conjugada, en el punto x, y, es dada por la fórmula:

$$\frac{\left[\frac{1 - n^2}{(C + n)^2 + n^2(C - n^2)}\right]^{3/2}}{r(-n^3 - 3Cn^2 + 3C^2n - C^3) + r'(-n^3 + 3n^2C - 3nC^2 - C^3)} \over r^2 + r'^2}.$$

en la que n designa la tangente dividida por $\sqrt{-1}$ de la parte imaginaria del ángulo en que la tangente es $\frac{dy}{dx}$.

Rectificación. — La rectificación de una conjugada C, de una curva $f(x, y) = 0$, no se refiere, en general, á la misma cuadratura que aquella de la curva real; pero he aquí una consecuencia que

presenta bastante interés; la longitud del lugar que limita la porción de plano cubierto por los puntos imaginarios $\frac{dy}{dx}$ es real y representa el coeficiente angular de la tangente á este lugar en el punto (x, y).

La expresión $dx\sqrt{y+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ representa, abstracción hecha del signo $\sqrt{-1}$, que se reemplazará por 1, el elemento curvilíneo del lugar y $\int dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ un arco cualquiera.

Asi, pues, si para obtener el arco de la curva real representado por la ecuación propuesta, se tiene

$$z=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

de manera que el área de la curva (z, x) representa el arco de la curva (y, x), el área de la conjugada en ordenadas reales de la curva (z, x), representará proporcionalmente el arco de la envolvente imaginaria de las conjugadas de la curva propuesta.

Area. — El área de una de las elipses conjugadas de una hipérbola $\pi a' b' \, sen . \, \theta$, siendo a', b' los dos diámetros conjugados comunes á las dos curvas y θ su ángulo, el teorema de Apollonius (ver diametrales), significa, por consiguiente, que todas las conjugadas de una hipérbola tienen la misma área.

—Todas las curvas algebraicas gozan de esta propiedad, *las áreas de los anillos formados de conjugadas comprendidas entre las mismas ramas de la curva real, son todas iguales.*

Casos particulares. — *Conjugadas del círculo.* — Las conjugadas del círculo son todas las hipérbolas equiláteras descritas sobre los diámetros de este círculo tomados por ejes transversos.

En efecto; si se toma por eje de las y el diámetro paralelo á las cuerdas reales de la conjugada que se quiere obtener, y por eje de las x el diámetro perpendicular, la ecuación del círculo será

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad ó \quad y = \pm\sqrt{R^2 - x^2};$$

para obtener la conjugada en abscisas reales de la curva, es necesa-

rio dar á x valores reales, á los cuales corresponderán los imaginarios de y y realizar estos valores imaginarios reemplazando $\sqrt{-1}$ por 1. Ahora la ordenanda así transformada vendrá á ser

$$y = \sqrt{x^2 - R^2},$$

la cual es la de una hipérbola equilátera que tenga por eje transversal el diámetro tomado sobre el eje de las x del círculo propuesto. —La ecuación $Xx + Yy = R^2$ de la tangente al círculo, es la de la tangente á la conjugada que pasa por el punto (x, y) supuesto imaginario.

Del propio modo la ecuación general de las tangentes á las conjugadas del círculo será

$$y = (m + n\sqrt{-1}.x + R\sqrt{1 + (m + n\sqrt{-1})^2}.$$

—Las asíntotas de estas mismas conjugadas son formadas por las ecuaciones

$$y = \pm\sqrt{-1}\,.\,x.$$

—La envolvente imaginaria de las conjugadas del círculo imaginario (ver esta voz)

$$\left(x - a\sqrt{-1}\right)^2 + y^2 = \left(r + r'\sqrt{-1}\right)^2$$

es el círculo

$$(x - a)^2 + y^2 = (r + r')^2;$$

y si se quiere conservar la ecuación del círculo imaginario en su forma primitiva

$$\left(x - a - a'\sqrt{-1}\right)^2 + \left(y - b - b'\sqrt{-1}\right)^2 = \left(r + r'\sqrt{-1}\right)^2,$$

la de la envolvente imaginaria sería

$$(x - a - a')^2 + (y - b - b')^2 = (r + r')^2. \qquad (a)$$

—Si este círculo imaginario es el círculo osculador de un lugar $f(x, y) = 0$ en un punto de la envolvente imaginaria de estas con-

jugadas, se deduce que las dos envolventes tienen entre sí un contacto de segundo orden, según expresa la ecuación (a) que es precisamente el círculo osculador de la envolvente imaginaria de las conjugadas del lugar.

Las conjugadas del círculo imaginario en los puntos en que ellas tocan su envolvente tienen una curvatura constante; el radio del círculo que tiene esta curvatura es $\frac{r^2 + r'^2}{r - r'}$. Esta fórmula hace conocer el radio del círculo osculador á una conjugada cualquiera de una curva en el punto en que ella toca la envolvente real ó imaginaria. —Las asíntotas de todas las conjugadas están representadas por las ecuaciones

$$y = \pm\sqrt{-1}\left(x - a\sqrt{-1}\right).$$

—Las dos asíntotas de una misma conjugada C son perpendiculares entre sí y parten respectivamente de los puntos (o, $+a$), (o, $-a$) y están inclinados 45° sobre la línea $y = Cx$; y la línea $y = \frac{1}{C}(x - a)$ es un eje de simetría de la conjugada C.

Conjugadas de la elipse. —Las conjugadas de la elipse son todas las hipérbolas que tienen con ella un sistema de diámetros conjugados comunes. Las soluciones imaginarias de todos los problemas imposibles que se pueden proponer relativamente á la elipse se refieren, por tanto, á estas hipérbolas. Así, si se propone dirigir una tangente á la elipse por un punto interior á la curva, las coordenadas imaginarias de los puntos de contacto, obtenidas por las ecuaciones, serán aquellas de los puntos de contacto de las tangentes trazadas desde el mismo punto á una cierta conjugada de la elipse. Esta conjugada será por otra parte aquella que toca la curva en los extremos del diámetro dirigido por el punto dado, puesto que la cuerda de contacto habrá permanecido real y conjugada del diámetro trazado por el punto del que las tangentes deben partir; no pudiendo cortar más que la conjugada que tenga por característica su coeficiente angular, es decir, la conjugada tangente á la elipse en los extremos del diámetro dirigido por el punto dado.

Las asíntotas de la elipse son:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{-1} \cdot x,$$

estas dos ecuaciones representan los dos haces asintóticos de las conjugadas hiperbólicas de la curva.

Si en la ecuación

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

de las tangentes á la elipse se da á m su valor imaginario

$$m + n\sqrt{-1},$$

se obtiene la ecuación en coordenadas imaginarias de una tangente á una de las mismas hipérbolas. La conjugada á la que pertenece la tangente tiene su característica C determinada por la ecuación

$$(C - m)(ma^2 + b^2) = n^2a^2C.$$

Conjugadas de la hipérbola.—Las conjugadas de la hipérbola son todas las elipses que tienen con ella un sistema de diámetros conjugados comunes. Los diámetros no transversos de la hipérbola no son otra cosa que los diámetros de sus conjugados dirigidos paralelamente á sus cuerdas reales respectivas. La conjugada cuyas cuerdas reales son paralelas á una de sus asíntotas, se reduce á esta asíntota. Es esta una elipse indefinidamente alargada é indefinidamente aplastada.

—Las conjugadas de la hipérbola tienen por envolvente imaginaria la hipérbola que otras veces se llamaba conjugada de la primera y que Marié llama su *suplementaria;* es esta la hipérbola que tiene las mismas asíntotas y los mismos ejes, pero invertidos de transversos en no transversos.

— Las soluciones imaginarias de todos los problemas imposibles que se pueden proponer referentes á la hipérbola, se refieren á las elipses sus conjugadas, paralelamente á lo que antes hemos dicho al ocuparnos de estas últimas curvas.

— Si se trata de dirigir una tangente á la hipérbola, paralela á una dirección comprendida en el ángulo de las asíntotas en que se encuentra la curva, el cálculo nos da una tangente á la envolvente imaginaria de las conjugadas.

Conjugadas de la parábola. — Las conjugadas de la parábola son todas las parábolas iguales que le son opuestas por un diámetro común conjugado de las mismas cuerdas. Porque, en efecto, si se quieren conocer las conjugadas de la curva cuyas cuerdas reales

sean paralelas á una dirección dadas, se podrá referir el lugar á la tangente paralela á esta dirección y á un diámetro conjugado, la ecuación de la curva real será:

$$y'^2 = 2p'x',$$

y si se la corta por dos rectas $x' = -x''$, el lugar imaginario de los puntos de encuentro será la parábola

$$y'^2 = -2p'x''.$$

Conjugada de la cisoide. — La conjugada en abscisas reales de la cisoide (ver esta voz) es muy notable. Tiene por ecuacion:

$$y = \sqrt{\frac{x^3}{x - 2R}}$$

y deriva de la hipérbola equilátera conjugada del círculo, absolutamente como la cisoide deriva también del círculo.

Consideraciones generales. — Así como por lo dejado expuesto se ve que las *cónicas* tienen sus suplementarias; las demás curvas deberán tenerlas también, como, por ejemplo, lo hemos indicado para la cisoide, y si bien hasta ahora no se han ocupado de su determinación, no significa que haya imposibilidad en extender este estudio haciéndolo general para todas las diferentes clases de curvas conocidas.

— La introducción de la ciencia de las conjugadas de un lugar ha permitido substituir al estudio de una función imaginaria de variables imaginarias, aquél otro más sencillo de una función imaginaria de variables reales.

— Diremos, por último, que en la aplicación á *las series de las teorías de las* conjugadas, llama Marié *conjugadas críticas* á las que son el lugar de los puntos críticos y tienen el carácter de conjugadas.

Conjugadas recíprocas.

Definición. — Se dice que dos curvas son *conjugadas recíprocas*, cuando cada una de ellas es la conjugada de la otra.

Ejemplo. — Dos curvas de esta clase son la catenaria y la sinusoide: En efecto, si en la ecuación de la catenaria

$$y = a\,\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}$$

se da á x un valor de la forma $x\sqrt{-1}$, y será real y su valor será el de la ordenada de la sinusoide

$$y = a\,\frac{e^{\frac{x}{a}\sqrt{-1}} + e^{-\frac{x}{a}\sqrt{-1}}}{2} = a \,.\, \cos\frac{x}{a}.$$

Contacto.

Definición. — Se da este nombre á la curva lugar geométrico de los puntos de tangencia de todos los planos tangentes dirigidos á

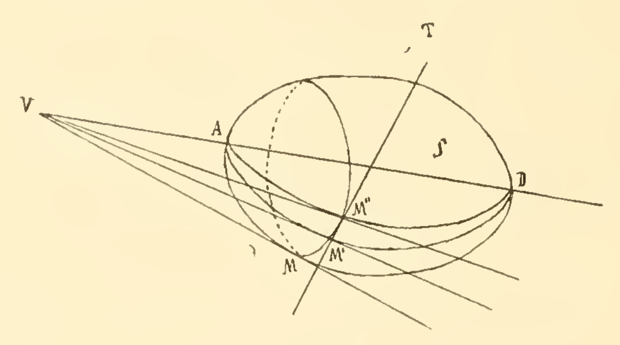


Figura 1.ª

una superficie por un punto exterior ó paralelos á una dirección determinada, ó lo que es lo mismo, á la línea según la cual toca á una superficie un cono ó cilindro que le sea circunscrito.

Propiedades. — Si consideramos un punto V (fig. 1) exterior á una superficie S, y desde ese punto trazamos diferentes planos secantes, que para mayor sencillez suponemos pasen por una recta que *atraviese dicha superficie*, estos planos determinarán en ella diferentes secciones VMD, $VM'D$ .... y desde V se podrán trazar generalmente dos tangentes á cada una de estas curvas, las cuales formarán un cono, cuyo vértice será el punto dado y cuya directriz puede consi-

derarse es la curva $MM'M''$..... formada por los puntos de contacto de las tangentes expresadas. Esta curva *está contenida* en el cono y en la superficie, y el primero será circunscrito á la segunda, tocándola, según dicha curva, que es la de contacto; y por tanto, los planos tangentes al cono lo serán á la superficie en los diferentes puntos de esta curva.

—Del propio modo, si consideramos una recta cualquiera exterior ó una superficie S y otra que la atraviesa paralelamente á la dada, y si hacemos pasar por esta recta planos secantes, nos darán en la superficie diferentes secciones ABD, $AB'D$..... (fig. 2) á las cuales se podrán trazar en general dos tangentes paralelas á la recta dada, obteniendo de esta manera un cilindro de generatrices paralelas á la expresada recta y que tocará á la superficie según la curva $BB'B''$.

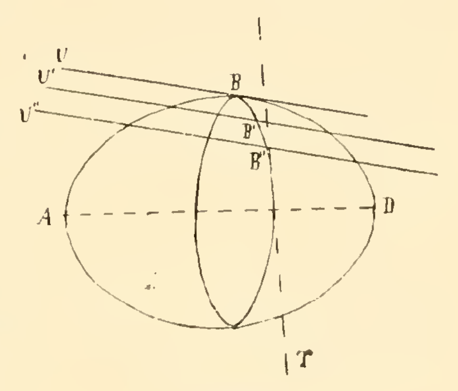


Figura 2.ª

Esta curva está contenida en el cilindro y en la superficie, y el primero será circunscrito á la segunda, tocándola según dicha curva, que es la de contacto, y por tanto los planos tangentes al cilindro lo serán á la superficie en los diferentes puntos de esta curva.

— Así, pues, los problemas de trazar un plano tangente á una superficie cualquiera por un punto exterior ó paralelamente á una dirección determinada, se reducirán, en el primer caso, á trazar un plano tangente al cono circunscrito á la superficie, y cuyo vértice sea el punto dado, y en el segundo, á trazar un plano tangente á un cilindro circunscrito de generatrices paralelas á la recta dada, según una cualquiera de sus generatrices.

Empleo del análisis. — Para tratar estos problemas por el cálculo, supongamos el caso de determinar la curva de contacto de una superficie de segundo grado con un cono ó un cilindro circunscrito.

Sea $F(x, y, z) = 0$ la ecuación de la superficie propuesta; x', y', z' las coordenadas del vértice del cono circunscrito y x_1, y_1, z_1 las de un punto cualquiera de la curva, según la cual toca á la superficie $F(x, y, z) = 0$.

La ecuación del plano tangente á la superficie de segundo grado en el punto (x_1, y_1, z_1), es

$$(x - x_1)F'_{x_1} + (y - y_1)F'_{y_1} + (z - z_1)F'_{z_1} = 0.$$

Siendo este plano tangente á la vez al cono y á la superficie F, contiene el vértice del cono, y se tiene la ecuación de condición

$$(x' - x_1)F'_{x_1} + (y' - y_1)F'_{y_1} + (z' - z_1)F'_{z_1} = 0. \qquad (1)$$

El punto (x_1, y_1, z_1) es de la superficie F; por tanto, se tiene:

$$F(x_1, y_1, z_1) = 0. \qquad (2)$$

Las coordenadas de todos los puntos de contacto del cono y de la superficie deben satisfacer á las ecuaciones (1) y (2); su reunión representa, pues, la curva de contacto. Pero la (1), siendo evidentemente de primer grado en x_1, y_1, z_1, representa un plano, mientras que la ecuacion (2) es la misma de la superficie F.

Luego *la curva de contacto de un cono circunscrito á una superficie de segundo grado proviene de la intersección de esta superficie por un plano, y es por lo tanto una curva plana.*

Además, *el plano de la curva de contacto es paralelo al plano diametral de la superficie que es conjugado al diámedro que pasa por el vértice del cono, ó al plano tangente correspondiente á este diámetro.*

En efecto; si la superficie en cuestión tiene centro, se puede poner su ecuación bajo la forma

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = R,$$

la ecuación (1) de la curva de contacto se convierte entonces, suprimiendo los índices, en

$$P(x' - x)x + P'(y' - y)y + P''(z' - z)z = 0,$$

ó

$$Pxx' + P'yy' + P''zz' = R,$$

en virtud de la ecuación (2) de la misma curva.

Por otra parte, el diámetro que pasa por el vértice (x', y', z') del cono circunscrito tiene por ecuaciones

$$x = \frac{x'}{z'} z, \quad y = \frac{y'}{z'} z;$$

por tanto, el plano conjugado á este diámetro tendrá por ecuación

$$Pxx' + P'yy' + P''zz' = 0,$$

lo que comprueba el teorema para las superficies que tienen centro.

Si la superficie no tiene centro, su ecuación tendrá la forma

$$P'y^2 + P''z^2 + 2Qx = 0,$$

y la ecuación (1) de la curva de contacto se convertirá, suprimiendo los índices, en

$$P'(y' - y)y + P''(z' - z)z + Q(x' - x) = 0$$

ó

$$P'yy' + P''zz' + Q(x + x') = 0,$$

en virtud de la ecuación (2) de la curva.

Por otra parte, las ecuaciones del diámetro que pasa por el vértice (x', y', z'), son entonces:

$$y = y', \quad z = z',$$

este diámetro cortará la superficie en un punto cuyas coordenadas serán:

$$x_1 = -\frac{P'y'^2 + P''z'^2}{2Q}, \quad y_1 = y', \quad z_1 = z'.$$

La ecuación del plano tangente trazado en este punto será, pues,

$$P'yy' + P''zz' + Q\left(x - \frac{P'y'^2 + P''z'^2}{2Q}\right) = 0,$$

lo que comprueba este teorema, para el caso de las superficies que no tienen centro.

Si consideramos un cilindro circunscrito á una superficie de segundo grado, las ecuaciones de la generatriz, serán:

$$x - x_1 = a(z - z_1)$$
$$y - y_1 = b(z - z_1),$$

y adoptando una marcha análoga á la que acaba de indicarse, se tendrán las ecuaciones siguientes, para la curva de contacto:

$$aF'_{x_1} + bF'_{y_1} + F'_{z_1} = 0,$$
$$F(x_1, y_1, z_1) = 0.$$

La primera de estas ecuaciones representa, evidentemente, el plano diametral, conjugado á las cuerdas de la superficie que son paralelas á las generatrices del cilindro. Por consecuencia, la *curva de contacto es también plana*, y se ve cuál es su posición en la superficie propuesta.

— Diferentes son los sistemas empleados en Geometria descriptiva para la determinación de las curvas de contacto de conos y cilindros con las diversas clases de superficies, pudiendo ver al objeto, los diferentes Tratados escritos sobre esta ciencia; siendo los más estimados los de Monge, Hachette, Leroy, Olivicr, M. de la Gournerie, Songaylo, Elizalde, etc., y las *Notes* y *Croquis* de M. Bardin.

Continua.

Curva representada por una ecuación algebraica ó transcendente cuyo primer miembro es una función continua.

—Toda curva algebraica es continua y entre las transcendentes que lo son se tiene la cicloide, catenaria, sinusoide, etc.

—Estas curvas carecen de puntos de retroceso y de parada.

Contingencia.

Definición.—En Gnomónica se llaman líneas de *contingencia* aquellas que cortan en ángulo recto á la linea sub-estilar, y si bien son líneas rectas para los relojes de sol cuando se encuentran trazados sobre superficies planas, resultan necesariamente curvas cuando aquéllos lo están sobre superficies curvas; siendo en este caso las líneas de contingencia, las curvas intersecciones de la superficie sobre que está trazado el reloj por un plano perpendicular á la línea sub-estilar.

Contorno.

Palabra tomada del italiano.

Definición.—Se da este nombre en Bellas Artes á la línea ó perfil exterior que por todas partes termina la figura de una cosa, y así en Arquitectura por ejemplo se dice *contornos espirales* á los adornos que se hacen en figura de espiral ó de voluta.

Historia.—Señalaremos como dato histórico que Palomino, *Museo pictórico* (Lib. IV, Cap. IV), ya lo define diciendo: «Los contornos son la delineación exterior.»

Advertencia.—Para lo que á este catálogo hace referencia, los contornos á que debemos referirnos, son á los que afectan un perfil curvilíneo, y éstos entran en la denominación general de *curva.* (Ver esta voz).

—En Matemáticas, se tienen las lineas llamadas *contornos aparentes* (ver esta voz) y también la curva cerrada que Mr. Cauchy estudió con el nombre de *contorno* de integración, de la cual damos una sucinta idea á continuación, pudiéndose consultar la teoría sobre los residuos, de este autor y la obra *Theorie des fonctions de variables imaginaires* (Marié, T. III).

Definición.—Supongamos que x está representada por $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ y que α y β se encuentren ligados entre sí por una ecuación $\varphi(\alpha,\beta)=0$; si consideramos á α como una abscisa y á β como una ordenada, esta ecuación representará una cierta curva. Si esta curva es cerrada, ella determinará un *contorno,* que llama Mr. Cauchy de integración.

Propiedades.—Al contorno así determinado, puede corresponder un residuo finito de la integral

$$\int f(x)\,dx$$

y recíprocamente, entendiendo por residuo de una integral á los cocientes por $2\pi\sqrt{-1}$ de sus períodos ó de las combinaciones y sustracciones de los múltiplos de sus períodos.

—Si el *contorno* es infinitamente pequeño, el residuo relativo á él se llama residuo simple ó residuo.

—Si el *contorno* es finito, su residuo se denomina residuo integral, y por último, se nombra residuo principal, al relativo á un contorno infinito, que se extiende indefinidamente en todos los sentidos alrededor del origen de las α y de las β.

Aplicaciones.—Mr. Cauchy ha fundamentado en los residuos así

definidos, una teoría de gran aplicación á las funciones sinécticas, monódromas y monogéneas.

Contorno aparente.

Definición. — *Casos particulares.*—Si los rayos visuales parten de un solo punto, el *contorno aparente es la curva de contacto del cono tangente á esta superficie, cuyo vértice es el punto de vista,* ó lo que es lo mismo, el *contorno aparente de una superficie es la curva de contacto de aquellos de sus planos tangentes, que pasan por el punto de vista.*

Si O es el punto de vista (fig. 1), P un plano de proyección y S la superficie considerada, todo rayo visual que parta de O, tangente á S, la tocará en un punto del *contorno aparente*, y la curva C' determinada por el encuentro del cono circunscrito á la superficie con el plano P de proyeción, se llama el *contorno àparente en proyección de la superficie.* Asi, pues, este contorno es *la traza del cono circunscrito á la superficie, cuyo vértice se encuentra en el punto de vista.*

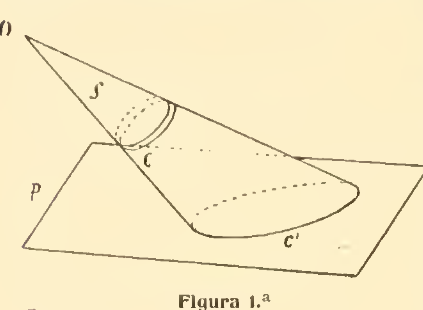


Figura 1.ª

—Si los rayos visuales parten de un punto situado en el infinito y son perpendiculares al plano de proyección, entonces las definiciones anteriores se modifican en este sentido: *El contorno aparente de una superficie con relación á uno de los planos de proyección, es la curva de contacto de esta superficie con sus planos tangentes perpendiculares al plano de proyección considerado. El contorno aparente en proyección de una superficie, es la proyección de la línea del espacio que nos da el contorno aparente con relación al plano de proyección considerado.*

—En Geometría descriptiva se considera, al representar las líneas y superficies, un punto de vista distinto para cada uno de los planos de proyección, y de este modo se obtiene para cada superficie dos contornos aparentes que sirven para representarla, sin más que proyectarlos sobre los planos de proyección, llamándose á estas proyecciones *contorno aparente sobre el plano horizontal ó sobre el plano vertical respectivamente.*

Ecuación. —Busquemos la ecuación del contorno aparente de una superficie sobre uno de los planos coordenados, el de las xy, por ejemplo: siendo los ejes rectangulares, los planos tangentes corres-

pondientes al contorno buscado serán paralelos al eje de las z; su ecuación no deberá contener, pues, esta variable, lo cual lleva consigo la condición:

$$F_z' = 0;$$

no habrá, según esto, más que eliminar z entre la ecuación de la superficie $F(x, y, z) = 0$ y la ecuación de condición $F_z' = 0$, para obtener la ecuación del contorno aparente de la superficie sobre el plano de las xy.

Así por ejemplo, si se trata de la esfera, cuya ecuación es

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma^2) = R^2, \qquad \text{(a)}$$

se tendrá

$$F'_z = 2(z - \gamma);$$

por consiguiente, se debe hacer $z = \gamma$ en la ecuación (a), y se encuentra el círculo

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

para contorno aparente de la esfera.

—Si, como á veces sucede, en lugar de darse la directríz de una superficie, se indica que debe estar circunscrita á otra superficie dada, en este caso, se determina la *curva de contacto* (ver esta voz) de las dos superficies y se toma por directriz de la superficie buscada.

—Supongamos que se tratase, por ejemplo, de una superficie cilíndrica. Si la superficie á la cual debe estar circunscrita tiene por ecuación

$$F(x, y, z) = 0,$$

esta ecuación podrá tomarse por una de las que, reunidas, representan la curva de contacto.

Para obtener una segunda ecuación basta notar que para todos los puntos de la curva de contacto el plano tangente debe ser común á las dos superficies.

En efecto, sea (x_1, y_1, z_1) un punto de la curva de contacto. El plano tangente trazado en el punto (x_1, y_1, z_1) de la superficie $F(x, y, z) = 0$ tendrá por ecuación

$$(x - x_1) F'_{x_1} + (y - y_1) F'_{y_1} + (z - z_1) F'_{z_1} = 0, \qquad (a)$$

plano que contendrá la generatriz de la superficie cilíndrica que pasa por el punto de contacto (x_1, y_1, z_1), puesto que esta generatriz es asimismo su propia tangente, y siendo las ecuaciones de esta generatriz

$$x - x_1 = a(z - z_1)$$
$$y - y_1 = b(z - z_1),$$

se tendrá, reemplazando en la ecuación (a) las diferencias $x - x_1$ é $y - y_1$ por sus valores deducidos de las ecuaciones anteriores,

$$aF'_{x_1} + bF'_{y_1} + F'_{z_1} = 0.$$

Aplicando esta relación á un punto cualquiera de la curva de contacto, podrá tomarse por su segunda ecuación y entrar en el caso general.

Propiedades.—La proyección sobre un plano de la línea que forma el contorno aparente de una superficie y de una curva cualquiera situada sobre la misma y que corte á dicho contorno, son tangentes en el punto en que se proyecta el de su intersección en el espacio.

—Esta propiedad no se verifica en los casos siguientes: 1.°, cuando la tangente á la curva que corta el contorno aparente es perpendicular al plano de proyección, y 2.°, cuando lo es el plano de la citada curva, si ésta es plana.

—Cuando una superficie de revolución ofrece un meridiano principal con relación á un plano de proyección, este meridiano es el contorno aparente de la superficie relativo á este mismo plano de proyección.

—El contorno aparente de una superficie envolvente es el lugar de los puntos de encuentro de los contornos aparentes de sus involutas con las características correspondientes.

—El contorno aparente en proyección de una superficie envolvente, el de una cualquiera de sus involutas y la proyección de la característica correspondiente, se tocan en el mismo punto cuando se considera el centro de proyección en el punto de vista.

—El contorno aparente en proyección de una superficie envolvente es la envolvente de los contornos aparentes en proyección de sus involutas.

—El contorno aparente en proyección de una superficie envolvente es la envolvente de las proyecciones de las diversas características.

—El contorno aparente en proyección de una superficie cualquiera

es la envolvente de las proyecciones de las generatrices de la superficie. Esta propiedad es la generalidad de la anterior.

Aplicaciones.—Todas estas propiedades se aplican no solamente á los contornos aparentes que sirven á representar las superficies en las condiciones ordinarias, para las cuales el espectador está en el infinito sobre una perpendicular á uno de los planos de proyección; sino que se aplican asimismo al caso de un punto de vista cualquiera, y pueden servir para encontrar la curva de contacto (ver esta voz) de un cono ó de un cilindro circunscrito á una superficie, la traza horizontal de este cono ó cilindro, así como la sombra arrojada por esta superficie sobre uno de los planos coordenados.

Contrabombeo.

Definición. — Curva que se da al firme de un camino ó empedrado, que es inversa al bombeo, y que, por consiguiente, presenta una depresión ó arroyo central al objeto de que las aguas corran por él. (Ver *bombeo*).

Contracurva.

Definición. — En construcción se da este nombre á la alineación curva que en una vía de comunicación sigue inmediatamente á otra, pero en sentido distinto, es decir, volviendo cada una su convexidad á distintos lados.

Usos. — Debe evitarse su uso en los trazados de los ferrocarriles interponiendo entre la curva y la *contracurva* una alineación recta de una longitud conveniente, teniendo en cuenta la longitud de los trenes que han de transitar por la línea.

Contravoluta.

Definición. — Dase este nombre á la voluta que duplica la principal. (Ver *voluta*).

Convexa.

Del latino *conversus*.

Definición. — Se dice que una curva es *convexa*, con respecto á una recta, cuando su tangente está comprendida entre la curva y la recta, ó, en otros términos, una curva presenta su *convexidad* del lado opuesto al que se encuentra con relación á su tangente.

Propiedades. — El sentido de la convexidad de una curva es el opuesto al sentido de la concavidad. (Ver *cóncava*).

—La convexidad de una curva está del lado de las y positivas ó del lado de las y negativas, según que el coeficiente diferencial de segundo orden es negativo ó positivo.

—Si la curva está referida á coordenadas polares, la curva se encuentra entre la tangente y el polo, cuando $\frac{d^2\rho}{d\omega^2}$ es menor para la curva que para la tangente.

Corona.

Definición. — La pequeña curva de forma cóncava que enlaza un perfil recto con un filete.

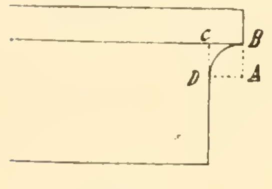


Figura 1.ª

Trazado. — Generalmente se usa el cuarto de círculo y para su trazado se formará el cuadrado $ABCD$; tomando por lado la diferencia CB de los vuelos, y haciendo centro en A con este lado por radio, se traza la curva DB, que será la corona.

Correlativas.

Definición. — Siempre que los elementos de dos curvas guardan entre sí una relación tal que se considera una de ellas como transformada de la otra, á estas dos curvas se les dice *correlativas.*

—Duhamel *Theorie des methodes* les asigna el nombre de *correspondientes.*

Historia. — Gregory, en su obra *Geometriæ pars universalis* (Venecia-1667), indica el primero un método para la transformación de curvas, y al sistema expuesto por él han seguido otros muchos, tales como el de Mac-Laurin, los de polares reciprocas, homotecia, homografia, inversa, cuadráticas de Cremona, etc., cuyas relaciones de transformación se pueden ver en los articulos correspondientes de este Catálogo.

Corriente.

Definición. — En la teoria de las máquinas dínamo-eléctricas, para determinar la condición de auto-excitación de una dínamo, se admite, entre otras, la hipótesis de que la característica puede asimilarse á

una rama de hipérbola que pasa por el origen y tiene una asíntota paralela al eje de las abscisas, y en este supuesto se encuentra una curva, á la que se da el nombre de curva de *corriente*.

Historia.— Mr. Fröhlich, *Electrotechnische Zeitschrift*-1881, ha desenvuelto la hipótesis anterior, y dado nombre á la curva de que nos ocupamos, llegando á formular sus conclusiones de la manera que vamos á expresar.

Determinación. — Considera una máquina en serie, y designando por π el flujo magnético útil, por i la intensidad, r, s y ρ las resistencias eléctricas respectivas del inducido, de los inductores y del círculo exterior; por N la velocidad y por n el número de hilos contados sobre la superficie del inducido, será

$$i = \frac{nN\pi}{r + s + \rho};$$

representemos el flujo magnético útil por una función de la intensidad i, tal que

$$\pi = \varphi(i),$$

y se tendrá

$$\frac{i}{\varphi(i)} = \frac{nN}{r + s + \rho}.$$

Figura 1.ª

Obteniendo sobre una máquina Siemens bipolar los valores de i correspondientes á diversos valores de

$$\frac{nN}{r + s + \rho},$$

y tomando los primeros como ordenadas, y los segundos como abscisas, se tiene una curva cuya forma es la indicada en la (fig. 1.ª), y es la que recibe el nombre de curva de corriente.

—En el gasto medio suministrado por la dínamo funcionando en su régimen normal, la curva se confunde sensiblemente con una recta ab, cuya ecuación se puede poner bajo la forma:

$$i = -\alpha + \beta\left(\frac{nN}{r + s + \rho}\right),$$

de donde se tiene,

$$\frac{nN}{r+s+\rho} = \frac{i}{\frac{\beta i}{\alpha + i}};$$

y, por tanto,

$$\varphi(i) = \frac{\beta i}{\alpha + i},$$

ecuación que se puede poner bajo la forma:

$$\varphi(i) = \frac{ami}{1 + bmi},$$

siempre que los parámetros a y b sean tales que m represente el número de vueltas del hilo arrollado sobre los inductores.

—Admitido lo dejado manifiesto, la ecuación fundamental de la dínamo vendrá á ser:

$$i = \frac{nN \frac{ami}{1+bmi}}{r+s+\rho};$$

de donde

$$i = \frac{1}{b}\left(nNa\,\frac{1}{r+s+\rho} - \frac{1}{m}\right),$$

ecuación que permite resolver los problemas relativos á la marcha y á la construcción de la máquina.

—Esta ecuación no se puede emplear para las máquinas de otros tipos, porque para la mayoría de ellos la curva de la corriente tiene una curvatura muy acentuada para poder asignar valores que satisfagan á los parámetros a y b.

Cosenusoide.

Definición.—Curva cuya *ordenada es el coseno geométrico del arco tomado* sobre un círculo cuyo radio es igual á la abscisa.

Ecuación.—La ecuación de esta curva en coordenadas rectangulares es, según esta definición:

$$y = R\cos\frac{x}{R}.$$

Si $R = 1$ toma la forma más sencilla

$$y = \cos . x.$$

Forma.—Es fácil comprender, teniendo á la vista los valores de los coeficientes de primero y segundo orden

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{sen} . x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\cos . x,$$

que la forma de esta curva debe ser exactamente igual á la de la sinusoide (ver esta voz), sin más diferencia que deberse correr con respecto al origen un intervalo $\frac{\pi}{2}$ hacia uno ú otro lado, puesto que siempre se verifica que

$$\cos . x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

razón por la cual, detallando en *sinusoide* cuanto á aquella curva hace referencia, no necesitamos aquí detenernos con respecto á ésta.

Como en la sinusoide, se distinguirán las tres especies de cosenusoide *natural, prolongada y reducida.*

Cotangentoide

Definición.—Curva cuya *ordenada es la cotangente geométrica del arco tomado* sobre un círculo cuyo radio es igual á la abscisa.

Ecuación.—La ecuación de esta curva en coordenadas rectangulares, es, según esta definición,

$$y = R . \cot . \frac{x}{R}.$$

Si $R = 1$, toma la forma más sencilla

$$y = \cot . x.$$

Forma.—Es fácil comprender que la forma de esta curva deberá ser exactamente igual á la de la *tangentoide* (ver esta voz), sin más diferencia que deberse correr, con respecto al origen, un inter-

valo $\frac{\pi}{2}$ hacia uno ú otro lado, puesto que siempre se verifica que

$$\cot . x = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right),$$

razón por la cual, detallando en *tangentoide* cuanto á aquella curva hace referencia, no necesitamos aquí detenernos con respecto á ésta.

Covariantes.

Definición.—Dado un sistema de puntos, existen en general otros sistemas que tienen con el primero una relación determinada, independiente de los puntos fundamentales. Un grupo de puntos de esta especie está representado por el desvanecimiento de una función que posee la propiedad de la invariación y que contiene, no tan sólo los coeficientes de la forma dada, sino también las variables x_1 x_2. Esta función se llama un *covariante* de la forma dada. Ahora bien, es posible escribir bajo forma simbólica un número ilimitado de covariantes, cuya significación ó *curva covariante* que ella representa se debe deducir precisamente de la teoría de las polares.

Clases que son conocidas: Entre las curvas de esta clase, es tan sólo un corto número las que hasta el día han sido estudiadas, y para eso las definidas por condiciones geométricas muy sencillas, cuales son las caracterizadas de una manera general por la condición de que la enésima polar de un punto tenga una propiedad invariante determinada, estableciendo en particular que la primera polar de un punto relativamente á una curva origen posea un punto doble.

Así se obtiene la *hessiana;* de ésta se deduce la *steineriana,* la cual á su vez determina una tercera curva, la *cayleiana* (ver los artículos correspondientes).

Una cuarta curva se ha estudiado también, que es la envuelta por las tangentes de las primeras polares en sus puntos, curva que no ha recibido particular denominación.

Observacion.—Del propio modo que imponiendo como se ha hecho arriba á las primeras polares la condición de poseer ciertas particularidades, nos ha conducido á las *curvas covariantes*, del mismo modo se puede partir de las polares de un orden cualquiera y engendrar ciertas figuras covariantes, que como las curvas arriba indicadas, presentan ciertas singularidades. Las curvas que tienen este origen no han sido aún objeto de estudios dignos de fijar la atención.

Cruciforme.

Definición.—Se conoce bajo este nombre la curva que afecta forma semejante á la de la cruz.

—El estudio de esta línea que carece de particular aplicación, puede hacerse consultando *Journal de Mathematiques spéciales* (1885, página 272).

Cuadrante.

Del latín *quadrans.*

Definición.—Se da este nombre en Geometría á la cuarta parte de la circunferencia y á la parte de cualquier figura comprendida entre dos diámetros perpendiculares.

—Como cuarta parte de circunferencia, el cuadrante comprende 90° y es el arco que corresponde al ángulo *recto.*

—En construcción se da este nombre al arco que figura la mitad de otro semicircular tomado desde la clave.

Historia.—A este arco se le ve en los arbotantes que empezaron á construirse durante el último periodo del estilo románico.

«Su forma más general es la de arco rebajado y no cuadrante».—Villaamil, *Arqueología Sagrada,* pág. 138.

—También se le da el nombre de *arco de cuarto de círculo.*

Cuadratríz.

Cuadratriz (del lat. *quadrator*).

Definición.—Nombre dado á diferentes curvas transcendentes descritas sobre el mismo eje que una curva dada, cuyas semi-ordenadas son conocidas, y que sirven para encontrar las cuadraturas de los espacios que corresponden á la otra curva.

Historia.—La más notable de las curvas de esta clase es la que imaginó *Dinostrato,* hermano de Ménechme, hacia el año 390, para resolver el problema de la división de un ángulo en un número cualquiera de partes proporcionales á dos líneas dadas y para la cuadratura del circulo.—Proclus *Commentaire sur Euclide* (lib. II, cap. IV), atribuye á Hippias la invención de esta curva

Pappus, matemático de Alejandría, que vivió á fines del siglo IV, se ocupa de las propiedades de la cuadratriz de Dinostrato, sin decir positivamente fuera éste su inventor, en el libro IV de sus *Collectiones Mathematicæ,* deduciendo la propiedad de que «la sección producida por un plano perpendicular á una de las generatrices de la

superficie helizoidal rampante, se proyecta sobre un plano perpendicular al eje, según una cuadratriz de Dinostrato».—*Pappi Alexandrini Collectiones Mathematicæ á Federico Commandino in latinum versæ et commentariis illustratæ*, Pisauri, 1588 inf.°

En el siglo XVI, Francisco Vieta, en su obra *Variorum Responsorum de rebus mathematicis*, traza la historia de los problemas de la construcción de dos medias proporcionales, de la trisección del ángulo, de la cuadratura del círculo y de la *Quadratrice* de Dinostrato; y Léotand publica también un extenso trabajo sobre esta curva á la continuación de su obra *Cyclomathia seu de multiplici circuli contemplatione libri tres* (Lion, 1663).

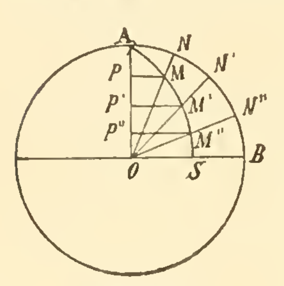


Figura 1.ª

Ecuación y propiedades.— Sea O el centro de un cuadrante AB. Del movimiento simultáneo y uniforme del radio OA y una recta paralela á OB, de modo que al terminar el uno en B termine la otra en O, resulta, por las intersecciones $MM'M''$..., la curva AS, que es la cuadratriz de la circunferencia ó de Dinostrato.

Para encontrar la ecuación polar de esta curva, tomemos por polo el centro O y por eje polar el radio OB. Sea M un punto del lugar y OM y PM las posiciones respectivas del radio y de la paralela á OB respecto á este punto M. Tendremos:

$$\frac{BN}{BA} = \frac{OP}{OA}.$$

Si el ángulo NOB le llamamos θ, y r al radio OA, será:

$$\frac{2\theta}{\pi} = \frac{OP}{r}.$$

Ahora bien; en el triángulo OPM se tiene, llamando ρ á la distancia OM,

$$OP = \rho \,.\, \text{sen}\,.\, \theta,$$

y la igualdad anterior será ahora

$$\frac{2\theta}{\pi} = \frac{\rho \,.\, \text{sen}\,.\, \theta}{r},$$

de donde

$$\rho = \frac{2r}{\pi} \cdot \frac{\theta}{\text{sen} . \theta},$$

ecuación polar de la cuadratriz.

La curva que estudiamos partirá del punto A y vendrá á terminar sobre el radio OB en un punto que no se puede encontrar gráficamente, como sucede con los demás; porque las posiciones finales de OM y PM se confunden en una sola dirección, que es OB; pero cuando $\theta = 0$ será $\frac{\theta}{\text{sen} . \theta} = 1$; por tanto, la ecuación de la curva en este caso será

$$\rho = \frac{2r}{\pi};$$

luego si llevamos sobre el radio OB las distancia $OS = \frac{2r}{\pi}$ tendremos el punto S de nacimiento del cuarto de cuadratriz SMA. Repitiendo la misma construcción en los demás cuadrantes del círculo, se tendrá la curva completa.

—La posición de la tangente en un punto se determinará calculando el ángulo que forma con el radio vector; llamando μ á dicho ángulo, se tiene

$$\text{tg} . \mu = \frac{d\rho}{d\theta},$$

y de la ecuación de la curva se deducirá

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{2r}{\pi} \cdot \frac{\text{sen} . \theta - \theta \cos\theta}{\text{sen}^2\theta};$$

por consiguiente,

$$\text{tg} . \mu = \frac{\theta}{1 - \theta . \cot . \theta}.$$

Si en esta fórmula hacemos $\theta = \frac{\pi}{2}$ que corresponde al punto A, se tendrá:

$$\text{tg} . \mu = \frac{\pi}{2}.$$

Conocido el ángulo que forma la tangente con el radio vector, se

determina la posición de la normal á la curva, que, como se sabe, será perpendicular á la tangente.

—La subtangente S_t, la subnormal S_n, la longitud de la tangente T y la de la normal N, estarán dadas por los valores siguientes:

$$S_t. = \frac{2r}{\pi} \cdot \frac{\theta^2}{\text{sen}.\theta - \theta\cos\theta};$$

$$T = \frac{2r}{\pi} \cdot \frac{\theta}{\text{sen}.\theta}\sqrt{1 + \frac{\theta^2\text{sen}^2\theta}{(\text{sen}\theta - \theta\cos\theta)^2}};$$

$$S_n. = \frac{2r}{\pi} \cdot \frac{\text{sen}.\theta - \theta\cos\theta}{\text{sen}^2\theta};$$

$$N = \frac{2r}{\pi} \cdot \frac{1}{\text{sen}^2\theta}\sqrt{\theta^2 + \text{sen}^2\theta - 2\theta.\text{sen}\theta.\cos\theta}.$$

—La ecuación cartesiana de esta curva se obtendrá observando que si tomamos por origen el centro 0, por eje de las x el radio OB y por el de las y el OC, se deducen de la figura las siguientes relaciones:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \text{tg}.\theta = \frac{y}{x} \quad \text{ó} \quad \text{sen}\,\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

y substituyendo estos valores en la ecuación polar de la cuadratriz, se tendrá:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2r}{\pi} \cdot \frac{arc\left(\text{sen} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)}{\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}$$

ó

$$y = \frac{2r}{\pi}\, arc\left(\text{sen} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right),$$

de donde

$$\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \text{sen}\,\frac{\pi y}{2r},$$

que es la ecuación que se buscaba.

Por medio de esta curva se puede hacer la multisección del ángulo, y si el punto S fuera conocido exactamente, se hallaría la cuadratura del círculo, puesto que el cuadrante sería la relación entre dos líneas.

Cuadratriz de Leibnitz.

Definición.— Leibnitz denomina cuadratriz de una curva, otra curva tal, que el rectángulo de su ordenada y de una longitud fija, permanezca constantemente igual al segmento de la propuesta, comprendido entre una ordenada fija y la ordenada correspondiente á la abscisa considerada de la cuadratriz.

Historia.— Leibnitz define y trata de esta cuestión en sus obras *De dimensionibus figurarum inveniendis (Acta eruditorum*, 1684), y *De Geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum* (*Acta eruditorum*, 1686).

Aplicaciones. — Para buscar las curvas algebraicas, cuyas cuadratrices lo fuesen asimismo, trató de emplear el autor citado la curva cuadratriz definida como lo hemos dicho; pero no lo consiguió, equivocándose en sus aplicaciones.

Cuárticas diversas.

Definición. — Comprendemos bajo este nombre ciertas cuárticas, que aunque no tienen denominación especial, han sido objeto de particular estudio, y que creemos dignas de señalar en este Catálogo; tales son las representadas por las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l}\rho = d\cos^{2p-1}\omega \\ \rho = d\cos^{2p}\omega\end{array}\right\} \text{ y, en general, } \rho = d \, . \cos^{m}\omega,$$

y las

$$\rho = \frac{1}{\cos^2\omega}, \quad \rho = \frac{1}{\cos^4\omega}; \quad \rho = \frac{1}{\cos^6\omega} \ldots\ldots$$

— *Curva de ecuación polar*,

$$\rho = d \, . \cos^{2p+1}\omega. \qquad (1)$$

— Esta línea, de la que es un caso particular el *folium* simple (ver

esta voz), la obtendremos repitiendo sobre dos puntos fijos OO' (figura 1) p veces la construcción indicada en el *folium* simple. Se tendrá:

$$OH_1 = d\cos^2\omega; \quad OH_2 = d\cos^4\omega.....; \quad OH_p = d\cos^{2p}\omega;$$

$$OI_1 = d\cos^3\omega; \quad OI_2 = d\cos^5\omega.....; \quad OI_p = d\cos^{2p+1}\omega.$$

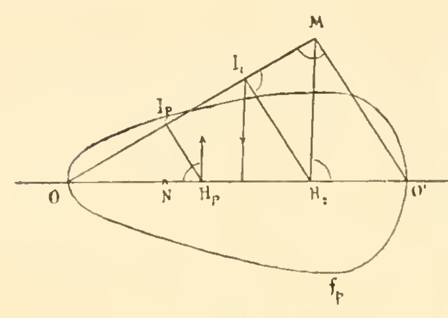


Figura 1.ª

— *Curva de ecuación polar.*

El lugar descrito por el punto I_p es la curva f_p, representada en coordenadas polares por la ecuación (1).

Su normal goza de la propiedad de cortar á OH en un punto N tal, que $ON = \frac{3}{4} OH$; lo cual permite trazar la tangente, muy sencillamente, en un punto cualquiera I_p de la curva.

$$\rho = d \,.\, \cos^{2p}\omega. \tag{2}$$

Para obtener estas líneas bastará proyectar los puntos H_1, H_2 ..... H_p; no sobre OM, sino sobre la recta que va desde el punto M al punto medio de OO'.

—El grado de estas líneas se eleva muy prontamente; el caso más sencillo, ó sea cuando $p = 1$ nos da una curva de sexto orden, la cual tiene la forma de un doble óvalo, que es fácil encontrar por la consideración de su tangente en coordenadas polares ó por el de la normal.

— *Curva de ecuacion polar.*

$$\rho = d \,.\, \cos^m x.$$

Figura 2.ª

Consideremos el caso de $m = -2$.

La curva que se obtiene ha sido objeto de diferentes estudios, *Nouvelles Annales* (1843, pág. 233;1845, pág. 319; 1846, pág. 214).

Tomemos tres puntos en línea recta O, O', O'', y tales que (fig. 2)

$$O'O = OO'' = \frac{h}{4},$$

y efectuemos la construcción (1. 2. 3. 4. 5); se tendrá un punto I, cuyo lugar es la curva V, representada por la ecuación

$$\rho = \frac{h}{\cos^2 \omega}.$$

—Para trazar la tangente en un punto I cualquiera, cuyas coordenadas sean (ρ_1, ω_1) se tendrá:

$$\frac{2h}{\rho} = (1 + \cos 2\omega_1) \cos(\omega - \omega_1) - 2 \operatorname{sen} 2\omega_1 \operatorname{sen}(\omega - \omega_1),$$

y haciendo $\omega = 90^\circ$, la tangente I se verá corta al eje de las y en un punto T, tal que

$$OT = - OI . \operatorname{sen} . \omega,$$

de donde se deduce que tomando el punto I' simétrico de I con relación al centro O, y levantando en I' una perpendicular á II', esta perpendicular cortará el eje Oy en el mismo punto T que la tangente buscada. También se puede ver otro trazado en *Nouvelles Annales*, 1846.

Curvas de ecuaciones polares.

$$\rho = \frac{1}{\cos^2 \omega}; \quad \rho = \frac{1}{\cos^4 \omega}; \quad \rho = \frac{1}{\cos^6 \omega} \;.....$$

Estas líneas las citamos aquí porque Descartes *Œuvres* (t. V, página 336, edición Cousin), las ha hecho notables hasta cierto punto, por haber imaginado un instrumento formado de dos reglas, por medio del cual las construía, dando á aquéllas un movimiento continuo y simultáneo.

Cuarto bocel.

Definición. — Se denomina así á una moldura convexa que su perfil es un cuadrante de círculo. Es la inversa del caveto. (Ver esta voz).

Historia. — El nombre de cuarto bocel dado á este perfil se encuentra, entre otras obras, en la de Fr. Lorenzo de San Nicolás, *Arte y uso de Arquitectura*, P. I, Cap. XXVIII. También se ha nombrado *equino* y *óvolo*, aunque este segundo nombre aplícase mejor al adorno que suele decorarlo.

Clasificación. — Se distingue el cuarto bocel *recto* y el *inverso* ó *reverso*. El primero es aquel que presenta el vuelo por la parte supe-

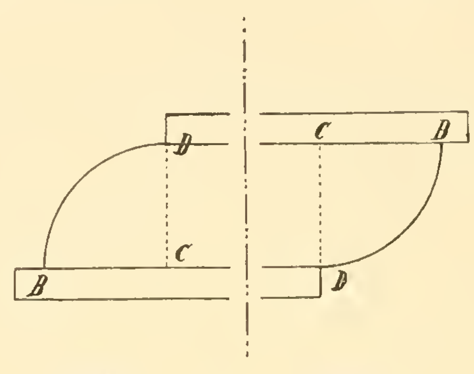


Figura 2.ª Figura 1.ª

rior (fig. 1.ª); y el segundo cuando tiene el vuelo por la parte inferior (fig. 2.ª).

Trazado. — Se tomará sobre la recta *A B* una distancia *B C* igual á la altura del cuarto bocel, y haciendo centro en *C*, se trazará el cuarto de círculo *B D* y quedará hecho el perfil buscado.

Cúbica alabeada.

Definición. — Si tres rectas dadas en el espacio son los ejes de tres haces homográficos de planos, el lugar de los puntos comunes á tres planos homólogos es una *cúbica alabeada*, que tiene dos de sus puntos sobre cada una de las rectas dadas.

— Esta curva es de doble curvatura, de tercer orden y de tercera clase.

Clasificación. — Se comprenden dos géneros diferentes, á saber:

Primer género. — La curva tiene tres asíntotas reales y no hay planos osculadores paralelos; los planos osculadores cortan la superficie desarrollable que los envuelve, según cónicas que son hipérbolas, y cuyos centros están sobre una elipse. El plano de esta elipse,

encuentra á la cónica en tres puntos reales y cortan los conos de segundo grado que cortan la cúbica, según hipérbolas.

Segundo género. — La cúbica tiene una sola asíntota real y dos planos osculadores paralelos entre sí que cortan á la superficie desarrollable de que ella es arista de retroceso, según dos parábolas; los demás planos osculadores producen secciones elípticas ó hiperbólicas. Los centros de estas cónicas están sobre una hipérbola cuyo plano es paralelo y equidistante de los dos planos osculadores paralelos. Una rama de la hipérbola focal contiene los centros de las elipses, otra contiene los de las hipérbolas, su plano corta á la cúbica alabeada en un solo punto real y á los conos de segundo grado que pasan por las curvas según elipses.

A más de estos casos generales pueden considerarse otros dos particulares, que son: 1.°, la curva tiene una sola asíntota real á distancia finita; las otras dos son también reales, pero coinciden en el infinito; y 2.°, la curva tiene todas sus asíntotas, coincidiendo en el infinito, es decir, que es osculada por el plano en el infinito.

Historia. — La representación analítica de estas curvas ha sido dada por M. Cremona en una memoria inserta en los *Annali di Matematica pura é applicata* (Roma, 1858), en la cual se hace la clasificación y estudio de sus propiedades generales.

Mr. Chasles ha dado la definición que de las mismas apuntamos.

Propiedades. — Por una cúbica alabeada osculada por el plano en el infinito pasa un solo cilindro de segundo orden y este cilindro es parabólico.

— Para cada plano paralelo al cilindro, la curva admite un sistema de cuerdas paralelas á este plano, cuyos puntos medios están situados sobre una recta (diámetro). Este diámetro pasa por el punto de la cúbica alabeada en que la toca un plano paralelo á las cuerdas, y es la recta intersección del plano osculador y el plano asintótico que corresponde á este mismo punto.

—Por cada punto de la curva pasa un plano asintótico; es decir, tangente en el infinito y todos estos planos son paralelos entre sí.

—Por cada punto de la curva pasa un diámetro, que biseca las cuerdas paralelas al plano que toca, sin oscular, la curva en el mismo punto. Todos estos diámetros son paralelos á un mismo plano, á saber, á la dirección de los planos asintóticos y forman una superficie de tercer orden.

—La curva admite por lo menos un punto (y á lo más tres) en que la recta tangente y el diámetro correspondiente se encuentran según un ángulo recto.

—*Cúbica alabeada unicursal.* —Se sabe que por un punto tomado en el espacio se pueden generalmente dirigir á un elipsoide seis normales; pues bien, los pies de estas normales pertenecen á una cúbica alabeada, que goza de la propiedad de ser *unicursal* (ver esta voz) y se puede definir diciendo que las coordenadas de un punto móvil sobre ella se expresan por funciones racionales, enteras ó fraccionarias de un parámetro variable.

—Las direcciones asintóticas de esta curva son las direcciones principales del elipsoide.

—Esta curva pasa por el punto exterior dado y por el centro del elipsoide.

Cúbica anarmónica.

Definición.—Se llama anarmónica á una cúbica caracterizada por la circunstancia que su hessiana se descompone en tres rectas y que en los puntos dobles de esta curva las tangentes de inflexión se cortan tres á tres. (Ver curvas de tercera clase.)

Cúbica armónica.

Definición.—Se llama armónica á una cúbica caracterizada por la circunstaucia que la hessiana de su hessiana es la curva primitiva.

Cúbica concoidal.

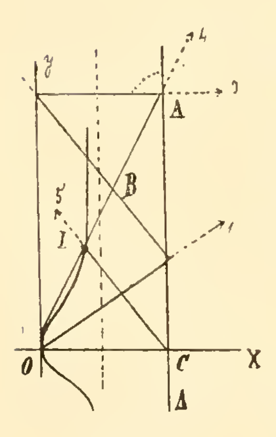


Figura 1.ª

Definicion.— Cúbica constituida por una rama concoidal y un punto doble aislado.

Generacion.— Consideremos un ángulo recto yox y una recta Δ paralela á oy (fig. 1); verificando la construcción (1 . 2 . 3 . 4 . 5) el lugar de los puntos I es una cúbica que tiene por ecuación:

$$y^2 = (x - h)^2 \frac{x}{h - 2x},$$

y la curva que en ella representa tiene la forma indicada en la figura.

Cúbica mixta.

Definición. — Curvas dadas por la ecuación.

$$y^2x = h(x^2 + y^2).$$

Generación. — Si se toma un ángulo recto $y\ o\ x$ (fig. 1) y una recta Δ paralela á Oy, y se efectúa el trazado (1 . 2 . 3), haciendo luego

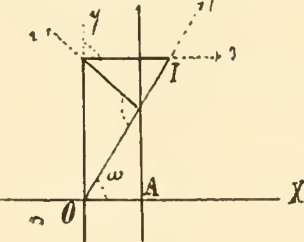


Figura 1.ª

$$OA = h, \quad OI = \rho \quad \text{y} \quad IOx = w$$

se encuentra para la ecuación del lugar de los puntos I,

$$h = \rho \,.\, \text{sen}^2\omega \,.\, \cos \,.\, \omega,$$

que, transformando, nos da la ecuación cartesiana

$$y^2x = h(x^2 + y^2).$$

Así, pues, el lugar de los indicados puntos I es la cúbica mixta.

— *Propiedades y forma.*— Esta curva es una transformada concoidal de la parábola en las circunstancias siguientes:

Consideremos una parábola P representada por la ecuación

$$y^2 - hx = 0;$$

si por el vértice O (fig. 2) se traza una transversal móvil que se encuentre á la recta fija Δ $(x - h = O)$ en K y la parábola P en M, y se toma $MI = OK$, el lugar descrito por I es la cúbica mixta.

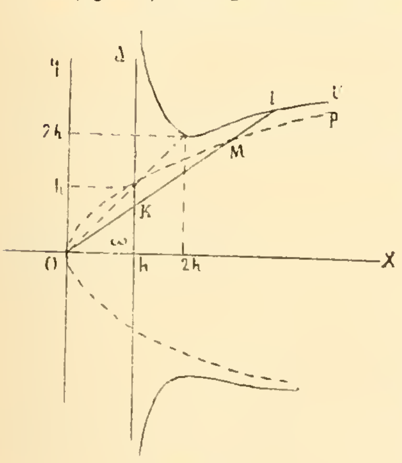


Figura 2.ª

En efecto, sabemos que

$$OM = \frac{h \,.\, \cos \,.\, \omega}{\text{sen}^2\omega}, \quad OA = MI = \frac{h}{\cos \,.\, \omega};$$

y por consiguiente,

$$\rho = \frac{h \cdot \cos \cdot \omega}{\text{sen}^2 \omega} + \frac{h}{\cos \cdot \omega} = \frac{h}{\text{sen}^2 \omega \cdot \cos \cdot \omega},$$

ecuación de la cúbica mixta.

—Esta curva presenta una de sus extremidades de forma hiperbólica y de forma parabólica la otra, afectando la forma indicada en la figura.

—Cuando su punto doble no está aislado, como sucede en el caso acabado de indicar, sino situado sobre una de las ramas reales de la curva, afecta una curva distinta.

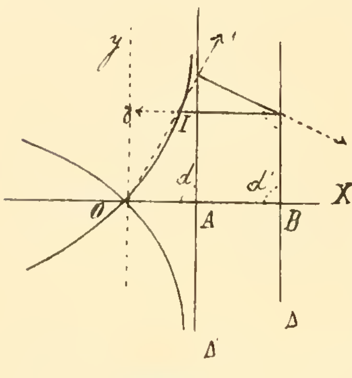


Figura 3.ª

Esta es la de la figura 3, cuya generación se obtiene considerando un ángulo recto *y o x*, las dos rectas Δ y Δ′ paralelas á *Oy* y efectuando la construcción (1 . 2 . 3). El lugar de los puntos *I* así obtenidos tiene por ecuación, haciendo $OA = d$, $AB = d'$,

$$y^2 (d - x) = d' x^2,$$

y es, por tanto, una cúbica mixta.

—La forman, como se ve en la figura, dos ramas mixtas, pero ambas pasan por el punto doble.

Cúbicas diversas.

De menos importancia que las cúbicas de que se trata en artículos separados son las siguientes:

La *circular unicursal*, de que habla G. de Longchans en su *Géometrie de la Regle*, pág. 100. La *crunodal*, con punto doble, por el que pasan dos ramas de la curva; la *cuspidal*, de punto doble también, pero formando retroceso; la de *n puntos*, ó sean las que pasan por más de 5 puntos convenientemente dispuestos, entre ellas, la de 17 puntos, estudiada por Vigarié y Boutin en *Journal de Mathématiques Speciales*, 1889, y la de 21 puntos, por Vigarié, en *Association Française pour l'avancement des Sciences*, 1887, y la que pasa por los pies de las normales á una cuádrica desde un punto dado.

Se conocen también las cúbicas denominadas de *dirección*, *equianarmónicas*, *equiláteras*, *nodal*, *circular*, *bicircular*, *piriforme*, *imaginaria*, *hiperbólica*, *parabólica*, *trilátera*, *sizigética*, etc., cuyas propiedades y circunstancias se encuentran en las obras y trabajos que sobre estas líneas han publicado Chasles, Cremona, Sylvester, Hart, Clebsch, Le Paige, Brill, Nöther, Salmon, Weyz, Cardinaal, Serret y otros.

Cúbicas simples.

Definición. — Se da este nombre á las cúbicas que en un sistema conveniente de coordenadas cartesianas se representan por una ecuación binomia.

Clasificación. — Se distinguen tres curvas de esta clase que corresponden respectivamente á las ecuaciones:

$$x^3 - hy^2 = 0,$$

$$x^3 - h^2y = 0,$$

$$xy^2 - h^3 = 0.$$

La primera está formada por dos brazos parabólicos, presentando en el origen un punto de retroceso; la segunda está también formada por dos brazos parabólicos y presenta una inflexión en el origen, punto que es el centro de la curva, y la tercera afecta la forma de dos ramas hiperbólicas asíntotas á los ejes coordenados, admitiendo un punto de retroceso en el infinito en la dirección del eje de las abscisas.

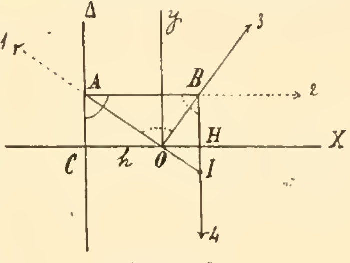


Figura 1.ª

1.ª *Cúbica simple parabólica de punto de retroceso.* — Si sobre un ángulo recto (fig. 1) yox, se dirige una recta Δ paralela á Oy y se efectúa la construcción (1 . 2 . 3 . 4), se obtiene un punto I cuyo lugar, haciendo $OC = h$, $BOx = \alpha$, nos da

$$x^3 = hy^2$$

para su ecuación, la cual, como se ve pertenece á la parábola de Neil ó Neiliana — (ver parábola de Neil).

2.ª *Cúbica simple parabólica con centro.*—Si se considera una hipérbola equilátera H (fig. 2) referida á sus asíntotas, y se toma sobre ella un punto J, se traza OJ y OI perpendicular á esta línea y por J una paralela á Oy, se obtiene un punto I (X, Y) que corresponde al punto J (x, y), estando las coordenadas de estos puntos en las relaciones:

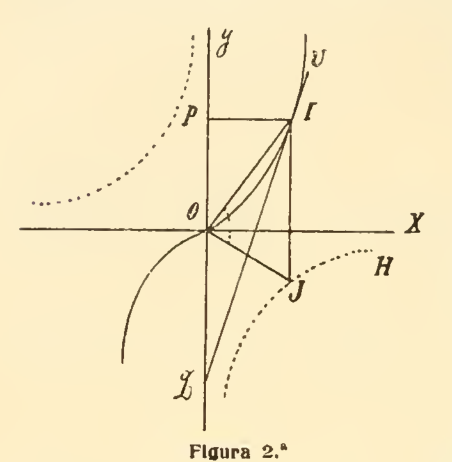


Figura 2.ª

$$x = X, \quad y\,Y + X^2 = 0.$$

Según esto, se deduce que á la hipérbola H, representada por la ecuación

$$xy + h^2 = 0,$$

corresponde una curva V cuya ecuación será

$$X^3 = h^2\,Y.$$

Tangente.—Teniendo á la vista que cuando la ecuación de una curva es de la forma

$$x^p = A\,y^q,$$

su tangente tiene por expresión para un punto (x, y)

$$p\,\frac{X}{x} - q\,\frac{Y}{y} = p - q, \qquad (1)$$

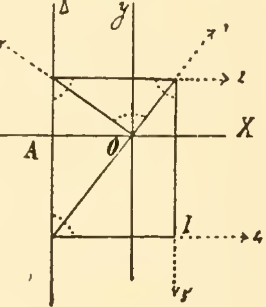


Figura 3.ª

se tendrá para la expresión de la tangente á la cúbica considerada, haciendo $p = 3$ y $q = 1$,

$$3\,\frac{X}{x} - \frac{Y}{y} = 2;$$

así, pues, tomando $OQ = 2\,PO$, QI será la tangente en el punto I.

3.ª *Cúbica simple hiperbólica.* — Tomemos (fig. 3) un ángulo rec-

to, yOx, y una recta, Δ, paralela á Oy; efectuando la construcción (1. 2. 3. 4. 5), se obtendrá un punto I y el lugar de estos puntos es la curva buscada.

Haciendo, en efecto, $OA = h$, será

$$xy^2 = h^3,$$

y la ecuación (1) aplicada á este caso, haciendo $p = 1$ y $q = -2$, nos dará para la expresión de su tangente en un punto I,

$$\frac{X}{x} + 2\frac{Y}{y} = 3.$$

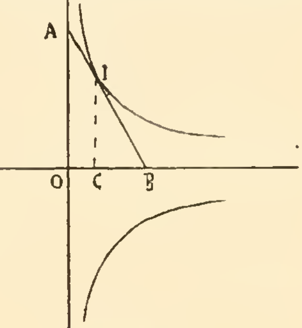


Figura 4.ª

Si pues se proyecta este punto I en C (fig. 4) sobre OD y se toma $CB = 2\,OC$, la línea BI es la tangente á la curva en el punto I.

Curva.

Del latino *curvus.*

Definición. — Una curva es una línea que no es recta, ni está formada de porciones de rectas, ó mejor, el lugar de las posiciones sucesivas ocupadas por un punto material que se mueve en el espacio cambiando á cada momento de posición.

La manera de ser de una línea curva respecto á su generación más sencilla, se puede concebir figurando que un punto material recibe una impulsión instantánea, por virtud de la cual se moverá y en sus movimientos describirá una línea recta; pero si á cada momento se encuentra sujeto á una fuerza constante ó variable que obra en una dirección diferente que la de impulsión primera, dicho punto describirá una línea curva.

Se dice que dos puntos de la curva están infinitamente próximos, ó que son posiciones sucesivas del generador, cuando la distancia que los separa se puede considerar como menor que cualquiera cantidad dada, sin que los puntos se confundan.

Dos puntos que satisfacen á la condición anterior determinan un elemento *rectilíneo* ó *lineal*, y el conjunto de estos elementos sucesivos constituye la curva, que puede considerarse, por lo tanto, como una línea poligonal, compuesta de infinito número de lados infinitamente pequeños, que podemos suponer iguales ó desiguales, según

convenga, para explicar mejor las diversas cuestiones que se estudien.

De lo expuesto se deduce que todas las propiedades generales de los polígonos que sean independientes del número y magnitud de sus lados, serán aplicables á las lineas curvas.

Al engendrarse una linea curva tal como la que acabamos de considerar, puede suponerse que el punto generador *a* (fig. 1.ª) se halla impulsado por una fuerza ó que posee una velocidad determinada en la dirección de la recta *a t*. Sobre esta recta se moverá indefinidamente si no hay causa alguna exterior que haga variar el movimiento; pero si al ocupar la posición *b*, obra sobre él otra fuerza, obligándole á desviarse del camino *a t* que recorría, tomará una nueva dirección, tal como *b t′*, que dependerá de las fuerzas que en *b* actúan sobre el punto generador. Otro tanto podemos suponer que suceda en *c*, *d*.... de modo que el punto *a* engendra la linea poligonal *a b c d e*... Si las fuerzas que hemos supuesto actuaban, lo hacen de una manera continua, los puntos *a b c*... se encontrarán infinitamente próximos, y la linea engendrada estará compuesta de lados infinitamente pequeños, cuyo número será infinito, formándose así lo que designamos con el nombre de línea poligonal infinitesimal ó *línea curva*.

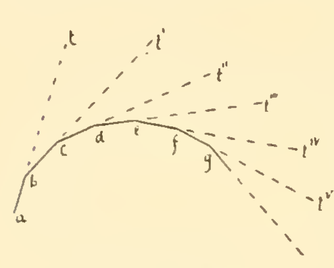


Figura 1.ª

Se puede, pues, decir, como consecuencia de lo hasta aquí dicho, que la *línea curva es el lugar geométrico de las posiciones sucesivas ocupadas por un punto móvil, cuyo movimiento varía continuamente de dirección.*

Clasificación. — Cuando la curva tiene todos sus puntos en un mismo plano se denomina *plana* (ver esta voz), y en el caso contrario, *alabeada ó de doble curvatura* (ver esta voz).

Representación. — En Geometría analítica toda línea plana está representada por una ecuación de dos variables, que expresa la relación constante que existe entre las coordenadas de cada punto de la curva, distinguiéndose por la forma y grado de sus ecuaciones.

Las curvas del espacio están representadas por el sistema de dos ecuaciones con tres variables, porque cada una de estas ecuaciones, tomadas aisladamente, representa una superficie, y el sistema de dos ecuaciones de este género representa la intersección de ellas, es decir, la línea.

Historia. — Expresada en cada uno de los diferentes artículos de este catálogo la particular historia de cada curva, en especial lo que se refiere al autor ó autores que de ellas se han ocupado, tendríamos para llenar cumplidamente este epígrafe que hacer aqui una relación general de las principales obras que referentes á curvas se han escrito, lo cual que sobre ser pesado á nada conduciría, especificándose en cada una de ellas particularmente. En este concepto, sólo diremos que á Descartes se debe en primer término la determinación de las curvas por medio de sus ecuaciones y que Newton hizo ver que las curvas pueden ser engendradas por medio de sombras. Si sobre un plano infinito, dice este matemático insigne, iluminado por un punto luminoso, se proyectan las formas de ciertas figuras, se obtienen las proyecciones de las curvas. Las sombras de las secciones cónicas, serán secciones cónicas; las de las curvas de segundo orden, serán de esta misma clase, y así para las demás. La proyección de la sombra de un círculo puede engendrar todas las secciones cónicas; del mismo modo, las cinco parábolas divergentes engendrarán por sus sombras todas las demás curvas de segundo orden. Se podrá, de la propia manera, en los otros órdenes de curvas, encontrar algunas entre las más sencillas, que por su sombra, proyectada sobre un plano, pueden engendrar todas las demás curvas del mismo orden.

Se encuentra en las *Memorias de l'Academie des Sciences* una demostración de todas estas propiedades, así como algunos ejemplos de ciertas curvas de segundo orden determinadas por un plano que corta un sólido engendrado por el movimiento de una línea recta indefinida sobre una parábola divergente, pasando constantemente por un punto dado encima del plano de está parábola.

Mac-Laurin, en su obra titulada *Geometría orgánica*, indica los medios de describir diversas curvas de segundo grado, sobre todo las que presetan un punto múltiplo por el movimiento de líneas rectas y de ángulos; pero Newton considera como uno de los problemas más difíciles, el de describir por un movimiento continuo las curvas que tienen un punto múltiplo.

Ecuación general. — Una familia de curvas comprende todas aquellas que pueden ser expresadas por la misma ecuación general. Así,

$$A^{m-1}x = y^m$$

representa una familia de curvas cuyo grado varía con m.

Propiedades. — Las propiedades de las curvas son bien distintas, según su clase y naturaleza, y á semejanza de lo hecho respecto de

su historia, se especifican particularmente al ocuparse de cada una de ellas.

Tangente.— Se llama tangente á una curva, la recta que resulta prolongando uno de sus elementos rectilíneos.

La curva y su tangente tienen siempre, por lo tanto, un elemento rectilíneo común, y el primer punto del mismo, en el sentido en que la curva se supone engendrada, recibe el nombre, no muy propio, de *punto de contacto*. Resulta de aquí, que la tangente á una curva en un punto dado, no es más que la prolongación del elemento rectilíneo que empieza en dicho punto y en el mismo sentido de la generación de la curva.

El punto de tangencia entre una recta y una curva, puede hallarse en el espacio finito ó en el infinito. En el primer caso, prolongado el elemento rectilíneo que pase por dicho punto, se tiene la tangente que puede trazarse para cualquiera de las curvas conocidas, ya sean geométricas, ya gráficas. En el segundo caso, ó sea cuando el punto de contacto se halla en el infinito, la recta, prolongación del elemento rectilíneo, puede pasar por el espacio finito ó hallarse toda fuera de él; si sucede lo primero, como en la hipérbola, la recta de que se trata recibe el nombre de *asíntota*, y si lo segundo, como en la parábola, no debe recibir nombre alguno, pues por más que la ecuación y las propiedades especiales de la curva acusen la existencia de dicha línea, no puede, sin embargo, ser representada gráficamente. Estos dos últimos casos se presentan en las curvas geométricas.

Descartes fué el primero que nos dió reglas para el trazado de tangentes á las curvas, el cuál, de todos sus descubrimientos en Geometría, es el que en mayor estima tuvo. Este problema sirve, en efecto, para las determinaciones más importantes de las teorías de las curvas, y aun cuando el método de Descartes haya sido hoy sustituído por otros más prontos y cómodos fundados en el cálculo diferencial, no se puede menos de señalarle en la historia de la ciencia como una invención muy ingeniosa y además como la primera de este género.

El método de Descartes descansa sobre el principio siguiente: Sea AER (fig. 2) una rama de curva referida al eje AM. Desde un punto C del eje se describe un circulo que corte á la curva en dos puntos por lo menos, B y b, en los cuales las ordenadas comunes á la curva y al circulo serán BP y bp. Imaginemos que el radio de este circulo decrece permaneciendo su centro el mismo, y es evidente que los dos puntos B y b se aproximarán y llegarán á confundir-

se en E cuando el círculo no haga más que tocar á la curva en este punto. El radio CE, dirigido al punto de contacto, será al mismo tiempo *normal* á la recta que sea tangente al círculo y á la curva en dicho punto E. De esta manera, el problema de trazar una tangente á una curva, se encuentra referido al de encontrar la posición de la normal trazada desde un punto cualquiera tomado sobre el eje. Descartes busca de una manera general cuáles han de ser los puntos de intersección de la curva con un círculo descrito con un radio determinado y desde un punto del eje como centro, llegando á una ecuación que, en el caso de dos intersecciones, contiene dos raíces dis-

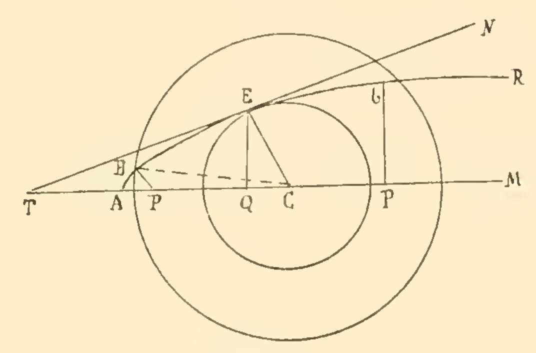


Figura 2.ª

tintas que dan á conocer las distancias de las ordenadas de estas intersecciones al vértice de la curva. Ahora bien, si estos puntos de intersección se confunden, las dos ordenadas se confundirán también y la ecuación deberá tener sus dos raíces iguales. Bastará, pues, determinar los coeficientes de la ecuación de manera que aquélla presente dos raíces iguales, lo que consigue Descartes comparando la ecuación propuesta con otra ecuación ficticia del mismo grado, que tiene dos valores iguales, lo cual dará la distancia de la ordenada correspondiente del punto de contacto.

Todavía se encuentra en la *Geometría* de Descartes otro método para el trazado de las tangentes á una curva, algo diferente del anterior. Considera una línea recta que gira alrededor de un centro sobre el eje prolongado de la curva. Esta línea cortará á la curva en un cierto número de puntos: pero á medida que se aleje ó se aproxime al eje, según los casos, los puntos de intersección se acercarán los unos á los otros, llegando á coincidir y, por tanto, tocando la línea á la curva en dicho punto, ó lo que es lo mismo, siéndole en él tangente. Para determinar su situación, Descartes procede

próximamente como en el caso anterior, buscando la ecuación general, para la cual, la línea formando un ángulo dado con el eje, se encuentran sus puntos de intersección con la curva. Luego, por medio de una ecuación ficticia, que tiene dos raíces iguales, determina cuál debe ser la inclinación conveniente de dicha línea para que sea tangente á la curva.

Otro método, no menos célebre que los de Descartes, es el método de Fermat, *Traité de Géométrie* (1679), en el cual se ha pretendido encontrar el principio del cálculo diferencial. El principio sobre el cual se funda este método es el siguiente: si la línea BD (fig. 3) es tangente á una curva $AbBd$, es evidente que cualquier otra ordenada distinta de BC, como bc por ejemplo, la encuentra fuera de la curva en un punto e. Así, la relación de $\overline{BC}^2$ á $\overline{ee}^2$, que es la misma de la de $\overline{DC}^2$ á $\overline{Dc}^2$ será más pequeña que la de $\overline{BC}^2$ á $\overline{bc}^2$, ó la de AC á ae, tomando una parábola por ejemplo; pero si se supone que esta relación sea la misma y que la distancia Cc se anula, los puntos b y B se confundirán, y se tendrá una ecuación que tratada del propio modo que en su método de *maximis* y *minimis* nos da la relación de CD á CA ó de la subtangente á la abscisa. Fermat, como se ve, hace depender su método del trazado de tangentes á las curvas de aquel de los *maximis*.

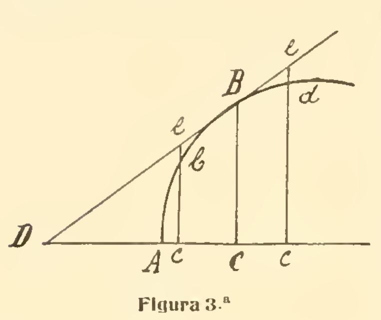


Figura 3.ª

Los métodos de Descartes y de Fermat sufrieron diferentes perfeccionamientos por los trabajos de Sluse, *Miscellanea* (1668), que fué el primero que empleó la forma simple

$$-\frac{f'x}{f'y}$$

para el coeficiente angular de la tangente en un punto (x, y) de una curva representada por una ecuación entera

$$f(x, y) = 0.$$

Hudde, *J. Hudenii, de reductione æquationum et de maximis et minimis epistolæ duæ*, publicado por Schooten, había llegado á una expresión semejante y Huyghens, *Regula ad inveniendas tangentes linearum cur-*

varum (*Memoires de l'Academie des Sciences*, T. I, 1693), había encontrado, por el método de Fermat, la ecuación

$$f'_x(x, y) = 0,$$

que determina los puntos máximos ó mínimos.

Entiéndase que las notaciones f'_x y f'_y no eran usadas sino para la denominación de polígonos derivados.

Roberval fué también autor de otro método para el trazado de las tangentes, *Observations sur la composition des mouvements et sur la moyen de trouver les tangentes des lignes courves* (1690), publicada por Gallois en *Recueil des divers ouvrages de Mathématiques et de Fisique des membres de l'Académie des Sciences*, método inferior á los de Fermat y Decartes.

A quien se debe la solución definitiva de este problema de las tangentes es á Barrow, *Lectiones opticæ et geometricæ* (1674). Su método se funda sobre la semejanza del triángulo formado por la ordenada del punto de contacto, la tangente y subtangente, y del triángulo infinitesimal compuesto por un arco infinitamente pequeño de la curva, contado á partir del punto de contacto, y las diferencias respectivas de las coordenadas de los extremos de este arco. Este método constituye verdaderamente el primer escalón, sea del método diferencial, sea del método de las derivadas, no quedando más que que instituir los procedimientos de cálculos necesarios para obtener fácilmente los crecimientos infinitamente pequeños correspondientes á la ordenada y á la abscisa de una curva, es decir, de una función y su variable.

Expuesto esto que se refiere á la historia del trazado de las tangentes á la curva, nos resta señalar que las fórmulas consiguientes se encuentran en los artículos *plana* y *alabeada;* como también en *secciones cónicas*. (Ver estos artículos.)

Subtangente, *normal*, *subnormal*, etc. (Ver los mismos artículos.)

Evoluta, *evolvente*, *involuta*, etc., en los artículos correspondientes.

Angulo de dos curvas. — Se da el nombre de ángulo curvilíneo al formado por dos líneas curvas, cuando son circulares y convexas; se ha dicho en lo antiguo *ángulo cisoide*, *heredacio y de hiedra*. (Dicc. de la Academia. Primera edición.)

Generación de las curvas. — Las curvas planas pueden en general considerarse engendradas de una de las tres maneras siguientes:

1.ª Por un punto que se mueve, ya arbitrariamente, ya sujeto á leyes fijas y determinadas.

2.ª Por las intersecciones sucesivas de las diversas posiciones de una recta que se mueve, permaneciendo siempre normal á una curva dada.

3.ª Por las posiciones consecutivas de un punto determinado de una recta, cuando ésta se mueve permaneciendo siempre tangente á una curva, y de modo que los elementos sucesivos de la una se apliquen respectivamente sobre elementos iguales de la otra.

Conforme al principio de dualidad puede considerarse toda curva como engendrada de dos maneras diferentes: como descrita por un punto móvil y como envuelta por una recta móvil. Consultar la obra *Thèorie der algebraischen Curven*, Plücker (Bonn. 1839, pág. 200 y siguientes).

Si se considera que en toda curva se pueden determinar dos sistemas de puntos que pueden ser empleados como puntos de base de dos haces proyectivos, para la generación de la curva dada se tendrá otro medio de generación cuyo estudio puede verse en *Essai sur la generation des courbes geométriques* (*Memoires presentés par divers savants á l'Academie des Sciences.* T. XVI, 1858) debido á Mr. Jouquieres.

—Las curvas alabeadas en general provienen de la intersección de dos superficies.

Curva de Agnesi.

Definición. — Si consideramos tres puntos, O, O', O'', situados en línea recta de modo que se verifique $O'O = OO''$, y si se efectúa la construcción 1, 2, 3, 4, el lugar del punto I es la curva de Agnesi.

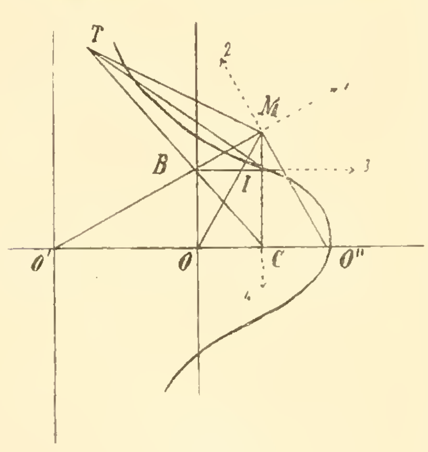


Figura 1.ª

Historia.—Para detalles bibliográficos respecto á esta línea y estudios sobre la misma, se puede consultar *Journal des Mathematiques Speciales*, 1885.

Tangente. — Levantando en el punto M una perpendicular MT á OM hasta su encuentro en T con BC, la recta TI será la tangente á esta curva en el punto I.

Curva de Bertrand.

Aquella en que sus normales principales son también normales principales de una segunda curva.

Su ecuación intrínseca es:

$$\frac{a}{\rho} + \frac{b}{\gamma} = 1.$$

Pueden verse los trabajos de Balitrand y Rioche en el *Journal Mathesis*, 1894, y su *Teoría geométrica* en la misma publicación, año 1896.

Curva de cabeza.

Definición. — Se da este nombre en construcción á las curvas intersecciones del cañón que forma el intradós en las bóvedas de los puentes oblicuos con los planos verticales, generalmente paralelos, que contienen sus extremos.

Clasificación. — Se distinguen las curvas de cabeza *real* y las de cabeza *ficticia:* las primeras corresponden al caso en que se aplica el aparejo ortogonal, y las segundas cuando para el despiece de la bóveda se utiliza el aparejo helizoidal.

Se encuentran estas denominaciones en Collignon, *Cours de mécanique appliquée aux constructions,* 1869, pág. 440.

Curva de Feliz Lucas.

Ver *Bulletin de la Société Mathématique de France,* tomo XVII; *Statique des polyñomes,* por Feliz Lucas.

Curva de Gutschoven.

Curva lugar del vértice de una escuadra en que uno de sus lados de longitud dada se apoya en una recta fija, mientras que el otro lado de longitud indefinida pasa por un punto fijo dado sobre la misma recta.

Su ecuación es:

$$r = a \,.\, \cot \,.\, \theta,$$

y se la conoce también con el nombre de *cappa.*

Curva de Hermite.

Definición. — Si se considera la hessiana de una curva de tercer orden como la jacobiana del haz de sus primeras polares, se sabe que este haz es al mismo tiempo aquel más general de las cónicas, y por tanto la hessiana puede ser definida, partiendo de la consideración de este haz, como el lugar de los puntos dobles de las curvas desvanecidas ó descomponibles de este haz. Del propio modo la cayleiana puede ser definida como la envolvente de las rectas de que se componen estas cónicas, y bajo este punto de vista se ha seguido la costumbre de designarla con el nombre de *curva de Hermite.*

Historia. — La denominación dada á esta línea es debida á haber sido indicada por Hermite, *Journal de Crelle* (t. LVII). Pueden asimismo consultarse, entre otros, los trabajos de Smith, *Proceedings of the London math. Society* (Mayo, 1868); de Rosanes, *Math. Annalen* (t. VI); de Gundelfinger, *Journal de Crelle* (t. LXXX), etc.

Ecuación. — La ecuación de la curva de Hermite, del haz de cónicas

$$\chi a^3_x + \lambda b^2_x + \mu c^2_x = \chi \Sigma\Sigma a_{ik} x_i x_k + \lambda \Sigma\Sigma b_{ik} x_i x_k + \mu \Sigma\Sigma c_{ik} x_i x_k = 0,$$

se tendrá de las ecuaciones

$$2\,(\chi a_{ik} + \lambda b_{ik} + \mu c_{ik}) = u_i v_k + v_i u_k,$$

eliminando $\chi, \lambda, \mu, v_1, v_2, v_3$; y se tendrá por consiguiente

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_{11} & c_{11} & u_1 & 0 & 0 \\ a_{22} & b_{22} & c_{22} & 0 & u_2 & 0 \\ a_{33} & b_{33} & c_{33} & 0 & 0 & u_3 \\ 2\,a_{23} & 2\,b_{23} & 2\,c_{23} & 0 & u_3 & u_2 \\ 2\,a_{31} & 2\,b_{31} & 2\,c_{31} & u_3 & 0 & u_1 \\ 2\,a_{12} & 2\,b_{12} & 2\,c_{12} & u_2 & u_1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

— Se denominan *puntos conjugados el uno del otro relativamente al haz* de curvas, á dos puntos de la jacobiana, tales, que las polares del uno con relación á todas las cónicas del haz, se cortan en el otro. En este supuesto se puede decir que la curva de Hermite de un haz de

cónicas, es la envolvente de las rectas que unen dos á dos, los puntos conjugados el uno del otro, relativamente al haz.

Propiedades. — Si consideramos una tangente de la curva, los puntos de encuentro de una cónica cualquiera del haz con ella, estarán situados armónicamente con relación á los dos puntos conjugados, cuya tangente considerada es la linea de unión. Los puntos de intersección de esta última con las curvas del haz se encontrarán en involución.

La figura dualísticamente opuesta al haz de cónicas se denomina haz tangencial de cónicas; y la jacobiana de este haz tangencial será el lugar de las tangentes dobles de las curvas que se descomponen en un par de puntos. Para abreviar, al haz tangencial que está armónicamente inscrito al haz puntuado, se da el nombre de *conjugado*. En estos supuestos la cuestión de la connexidad entre las curvas de Jacobi y de Hermite relativas á un haz y entre las curvas correspondientes del haz conjugado, se resuelve fácilmente; porque dos puntos conjugados con relación al haz y situados por consiguiente sobre la jacobiana son los polos armónicos relativos á todas las curvas del haz y forman por lo tanto una cónica del haz tangencial conjugado. Se tendrá en consecuencia las propiedades siguientes:

«La curva de Jacobi relativa á un haz de cónicas es idéntica á la curva de Hermite relativa al haz tangencial conjugado». Y correlativamente.

«La curva de Jacobi relativa á un haz tangencial de cónicas es idéntica á la curva de Hermite relativa al haz conjugado».

Curva de Jerabert.

Curva obtenida disminuyendo el radio vector de la elipse, dirigido á uno de los focos, en una cantidad igual al radio vector que va al otro foco.

Ver *Journal Mathesis*, 1885.

Curva de Lamé.

Nombre dado á las curvas que tienen por ecuación:

$$x^{\frac{2m}{m+1}} \qquad y^{\frac{2m}{m+1}} = 1.$$

Ver la obra de Lamé, *Examen de los methodes pour resoudre les problemes de Geometrie*, 1821.

Curva de Kiepert.

Curva esférica, cuyos arcos pueden representar toda integral elíptica de primera especie.

Cuando la esfera degenera en un plano, la curva de Kiepert en ella contenida, se reduce á una lemníscata de Bernouilli.

Ver, para el estudio de sus propiedades, las obras de Berol, *De curvis quarum arcus integralibus*, etc., y los trabajos de Kiepert y de Gattung, etc.

Curva de los Coulombs.

Definiciones. — El coulomb es la unidad práctica de cantidad de electricidad en el sistema electromagnético, tiene por valor 10^{-1} unidades *C. G. S.* de cantidad.

— Si se representa la descarga de una pila por una curva l' (fig. 1),

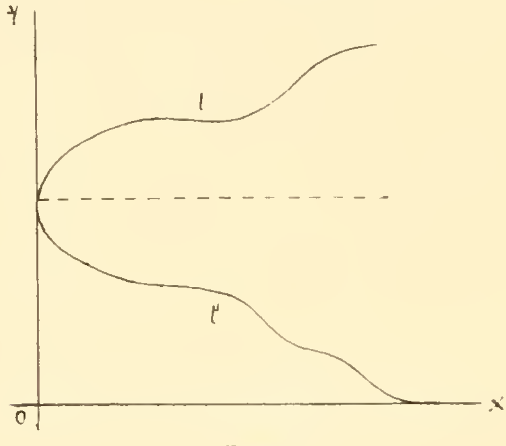


Figura 1.

tomando los tiempos como abscisas y las intensidades como ordenadas, y si se traza la curva integral (ver integral) correspondiente l, las ordenadas de esta segunda representarán la cantidad de electricidad invertida hasta un momento cualquiera de descarga. Esta cantidad será dada en coulombs, cuando los tiempos se cuentan en segundos, y las intensidades en amperes, ó en amperes-horas, si los tiempos se cuentan en hora.

—Este ejemplo da idea de la determinación de la *curva de los cou-*

lombs en el caso particular considerado, pudiendo ser trazada al objeto de resolver otros muchos problemas de la misma índole.

Curva del peón.

Definición. — Dase este nombre á la curva descrita por la punta del peón ó trompo, cuando se le hace mover sobre dicho punto, en el juego ordinario de dicho cuerpo.

Ecuación y forma.—Sea $HI = \rho$ (fig. 1) y ω el ángulo que forma esta recta con la intersección del plano MN y del ZGY; siendo GX y GY los dos ejes fijos que con el GZ forman un sistema rectangular, ρ y ω serán las coordenadas polares del punto I, siendo H el polo.

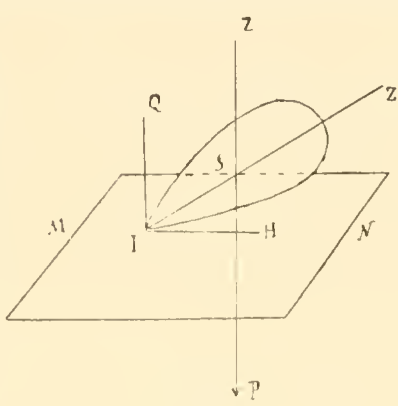
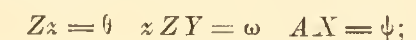


Figura 1.

Las fuerzas que obran sobre el peón son: el peso $GP = \mu g$ del cuerpo aplicado en el punto G y la reacción normal $IQ = Q$ del plano sobre que se mueve, la cual es vertical.

Construyamos una figura esférica sobre una esfera de radio uno, y que tenga el punto G por centro; se tendrá (fig. 2)



$$Zz = \theta \quad zZY = \omega \quad AX = \psi;$$

ahora; A es el polo del círculo máximo Zz y X lo es del círculo también máximo ZY; por tanto

$$\omega = \psi.$$

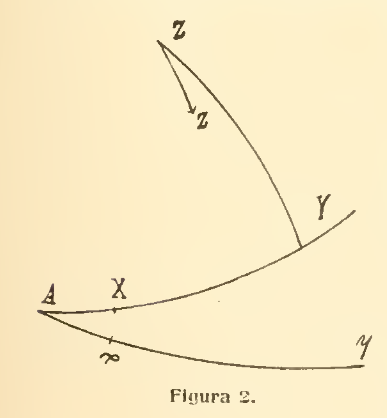


Figura 2.

Se tiene, por otra parte, en el triángulo rectángulo IHG,

$$\rho = l \,.\, \mathrm{sen}\,\theta = l \sqrt{1 - n^2},$$

siendo $GI = l$ y $n = \cos.\ \theta$.

Por tanto, ρ estará comprendido entre $l \,.\, \text{sen}\,\theta_o$ y $l \,.\, \text{sen}\,\theta'$ y, por consiguiente, la curva lo estará entre dos circunferencias que tengan por centro el punto H, y por radios $HB = l.\, \text{sen}\,\theta_o$ y $HB' = l.\, \text{sen}\,\theta'$ (fig. 3).

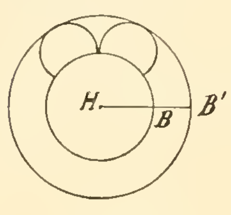


Figura 3.

— Sea ε el ángulo que forma con el radio vector la tangente á la curva en un punto cualquiera, se tendrá:

$$\text{tg}\,\varepsilon = \frac{\rho \,.\, d\omega}{d\rho} = \frac{l \,.\, \sqrt{1-n^2} \,.\, d\psi}{d \,.\, l\sqrt{1-n^2}},$$

ó bien

$$\text{tg}\,.\,\varepsilon = -\frac{1-n^2}{n}\,\frac{\frac{d\psi}{dt}}{\frac{dn}{dt}},$$

ecuación en la cual, sustituyendo por $\frac{dn}{dt}$ y $\frac{d\psi}{dt}$ sus valores, y haciendo las reducciones necesarias, se encuentra la expresión

$$\text{tg}\,\varepsilon = -\frac{Cn}{An}\sqrt{\frac{A}{2\mu g l} + \frac{l}{2g}(1-n^2)}\;\frac{\sqrt{n^2-n}}{\sqrt{(n-n')(n''-n)}}.$$

De donde se deduce

$$\text{para } n = n_0; \quad \varepsilon = 0$$

$$n = n'; \quad \varepsilon = \frac{\pi}{2},$$

lo que dice, que la curva es normal á la circunferencia HB, en los puntos en que la encuentra, mientras que es tangente á la circunferencia HB'.

La curva tiene por tanto la forma indicada en la figura 3.

Véase para los detalles particulares de este problema y desarrollo de los cálculos aquí suprimidos, la obra *Cours de mécanique*, por M. Despeyrous (t. II, pág. 265 y siguientes).

Curva de Stammer.

Definición.—Curva que en coordenadas circulares tiene por ecuación

$$\mu = a\theta,$$

siendo (μ, θ) las coordenadas de uno de sus puntos y a un número real que se supone mayor que la unidad.

Historia. — Esta curva ha sido particularmente estudiada por Mr. Stammer, que la hizo objeto de su tesis para el doctorado, *Journal de Crelle* (T. XLIV, pág. 295, 1852), y la idea de las coordenadas circulares pertenece á Mr. Plucker que la expuso en su curso de la Universidad de Bonn, durante el año 1847.

Forma. — La curva que nos ocupa está formada por un cierto número de ramas infinitas que tocan todas al círculo.

— Se distinguen dos casos, según el signo positivo ó negativo del factor a.

Curva de Watt.

Definición.—Curva próximamente recta que por medio del mecanismo conocido en Mecánica con el nombre de paralelogramo de Watt, se hace recorrer á la varilla ligada al pistón de una bomba ó también al ligar la varilla del pistón de una máquina de vapor á las piezas, á las cuales ella debe transmitir el movimiento, hace que esta varilla pueda ella misma moverse en el sentido de su longitud sin que tenga ó sufra reacciones laterales.

—Esta curva es un caso particular de la de *larga inflexión* (ver esta voz), que si se coloca por separado, es por el particular nombre con que se la distingue, debido al célebre mecánico que la descubrió.

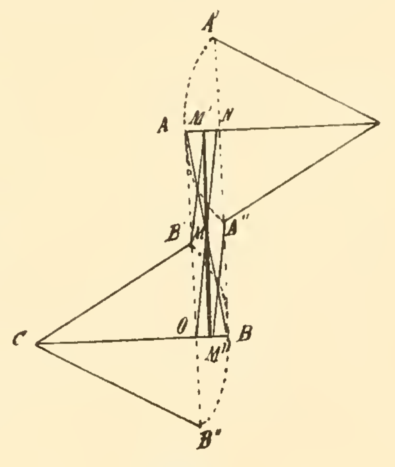


Figura 1.

Determinación. — Sea OA (fig. 1) la posición horizontal del balancín y OA', OA'' las posiciones extremas del mismo, simétricas con relación á la posición horizontal.

Watt hace el ángulo $A'OA$ igual á 18°55', de manera que la relación de la flecha AN al radio OA' es la de 12 á 37, la cual determina la longitud de la OA del balancín cuando la longitud de la semicuerda $A'N$ es conocida. Se coloca el contrabalancín de modo que, en su posición horizontal, su extremo B se encuentre sobre la prolongación de la cuerda $A'A''$, y como las excursiones del contrabalancín son iguales á las del balancín, resulta que el punto A está á su vuelta sobre la prolongación de la cuerda $B' B''$ que une los puntos extremos del arco descrito por la extremidad del contrabalancín. Las posiciones extremas y media de la articulación están en M, M' y M''. Estos tres puntos pertenecen evidentemente á la vertical trazada por el punto medio de la flecha.

Según el modo con que la figura está construída, el triángulo $BB'B''$ es igual al triángulo $AA'A''$ y está simplemente girado; por consiguiente, el centro del círculo que pasa por los tres puntos B, B' y B'' ó el centro del contrabalancín deberá estar en C sobre la horizontal trazada por el punto B y á una distancia $BC = AO$. La recta OC, pasará por el punto M. Por lo tanto, la articulación M describe una curva de larga inflexión y además de estar las tres posiciones extremas y media del punto M sobre una misma recta como se ha visto antes, la tangente á la curva que dicho punto describe, está en su posición media dirigida según la misma recta y además el punto M es un punto de inflexión de la curva. De esto se deduce que esta curva se debe separar muy poco de una línea recta.

La curva así obtenida tiene su mayor separación respecto de la línea MM' hacia los $^3/_4$ de su distancia á partir de M, no llegando dicha separación á tener por valor más que 0,0003 del radio OA.

Mr. Tchébycheff en un trabajo inserto en las *Memorias de la Academia de Saint-Petersbourg*, ha demostrado que las proporciones señaladas por Watt no son las que corresponden al mínimo de separación; pero, sin embargo, se las adopta debido á su sencillez y por responder mejor á las circunstancias que la práctica exige.

Pueden consultarse, entre otras obras, el *Traité des Mecanismes* de Mr. Haton de la Goupillière; el *Cours de Mécanique appliqueé*, de Mr. Poncelet, y los tratados de Prony, Morin, Pambour, Jullien, etc.

Curvas cíclicas.

Definición.—Curvas resultantes de la intersección de la esfera con una superficie de segundo orden.

Historia.—Darboux, en su obra *Sur une classe remarquable de courbes*, etc., las dió este nombre; y Laguerre, en el *Bulletin de la Societé Philomatique*, de París, 1867, el de *analagmáticas esféricas.*

Ecuación.—Suponiendo el centro de la esfera en el origen de coordenadas, y siendo (α, β, γ) las del vértice de uno de los cuatro conos que pueden pasar, según Poncelet, por cada cíclica, la ecuación de estas líneas puede ser de la forma

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ A(x - \alpha)^2 + B(y - \beta)^2 + C(z - \gamma)^2 = 0. \end{cases}$$

Propiedades.—Si el vértice del cono coincide con el centro de la esfera, la cíclica es una elipse esférica.

— Si ρ_1 y ρ_2 son las distancias de un punto cualquiera de una cíclica á dos focos situados sobre la circunferencia de contacto de la esfera con el cono circunscrito del mismo vértice, las cíclicas resultantes de la intersección de la esfera con las superficies cuyas ecuaciones son

$$h\rho_1 + k\rho_2 = l \qquad \rho_1 \rho_2 = m,$$

se llaman respectivamente *cartesianas esféricas* ó *cassínicas esféricas.*

Curvas de cuarto orden (Cuárticas).

Definicion. — Líneas que tienen por ecuación, la general.

$$Ay^4 + Bxy^3 + Cx^2y^2 + Dx^3y + Ex^4 + Fy^3 + Gxy^2 + Hx^2y + \\ + Kx^3 + Ly^2 + Mxy + Nx^2 + Py + Qx + R = 0.$$

Historia. — De todos los geómetras, Euler es el que más sistemáticamente se ha ocupado de las curvas de orden superior. Este ha clasificado las curvas en su *Introductión á l'analyse de l'infini*, por la consideración de las ramas infinitas, hasta las de cuarto orden inclusive. Mr. Bragelonge, que falleció en 1744, empezó un *Examen des lignes du quatrième ordre*, que dejó sin terminar, y cuyas tres primeras partes han sido publicadas en Recueil de *l'Academie des Sciences*, y á Mr. Hachette se debe un estudio de las proyecciones de las secciones del cono de segundo grado entre sí. Estas proyecciones forman una de las clases más importantes de las curvas de cuarto orden.

Clasificación. — Euler clasifica estas curvas en ocho clases que comprenden 146 especies; pero este número debe ser reducido á 125, porque un error de cálculo le hace incluir en la sexta clase 21 más; y aun de esas 125 hay que restar otras 12 que tampoco existen. En cambio hay 22 especies que se le hubieron de escapar, entre las cuales se encuentra la especie general de la segunda clase.

Mr. Plucker *(Journal Liouville,* t. I, pág. 229) ha estudiado de nuevo esta clasificación y dividido todas las líneas en ocho clases, pero invirtiendo el orden de Euler en el 3.° y 4.° He aquí su clasificación:

Caso 1.° No se tiene ninguna dirección real, según la cual, una línea recta corta á la curva en menos de cuatro puntos. Comprende una especie.

2.° Se tienen dos direcciones, según las cuales una línea recta arbitraria, encuentra á la curva en tres puntos solamente. Comprende seis especies.

3.° Existen cuatro direcciones diferentes y reales, según las cuales una línea recta corta á la curva en tres puntos solamente y se tienen cuatro asíntotas rectilíneas y reales en estas cuatro direcciones que cortan la curva en el caso general. Comprende diez especies.

4.° Se tiene una dirección única, según la cual una línea recta cualquiera encuentre á la curva en tres puntos solamente, pero no hay asíntota rectilínea. Comprende ocho especies.

5.° En lugar de dos asíntotas rectilíneas é imaginarias, la curva tiene dos asintotas reales á la que responden dos direcciones, según las cuales, la curva es cortada por una línea recta cualquiera en tres puntos solamente. Comprende treinta y nueve especies.

6.° Presentan dos sistemas de asíntotas parabólicas. Comprende treinta y cinco especies. Euler admitía cuarenta y siete.

7.° La curva tiene una asíntota rectilínea y no es cortada por una línea recta trazada paralelamente á la asíntota, más que en tres puntos. Comprende veinticuatro especies, y

8.° Tienen una dirección única según la cual una línea recta encuentra á la curva en tres puntos solamente. Comprende doce especies.

Las ecuaciones de todas estas curvas creemos no deben ponerse aquí por su extensión, y sí indicaremos que pueden verse en la obra al principio mencionada.

Formas y propiedades. — Zeuthen, *Math. Annalen* (t. VII, pág. 410) ha hecho una exposición completa de todos los casos de curvas de

cuarto orden que pueden presentarse y estudiado las formas que dichas curvas afectan.

— Aplicando la teoría de las tangentes dobles estudiada por Hesse *(Journal de Crelle*, t. XLIX, LV y LIX) y Steiner (ídem, t. LIX) cuya exposición algebraica se debe á Clebsch, *Ueber die Anwendung der Abel'schen Functionem*, etc. *(Journal de Crelle*, t. LXIII), y su demostración geométrica á Geiser (Idem, t. LXXIII), se demuestra que *una curva de cuarto grado posee (teniendo en cuenta la fórmula de Plücker)* 28 *tangentes dobles*. Para la conexión de esta teoria con las de las 27 rectas sobre una superficie de tercer orden, ver Geiser *(Math. Annalen*, t. I), y Zeuthen (ídem, t. VIII).

— Partiendo de la teoría de las integrales abelianas, estudiando la realidad de sus períodos y la fijación de sus integrales normales, Klein ha llegado á determinar las características que se necesitan atribuir á una tangente doble dada, supuesta la curva dada por una figura; y á indicar los sistemas de cónicas reales que tocan á una curva de cuarto orden en cuatro puntos *(Math. Annalen*, t. X, página 365 y t. XI, pág. 293) sistemas, que son en número $2^6 - 1 = 63$.

— En cada uno de los treinta y seis sistemas de cónicas de contacto figuran seis pares de tangentes dobles y los puntos de contacto de dos pares que pertenecen al mismo sistema están situados sobre una cónica. Así, pues, el número de cónicas así obtenido, es igual al de los 63 sistemas multiplicado por el número 15 de las combinaciones de seis pares dos á dos y dividido por tres, puesto que cada grupo de cuatro tangentes, cuyos puntos de contacto están situados sobre una cónica puede descomponerse de tres maneras en dos pares, de modo que cada cónica se presenta tres veces. Se encuentra, por consiguiente, que el número de estas cónicas es de 315.

— Además existen sesenta y cuatro sistemas de curvas de tercer orden que cada una toca á la de cuarto orden en seis puntos, y se encuentra también, perteneciendo á estos sistemas, 4.096 curvas de tercer orden, que tienen con la de cuarto en tres puntos un contacto de tercer orden, estando los seis puntos de contacto reunidos por pares.—(Ver Clebsch, *Integrales Abeliennes et connexes*, pág. 248) y para el estudio de la ecuación de grado $4^6 = 4.096$, de la cual depende la determinación de estas curvas, C. Jordan, *Traité des Substitutions* (página 305).

— Se encuentran siete sistemas, compuesto cada uno de un número simplemente infinito de cónicas que tocan á una curva de cuarto orden en cuatro puntos.

— Si en una curva de cuarto orden existe un punto de retroceso,

los puntos en que las segundas polares tocan la tangente de retroceso, están situados sobre otra curva de cuarto orden. Esta segunda tiene un punto de retroceso ó punto triple, del que dos tangentes coinciden con la tangente de retroceso de la curva dada.

— El particular estudio de curvas de cuarto orden de dos puntos dobles, bajo el punto de vista algebraico, ha sido hecho por Casay, Chasles, Quetelet, Cayley y Hart (Ver *Higher plane curves*, Salmon) También se pueden ver trabajos sobre estas líneas en Jordan (*Traitè des Substitutions*, pág. 331.), etc.

Curvas de Ménechme.

Definición. — Nombre con que en la antigüedad fueron conocidas las *cónicas.*

Historia. — Ménechme, discípulo de Eudoxio de Cuide y que nació hacia (— 375) se ocupó particularmente de la teoría elemental de las cónicas. Este, con los geómetras de la escuela Platoniciana, obtuvieron estas curvas cortando el cono recto de base circular por un plano perpendicular á una de las generatrices, resultando que para formar las tres curvas, se vieron obligados á cambiar el ángulo de abertura del cono, de aqui que estas curvas recibieran el nombre de sección del cono acutángulo, sección del cono rectángulo y sección del cono obtusángulo.

Ménechme propuso dos soluciones del problema de la inserción de dos medias proporcionales entre dos magnitudes dadas: la primera por la intersección de dos parábolas, y la segunda por la de una parábola y una hipérbola.

—Eratostene en su poema llama á estas curvas la *triada de Ménechme.*

— Ya hemos visto en la voz *cónicas* el desarrollo adquirido por estos estudios.

Curvas de Mr. Delile.

Definición. —Reciben este nombre las curvas sobre las que ruedan los contrapesos cilíndricos horizontales en el sistema de puentes levadizos imaginados por Mr. Delile.

Historia.—Estas líneas han sido estudiadas por Mr. Delile, según decimos, y para ilustrar este punto ver la voz *Equilibraciones.*

Descripción y trazado. — Sea AO (fig. 1) el tablero, O la proyección del eje horizontal de rotación y C uno de los contrapesos. En este sistema la cadena está sustituída por una varilla rígida AC,

sujeta al eje del rodillo cilíndrico C y éste resbala sobre la curva MN que es la que vamos á describir.

Supongamos descompuesto el peso P del tablero en dos fuerzas paralelas, aplicadas en A y O respectivamente iguales á $\frac{1}{2}P$. Sea P' el peso del rodillo, y g el punto de aplicación de la resultante de

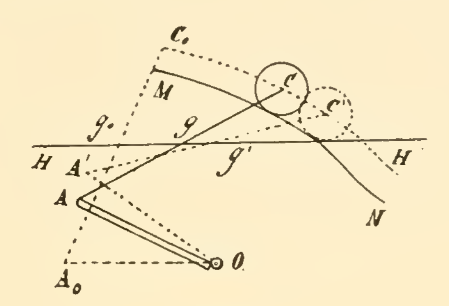


Figura 1.

las fuerzas $\frac{1}{2}P$ y P' ó lo que es lo mismo, el centro de gravedad del sistema de los pesos $\frac{1}{2}P$ y P'.

Las curvas MN se trazarán de modo que en el movimiento del puente levadizo, el punto g describa una horizontal HH'; y resulta el sistema en equilibrio en todas sus posiciones.

En efecto; el trabajo virtual de la fuerza $\frac{1}{2}P$ aplicada en O y de la reacción que se ejerce sobre este eje, es nulo puesto que su punto de aplicación no cambia; el trabajo virtual de la reacción ejercida sobre el rodillo por las curvas MN es nulo, pues por ser esta reacción normal á las curvas es perpendicular al camino elemental descrito por su punto de aplicación. Quedan el trabajo virtual de las fuerzas $\frac{1}{2}P$ y P' aplicadas respectivamente en A y C, ó lo que es igual, el trabajo de su resultante aplicados en g. Ahora, esta resultante es vertical, y el camino elemental descrito por el punto g es horizontal, de aquí que su trabajo sea constantemente nulo. Por consiguiente, la suma de los trabajos virtuales de todas las fuerzas aplicadas al sistema es nula en una posición cualquiera del puente levadizo; luego el sistema se encuentra constantemente en equilibrio.

— Para trazar las curvas MN se empieza por determinar el punto g

para una posición determinada del tablero; por este punto g se traza la horizontal HH', se da luego al tablero una posición cualquiera OA'; desde el punto A' como centro con un radio igual á Ag, se describe un arco de círculo que corte á HH' en un punto g'; se traza $A'g'$ y sobre esta recta se toma una longitud $A'C'$ igual á AC. El lugar de los puntos C' obtenidos de esta manera es una curva de cuarto grado mn, que se podrá trazar por medio de su ecuación, pero que es más sencillo determinarla como acabamos de indicar- Hecho esto, desde cada uno de los puntos C como centro, con el radio que se trate de dar al rodillo se describe un círculo y se traza una curva MN tangente á todos los círculos así trazados y ésta es la curva pedida. Los rodillos, por tanto, deslizarán sobre la curva MN, sus ejes sobre la C_0C' y el punto g describirá la recta horizontal HH'.

Curvas de Mr. Maxwell.

Ecuación y forma. — Según la teoría de Mr. Maxwell, *Electricity and Magnetism* (T. II, pág. 79), para interpretar los fenómenos magnéticos, toda molécula, separada de su posición de equilibrio un ángulo β superior á un cierto límite β_o, conserva de una manera permanente una parte de su deflexión igual á $\beta - \beta_o$.

En este supuesto, si l representa la fuerza que produce la deflexión β_o, a la fuerza resistente y f la magnética que obran sobre una molécula cuyo momento magnético es m, y llamamos n el número de moléculas contenidas en la unidad de volumen, los valores de la intensidad I de la imantación temporal y los de la intensidad I' de la imantación residuidal son dados por las expresiones:

$$\text{Para } f < l \ldots \begin{cases} I = \dfrac{2}{3}\, mn\, \dfrac{f}{a} \\ I' = 0 \end{cases}$$

$$f = l \ldots \begin{cases} I = \dfrac{2}{3}\, mn\, \dfrac{a}{l} \\ I' = 0 \end{cases}$$

$$l < f < a \begin{cases} I = mn\left[\dfrac{2}{3}\dfrac{f}{a} + \left(1 - \dfrac{l^2}{f^2}\right)\left(\sqrt{1 - \dfrac{l^2}{a^2}} - \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{f^2}{a^2} - \dfrac{l^2}{a^2}}\right)\right] \\ I' = mn\left(1 - \dfrac{l^2}{a^2}\right)\left(1 - \dfrac{l^2}{f^2}\right) \end{cases}$$

$$\text{Para } f = a \ldots \begin{cases} I = mn\left[\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{l^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right] \\ I' = mn\left(1 - \dfrac{l^2}{a^2}\right)^2 \end{cases}$$

$$f > a \ldots \begin{cases} I = mn\left[\dfrac{1}{3}\dfrac{f}{a} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6}\dfrac{a}{f} + \dfrac{(f^2 - l^2)^{\frac{3}{2}}}{6f^2a} - \right. \\ \left. \qquad - \dfrac{\sqrt{f^2 - l^2}}{6f^2a}(2f^2 - 3fa + l^2)\right] \\ I' = \dfrac{1}{4}mn\left(1 - \dfrac{l^2}{af} + \sqrt{1 - \dfrac{l^2}{a^2}} \cdot \sqrt{1 - \dfrac{l^2}{f^2}}\right)^2 \end{cases}$$

$$f = \infty \ldots \begin{cases} I = mn \\ I' = \dfrac{1}{4}mn\left(1 + \sqrt{1 - \dfrac{l^2}{a^2}}\right)^2. \end{cases}$$

El lugar geométrico de los valores de I es la curva T y aquel de los de I', la curva R, obtenidas por Mr. Maxwell tomando á f por abscisa y suponiendo $l = 3$ y $a = 5$.

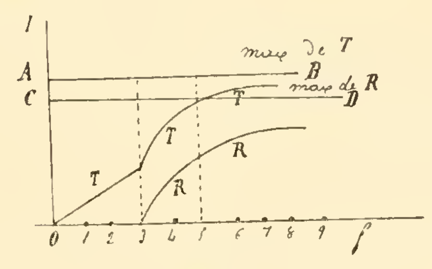


Figura 1.

— Como se ve, estas curvas son muy diferentes de las curvas de intensidad (ver esta voz), que se obtienen por experiencias directas; pero es debido á que la hipótesis que sirve de base á los cálculos de Maxwell, no pueden considerarse como rigurosamente conformes con la naturaleza de las cosas.

Curvas de tercera clase.

Consideraciones generales. — La teoría de estas curvas es inseparable de la de las curvas de tercer orden (ver esta voz), y la una con-

duce necesariamente á la otra; porque, en efecto, al sistema de los nueve puntos de inflexión de aquéllas corresponden la consideración de nueve rectas armónicas en éstas y se puede construir una recta de esta especie buscando sobre las líneas inflexionables que pasan por un mismo punto, el cuarto armónico á los otros dos puntos de inflexión de cada uno, y las rectas armónicas formarán por su agrupación un sistema exactamente recíproco, bajo el punto de vista dualístico, á aquel de los puntos de inflexión; de donde resultan que éstas son las tangentes de retroceso comunes á un haz tangencial de tercera clase, del propio modo que los puntos de inflexión eran comunes á todas las curvas de un haz de tercer orden.



Figura 1.

Así, por tanto, se tienen las siguientes relaciones:

— El punto de intersección de la recta armónica correlativa á un punto de inflexión y de una línea inflexional que pasa por este punto, es el punto cuarto armónico á los dos vértices del triángulo inflexional situado sobre esta última recta y al punto de inflexión.

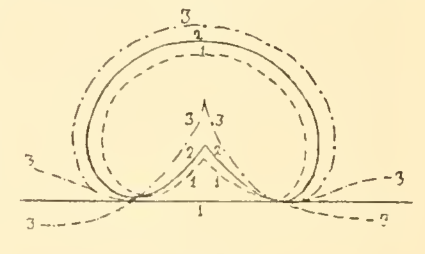


Figura 2.

—Los doce vértices de los triángulos inflexionables están situados cuatro á cuatro sobre las nueve rectas armónicas.

—Las rectas armónicas que pertenecen á tres puntos de inflexión situados sobre una línea inflexionable, se cortan en un vértice del triángulo que se encuentra para la correspondencia de la línea inflexionable de que se trata; á los lados de un triángulo corresponden los vértices opuestos.

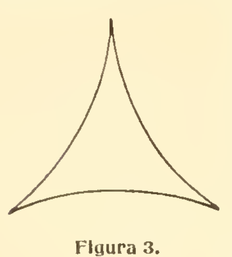


Figura 3.

Clasificación. — A semejanza de las curvas de tercer orden se clasifican éstas en:

1.° *Curvas unipartitas*, consisten en una parte única de tres tangentes de retroceso (fig. 3 y 3, fig. 2).

2.° *Curvas bipartitas*, se componen de una porción de esta naturaleza y de un óvalo que le rodea (fig. 1 y 1, fig. 2).

En este último caso, el óvalo no puede estar situado en el interior

de la rama tricuspidal, por ocurrir que se tendrían dos puntos desde los cuales se podrían trazar cinco tangentes á la curva. Entre las dos especies de curvas se coloca, como elemento de transición, la curva de tangente doble (2 fig. 2). El dibujo indica claramente cómo se forma de esta curva la bipartita de la figura 1; por otra parte, la curva de la figura 3 deriva de la curva 3 de la figura 2 por deformación conveniente y proyección.

Propiedades.— Una curva de la tercera clase, es, en general, de sexto orden y tiene nueve tangentes de retroceso.

— Como al sistema de los nueve puntos de inflexión de las curvas de tercer orden corresponden, como hemos dicho, nueve rectas armónicas en las de tercera clase, y á los cuatro sistemás de triángulos inflexionables en las primeras, cuatro sistemas de tres puntos que son los vértices de dichos triángulos en la segunda, se tendrán las siguientes entre otras propiedades correlativas:

Las nueve tangentes de inflexión de una curva cualquiera de un haz de puntos de inflexión comunes, determinan una curva de tercera clase, y todas estas curvas de tercera clase tienen las mismas tangentes de retroceso.

Los nueve puntos de retroceso de una curva cualquiera del sistema de tangentes de retroceso comunes, determinan una curva de tercer orden, y todas estas curvas de tercer orden tienen los mismos puntos de inflexión.

La curva de tercera clase determinada por las nueve tangentes de inflexión de una curva de tercer orden, es la envolvente de los pares de líneas en las cuales pueden descomponerse las polares de ciertos puntos relativamente á la primera curva, y al mismo tiempo la envolvente de las líneas que unen estos puntos á los puntos dobles de los pares de rectas correspondientes.

La curva de tercer orden determinada por los nueve puntos de retroceso de una curva de la tercera clase, es el lugar de los pares de puntos en los cuales pueden descomponerse las polares de ciertas rectas relativamente á la primera curva, y al mismo tiempo el lugar de los puntos de intersección de estas rectas con las tangentes dobles de los pares de puntos correspondientes.

Entre las curvas de puntos de inflexión comunes, existen cuatro en que las tangentes de inflexión se cortan tres á tres en puntos que forman los vértices de un triángulo inflexional.

Entre las curvas de tangentes de retroceso comunes, existen cuatro en que los puntos de retroceso están situados tres á tres sobre líneas rectas que forman los lados de un triángulo inflexional.

Para el más completo estudio de esta clase de líneas se puede consultar: Clebsch, *Courbes algébriques en général et courbes du troisième ordre.*

Curvas de tercer orden (cúbicas).

Definición. — Dase este nombre á las expresadas por la ecuación

$$Ay^3 + By^2x + Cx^2y + Dx^3 + Ey^2 + Fxy + Gx^2 + Hy + Kx + L = 0.$$

Historia. — Newton en su obra *Enumeratio linearum tertii ordinis,* fué el primero que se ocupó de este estudio, reconociendo que el número de estas líneas era de setenta y dos, usando para ello los métodos de la antigua Geometría y el análisis de Descartes, sin aplicar en ningún punto el análisis trascendente. Sterling, en 1717, bajo el título de *Lineæ tertii ordinis Newtonianæ, sive illustratio tractatus D. Newtoni de enumeratione linearum tertii ordinis,* añadió cuatro nuevas especies á las setenta y dos de Newton; Stone otras dos, y las eleva á setenta y ocho, y Euler las clasifica en seis géneros y afirma existen ochenta variedades. — Mr. Svanberg (Jöas) las dió á conocer en su obra *Enodatio enumerationis linearum tertii ordinis Newtoniana,* 1794.

En la obra mencionada de Newton, éste anuncia la propiedad de que «Todas las líneas de esta clase son dadas por la perspectiva de cinco parábolas divergentes», que luego demuestra Mr. Clairant, *Mémoires de l'Académie des Sciences,* 1731, y asimismo, F. Nicole, geómetra francés, da una demostración analítica del mismo, y Jacquier, otra muy elegante en su tratado de perspectiva, *Elementi di perspettiva secondo i principi di Taylor.* (Génova, 1755).

En la misma obra de Newton se enuncian, sin demostrar, estas otras dos propiedades:

«1.ª El lugar de los centros de las medias distancias de los puntos de encuentro de una curva de grado cualquiera con una recta paralela á una distancia fija, es una línea recta.

2.ª El centro de las medias distancias de los puntos de encuentro de una curva algebraica con una recta cualquiera, coincide siempre con el centro de las medias distancias de los puntos de encuentro, del sistema de asíntotas de la curva, con la misma recta.» — En la tercera sección de la obra de Mac-Laurin, titulada *Tractatus de propietatibus generalibus linearum,* en que se ocupa de las curvas de tercer grado, se encuentra, entre otros, este bello teorema:

«Si un cuadrilátero tiene sus cuatro vértices y los dos puntos de concurso de sus lados opuestos sobre una curva de tercer grado, las tangentes á esta curva, dirigidas por los vértices opuestos, se cortan sobre la curva.»

— Quetelet es autor de este importante teorema: «Con la curva intersección de dos superficies de segundo orden puesta en perspectiva sobre un plano, estando el punto de vista sobre la curva, pueden formarse todas las curvas de tercer grado.»

— Mr. Charles ha dicho, que así como las curvas de segundo grado no pueden dar lugar más que á una especie de cono, del mismo modo, las líneas de tercer orden, no pueden dar lugar más que á cinco clases de conos. Cortando estos conos de una cierta manera, se forman las cinco parábolas cúbicas, y si se les corta de otro cierto modo, se obtienen cinco curvas que tienen centro.

Por último, señalaremos que para el desarrollo y estudio de la teoría de estas curvas, á más de las indicadas, se deben consultar las obras siguientes: Jonquieres, *Melanges de Géométrie pure*, 1856; Williams Sykes, *Sur la théorie algébrique des points de derivation des courbes du troisieme degré*, 1858; Plücker, *System des analytischen Geometrie;* Hesse, *Journal de Crelle*, t. XXVIII, XXXVI y XXXVIII; Cayley, *Philosophical Transactions*, t. CXLVII; Durege, *Die Ebenen Curven dritter Ordnung* (Leipzig, 1871), y las obras de Geometria de Salmon, Cremona y Chasles.

Clasificación de Clebsch. — Clebsch, *Leçons sur la Geométrie*, t. II, página 223; fundándose en que toda curva real de tercer orden tie-

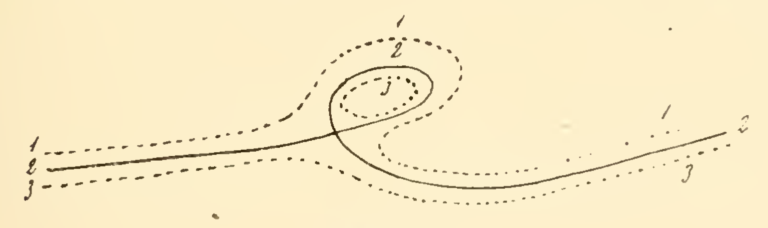


Figura 1.

ne por lo menos una asíntota real y se puede proyectar según una curva que no tiene sino una asíntota real y que toda curva real de tercer orden tiene tres puntos de inflexión real, considera los dos tipos siguientes para todas las formas posibles de una curva de tercer orden:

1.° Curva *unipartita* compuesta de una rama única con tres puntos de inflexión (1 de la fig. 1.ª).

2.° Curva *bipartita* compuesta de una rama semejante y de un óvalo situado fuera de esta primera parte (3 de la fig. 1.ª).

Se puede considerar como curva de paso entre las dos especies la curva de punto doble 2.

La forma de una curva de tercer orden puede diferir poco en apariencia de las representadas en la figura 1.ª, si el óvalo está dividido en dos partes por la recta del infinito; si uno de los puntos de inflexión se aleja al infinito, etc., y se obtiene de este modo, según las diversas disposiciones con relación á la recta del infinito, las diferentes variedades de curvas de tercer orden, tales como las indicadas en las diferentes clasificaciones debidas á Newton, Cramer, Plücker, Möbius y Cayley. — Ver Salmon *(Higher plane Curves)*.

Propiedades.—La hessiana y la steineriana de una curva de tercer orden son idénticas y por tanto la polar lineal de un punto y de la hessiana, toca á esta curva en un punto doble de la primera polar de y.

— Si se une un punto de inflexión á los puntos a, b, c, en que una recta corta una curva de tercer orden, los otros tres puntos de intersección a', b', c', están en línea recta.

— Si los puntos de contacto de tres tangentes á una curva de tercer orden están en línea recta, los otros tres puntos de intersección lo estarán también.

— Una recta que une dos puntos de inflexión pasa necesariamente por otro tercer punto de inflexión. Así, pues, los puntos de inflexión tienen una posición particular con relación los unos á los otros. Por cada uno de ellos pasan cuatro líneas de puntos de inflexión ó *líneas inflexionables* de las cuales cada una contiene dos de los otros puntos de inflexión. La combinación de tres lineas que encierra el conjunto de los nueve puntos de inflexión se llama un *triángulo inflexional* y se puede fácilmente deducir la siguiente propiedad: «Los nueve puntos de infiexión están situados tres á tres sobre doce rectas, y estas rectas se componen tres á tres en cuatro grupos (triángulos inflexionables) de tal manera que cada grupo compuesto de tres líneas encierra el conjunto de los nueve puntos de inflexión.»

— Si los nueve puntos de base de un haz de curvas de tercer orden son los puntos de inflexión para una de ellas, lo serán para todas las curvas del haz y todas las curvas del haz tienen los nueve mismos puntos de inflexión.

— La ecuación de la curva de tercer orden, referida á un triángulo inflexional, es de la forma

$$f \equiv a(y_1^3 + y_2^3 + y_3^3) + 6b\,y_1 y_2 y_3 = 0,$$

siendo $\frac{b}{a}$ una constante absoluta, que caracteriza la curva.

La ecuación de su hessiana es:

$$\frac{1}{6}\Delta \equiv \begin{vmatrix} ay_1 & by_3 & by_2 \\ by_3 & ay_2 & by_1 \\ by_2 & by_1 & ay_3 \end{vmatrix} \equiv (a^3+2b^3)\, y_1y_2y_3 - ab^2(y_1^3+y_2^3+y_3^3) = 0,$$

y si hacemos

$$\alpha = -6ab^2 \quad \text{y} \quad \beta = a^3+2b^3,$$

se tendrá:

$$\Delta \equiv \alpha(y_1^3+y_2^3+y_3^3)+6\beta y_1y_2y_3 = 0,$$

ecuación de la misma forma que la de la curva.

— Los puntos de intersección de estas dos líneas están situados sobre los lados

$$y_1 = 0 \quad y_2 = 0 \quad \text{y} \quad y_3 = 0.$$

— Las coordenadas de los nueve puntos de inflexión, así como las ecuaciones de las doce líneas inflexionables, se obtienen inmediatamente. Admitiendo que $y_1 = o$, $y_2 = o$ é $y_3 = o$ son reales, tendremos para $y_1 = o$

$$y_2^3 + y_3^3 = 0,$$

y, por consiguiente, si se hace

$$y_2 = 1, \quad y_3 = -1, \quad -\varepsilon \quad \text{ó} -\varepsilon^2,$$

se encuentra para coordenadas de los nueve puntos de inflexión la tabla siguiente ($\varepsilon^3 = 1$):

Para $y_1 = 0$.....	$0,$	$1,$	$-1;$	$0,$	$1,$	$-\varepsilon;$	$0,$	$1,$	$-\varepsilon^2;$
$y_2 = 0$.....	$-\varepsilon^2,$	$0,$	$1;$	$-1,$	$0,$	$1;$	$-\varepsilon,$	$0,$	$1;$
$y_3 = 0$.....	$1,$	$-\varepsilon,$	$0;$	$1,$	$-\varepsilon^2,$	$0;$	$1,$	$-1,$	$0;$

y para los productos de los lados de los cuatro triángulos inflexionables, las ecuaciones:

$$\text{I.} \qquad y_1 y_2 y_3 = 0,$$

$$\text{II.} \qquad (y_1 + y_2 + y_3)(y_1 + \varepsilon y_2 + \varepsilon^2 y_3)(y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon y_3) = 0,$$

$$\text{III.} \qquad (y_1 + \varepsilon y_2 + y_3)(y_1 + y_2 + \varepsilon y_3)(y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon^2 y_3) = 0,$$

$$\text{IV.} \qquad (y_1 + \varepsilon^2 y_2 + y_3)(y_1 + y_2 + \varepsilon^2 y_3)(y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon y_3) = 0.$$

— El cubo de la distancia de un punto de una curva de tercer orden, á la recta que pasa por tres puntos de inflexión, está en una relación constante con el producto de sus distancias á las tres tangentes de inflexión.

Generación. — Una curva general de tercer orden es la hessiana de otras tres curvas de tercer orden, y dicha curva, cuya ecuación supongamos $f = 0$, se puede reducir de tres maneras diferentes en pares de puntos (pares de polos), de manera que los puntos de cada par sean los polos conjugados relativamente al haz de polares cónicas de una curva $\varphi = 0$, de la cual $f = 0$ es la hessiana. Por consiguiente, se tendrán sobre la curva tres sistemas diferentes de pares de polos.

— Si tres pares de polos de un mismo sistema están dados para una curva de tercer orden, Mr. Schröter ha dado un medio de construir cuantos puntos de dicha curva se quieran obtener: *Ueber Curven dritter Ordnung* (*Math. Annalen.*, t. V, pág. 50.), y Clebsch, *Ueber zwei Erzeugungsarten der ebenen Curven dritter Ordnung* (*Id.*, pág. 422).

— Además de este sistema de generación, tenemos el de Chasles: *Construction de la courbe du troisième ordre determinée par neuf points* (*Comptes rendus*, 1853), cuyas propiedades fundamentales son las siguientes:

«Toda cónica de un haz, que tiene cuatro puntos de base situados sobre una curva de tercer orden, corta á ésta en dos puntos móviles, cuya línea de unión pasa por un punto fijo de la curva, que es el que se denomina punto opuesto á los cuatro puntos de base»

«Si se toman cuatro puntos cualesquiera de una curva de tercer orden por puntos de base de un haz de cónicas, el punto opuesto nos da el vértice de un haz de radios tal, que juntamente con el haz de cónicas, engendra la curva de tercer orden».

— Mr. Grassmann, *Die lineale Ansdehnungslehre* (Leipzig, 1884), y diferentes memorias insertas *Journal de Crelle* (t. XXXI, XXXVI, XLII y LII), ha desarrollado un sistema de generación de las curvas de tercer orden, cuya descripción es la siguiente:

Un punto x (fig. 2.ª) describe una línea de tercer orden, si las rectas que le unen á tres puntos fijos a, b, c, encuentran separadamen-

te tres rectas fijas, α, β, λ, en tres puntos situados sobre una recta móvil.

Si sobre una curva de tercer orden se toman tres puntos arbitrariamente, se puede, aplicando este método de generación de Grassmann, engendrar la curva de doce maneras diferentes.

Comparando este método con el de Schröter, se deduce que la misma curva obtenida por el método de Grassmann, sirviéndose de los puntos a, b, c, y de las líneas α, β, λ, es la que se obtiene por el de Schröter por medio de los tres pares de puntos a, a'; b, b' y c, c'.

Casos particulares. — Las curvas de tercer orden que presentan particularidades distintas, han sido objeto de diferentes estudios. Así, aquellas de entre estas curvas que tienen un punto doble pueden verse en Weyr, *Théorie der mehrdentigen geometrischen Elementargebilde* (Leipzig, 1869); Cremona, *Einleitung in die Théorie der ebenen Curven;* Hermite, *Journal de Crelle* (tomo LXXXIV), y Lindemann *(Id.)*. También se puede consultar Sylvester, *Philosophical Magazine* (4.ª serie, t. III, 1852), para el valor del discriminante de una curva de $n^{\text{ésimo}}$ orden y punto doble.

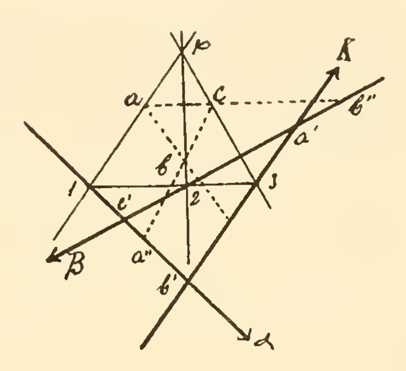


Figura 2.

— Las que contienen un punto de retroceso se pueden ver en las obras de Salmon y Cretona, que hemos antes citado.

— Las de dos puntos dobles han sido tratadas por Gordan, *Ueber Curven dritter Ordnung mit zwei Doppelpunkten* (*Math. Annalen,* t. III), y Gundelfinger *(Id.,* t. IV).

— Para la descomposición en tres rectas se puede consultar Sylvester, *Cambridge and Dublin Mathematical journal*, t. VII, 1852; teoría extendida por Hesse á las curvas de un orden cualquiera: *Journal de Crelle* (t. LVI).

Manifestaremos, para terminar, que para el estudio de ciertos problemas referentes á las curvas de que nos ocupamos, es necesario recurrir á la teoría de las formas cúbicas ternarias, cuyas doctrinas comenzaron á desarrollarse en los trabajos de Hesse sobre los puntos de inflexión, siguiendo los de Aronhold, *Journal de Crelle* (t. XXXIX, 1849); de Cayley, *Memoir upon quantics* (1856); Clebsch y Jordan, *Math. Annalen* (t. I y VI); Gordan *(Id.,* t. I); Gundelfinger *(Id.,* t. IV y V); Cayley, *Philos. Transactions*, 1861,

y *Math. Annalen*, t. V, donde se puede ver un resumen de las denominaciones y notaciones usuales, etc., y que por lo que se refiere á la aplicación de la teoría de las funciones elípticas á la Geometría sobre una curva de tercer orden, se puede ver Schubert, *Göttinger Nachrichten*, 1875, y *Math. Annalen*, t. XIII, así como la *Théorie der elliptischen Functionen*, por Koenigsberger (Leipzig, 1874).

Curvas diversas,

Además de las curvas tratadas en artículos diferentes, se conocen otras varias que, aunque de poca importancia, han recibido también especial denominación.

Tenemos así: la *acnodal,* que es toda curva provista de un punto aislado; las *afines,* cuando para dos puntos correspondientes á la misma abscisa, las ordenadas están en una relación constante (deben su nombre á Euler); las *complementarias*, lugar de los puntos complementarios de los puntos de una curva dada; las de *flechas proporcionales* ó de Kepler; las de *ecuación polar*

$$r = \frac{p}{1 + e \, . \cos n\theta},$$

llamadas de n vientres por Laboulaye; la *astática,* la *atríptica,* de Porro; las *concomitantes, convolutas, cotidales;* de *desviación*, de *dirección, periplegmáticas, polizomales*, *zízicas*, y las de Salmon, Serret, Siebeck, Talbot, Walton, etc.

D

Declinación.

Definición. — Se denomina así al arco de meridiano celeste comprendido entre el ecuador y el centro de un astro colocado sobre este meridiano.

Clasificación. —Se distingue la *positiva* ó *austral* y la *negativa* ó *boreal*, según el astro está al N. ó al S. del ecuador.

Propiedades. — Las declinaciones se cuentan de 0° á 90° y unida á la ascensión recta, forman las dos coordenadas por medio de las cuales se determina y reconoce la posición de un astro en el cielo.

— Un astro colocado en el ecuador carece ó es nula su declinación y los que están en un mismo paralelo tienen exactamente la misma declinación. La estrella polar, si estuviera precisamente en el polo celeste, tendría 90° de declinación, pero como dista 1°, 39′, su declinación es de 88°,21′.

—Las estrellas fijas no cambian sensiblemente de declinación, por permanecer á la misma distancia del ecuador, apareciendo como que cada día describen el mismo paralelo en su revolución diurna de Oriente á Occidente.

— Las declinaciones del sol, de la luna y de los planetas cambian sensiblemente todos los días.

— La declinación del sol aumenta á partir de los equinoccios hasta los solsticios y disminuye después de los solsticios hasta los equinoccios; su mayor declinación tiene por valor aproximado 23°,28′, que es la distancia de los trópicos al ecuador, tiene este valor *N.* hacia el 21 de Junio y el propio valor *S.* hacia el 21 de Diciembre.

— Un astro puede tener al propio tiempo una latitud *N.* y una declinación *S.*, ó una latitud *S.* y una declinación *N.*, lo que se verificará cuando se encuentre entre la eclíptica y el ecuador.

— La distancia de un astro á uno de los polos es el arco de círculo de declinación comprendido entre el centro del astro y el polo á que se refiera.

— Conociendo la declinación de un astro para obtener su distancia al polo superior, si la declinación del astro y la latitud del lugar son de la misma denominación, se restará de 90° la declinación del astro, la diferencia será la distancia del astro al polo superior. Si la declinación del astro y la latitud del lugar son de denominación contraria, se aumenta 90° á la declinación del astro y la suma será la distancia del astro al polo superior.

— *Declinación del plano vertical.* — Se denomina así en Gnomónica al arco de horizonte, comprendido entre el primer vertical y la sección del plano del cuadrante con el horizonte.

Deferente.

Del latino, *deferre*, llevar de arriba á abajo.

Definición. — Se denomina *deferente,* al círculo que en el sistema de Ptolomeo es descrito por el centro del epiciclo (ver esta voz) que recorre cada planeta.

Historia. — Ptolomeo, en su sistema de mundo, imaginó la combinación de los epiciclos y deferentes, para explicar las estaciones y las retrogradaciones observadas en el movimiento aparente de los planetas. (Almagesta, año 140.)

— Según este sistema, los deferentes tenían por centro el de la Tierra y ésta ocupaba el del Universo, moviéndose alrededor de ella, según el orden de sus distancias, la Luna, Mercurio, Venus, el Sol, Marte, Júpiter y Saturno.

Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno describen cada uno un círculo (epiciclo), cuyo centro recorre uniformemente un segundo círculo (deferente) que tiene por centro el centro de la Tierra.

El radio vector que une Mercurio al centro de su epiciclo, está dirigido constantemente hacia el Sol y lo propio sucede para Venus. Para Marte, Júpiter y Saturno, el radio vector dirigido desde el planeta al centro de su epiciclo, es siempre paralelo á la recta que une el centro del Sol al centro de la Tierra.

Aplicaciones. — El descubrimiento del verdadero sistema del universo, vino á hacer inútil la consideración de los deferentes y epiciclos, cuya invención, sin embargo, no puede menos de considerarse en extremo ingeniosa.

Derivadas.

Definición. — Si desde un punto fijo se bajan perpendiculares á las diferentes tangentes de una curva dada, el lugar geométrico de los pies de estas perpendiculares da una curva derivada.

Historia. — Estas curvas han recibido este particular nombre por Mr. Roberts, que las estudia en el *Journal de Liouville* (T. X, página 177); pero son verdaderas curvas *podares*. (Ver esta voz). También las estudia bajo este nombre Mr. Bellacitis.

Clasificación y propiedades. — Si r y w son las coordenadas polares de un punto de la curva dada, y r_1, w_1 las del punto correspondiente de la derivada, será:

$$r\frac{d\omega}{dr} = r_1\frac{d\omega_1}{dr_1}.$$

— Si se hace derivar de una curva dada cualquiera una serie de curvas, todas se sucederán según la misma ley, y la fórmula para rectificar una cualquiera de las curvas de esta serie será; siendo r y w coordenadas de un punto cualquiera de la curva dada ó *primitiva*; r_n y w_n las de la curva que ocupa el rango enumerado en la serie de las derivadas, y por s_n el arco,

$$ds_n = \frac{nr\frac{d^2\omega}{dr^2} + (n+1)\frac{d\omega}{dr} - r^2\frac{d\omega^3}{dr^3}}{\left(1 + r^2\frac{d\omega^2}{dr^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}}\left(r\frac{d\omega}{dr}\right)^{n-1} r\,dr \quad (a)$$

Las curvas así construídas se nombran *positivas*.

— Considerando una curva que sea constantemente tocada por las perpendiculares dirigidas á los extremos de los radios vectores de otra curva dada, y suponiendo que de esta nueva curva se hace derivar una tercera por un método semejante de generación y así al infinito; la longitud de una cualquiera de las curvas de esta serie se obtendrá por la fórmula

$$ds = \frac{-nr_n\frac{d^2\omega_n}{dr_n^2} - (n-1)\frac{d\omega_n}{dr_n} - r_n^2\frac{d^3\omega_n}{dr_n^3}}{\left(r_n\frac{d\omega_n}{dr_n}\right)^{n+1}}\left(1 + r_n^2\frac{d\omega_n^2}{dr_n^2}\right)^{\frac{n-1}{2}} r_n dr_n,$$

y si se compara esta fórmula con la (a), se ve basta cambiar el signo de n.

Las curvas así construídas se llaman *negativas*.

Desimantación.

Definición é historia. — Mr. Gangain, *Annales de Chimie et de Physique* (4.ª serie, t. XXVIII, pág. 324; 5.ª série t. VIII, pág. 289, y t. XI, pág. 5, 1873, 1877), para estudiar por el método de Van Rees *Pogg. Ann.*, t. LXX, la distribución del magnetismo en una barra imantada de una manera permanente, sigue dos caminos distintos, uno de los cuales se reduce á medir en cada punto la intensidad longitudinal media de imantación y construir curvas cuyas abscisas representan las distancias de este punto al medio de la barra, y las ordenadas, la cantidad de corriente inducida, á cuyas curvas da Gangain el nombre de curvas de *desimantación*.

— Estas curvas no son otras que las de intensidad. (Ver esta voz).

Día.

Definición. — Se nombra *curva de un día* á la Zodiacal que corresponde al día que se considera. (Ver *Zodiacales*).

Diablo (Curva del).

Definición. — Denominación dada á la curva representada por la ecuación.

$$y^4 - x^4 - 96\,a^2y^2 + 100a^2x^2 = 0.$$

Forma. — Resolviendo esta ecuación se tiene

$$y = \pm\sqrt{48a^2 \pm \sqrt{2304\,.\,a^4 - 100\,.\,a^2x^2 + x^4}},$$

y si para abreviar se hace

$$\sqrt{2304\,.\,a^4 - 100\,.\,a^2x^2 + x^4} = N,$$

se tendrán los cuatro valores:

$$y = \sqrt{48a^2 + \sqrt{N}} \qquad y = \sqrt{48a^2 - \sqrt{N}}$$
$$y = -\sqrt{48a^2 + \sqrt{N}} \qquad y = -\sqrt{48a^2 - \sqrt{N}},$$

que examinados, nos dan para

$$x = 0 \qquad x = 6a \qquad x = 8a,$$

los valores

$$y = 0 \qquad y = -\sqrt{48\,a^2} \qquad y = \sqrt{48\,a^2},$$

y para valores de x, comprendidos entre $x = 6a$ y $x = 8a$, los puntos de la curva son imaginarios. —Así, pues, la curva tiene la for-

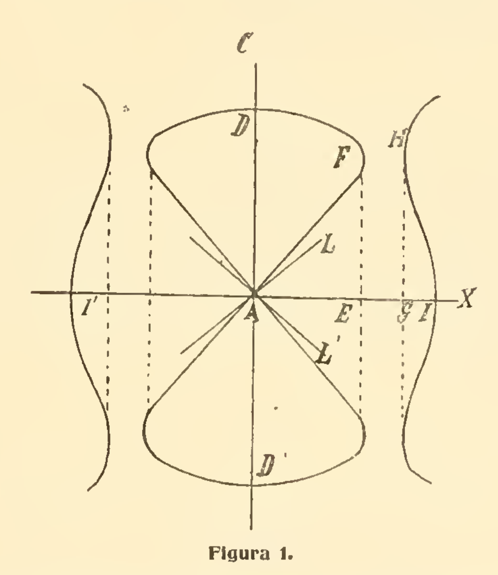


Figura 1.

ma indicada en la figura, y en la cual $AE = 6a$ y $AG = 8a$, y en que AI está determinada por el valor

$$(48a^2)^2 = 2304a^4 - 100 \,.\, a^2x^2 + x^4,$$

que se reduce á

$$x^4 - 100 \,.\, a^2x^2 = 0,$$

de donde se tiene

$$x = 0 \quad \text{y} \quad x = \pm 10 \,.\, a.$$

La abscisa $x = 0$ nos da el punto A y la $x = \pm 10 \,.\, a$ nos determinan los dos puntos I é I'.

Estos puntos y los D y D', se pueden obtener haciendo $y = 0$ ó $x = 0$ en la ecuación general, puesto que son aquellos en que la curva corta á los ejes.

— En el punto A la curva es tocada por dos rectas AL y AL', que forman con el eje de las abscisas dos ángulos, cuyas tangentes trigonométricas son

$$\sqrt{\frac{50}{48}} = \frac{5}{4}\sqrt{\frac{2}{3}} \qquad -\sqrt{\frac{50}{48}} = -\frac{5}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

— Las asíntotas tienen por expresión

$$y = \pm \alpha.$$

— Con todas estas circunstancias, fácil es comprobar que la curva afecta la forma indicada en la figura.

— Para más detalles sobre el estudio de esta línea se pueden ver *Geométrie Analytique*, de M. M. Briot y Bouquet (2.ª edición, página 197); *Traité Elementaire de Calcul Differentiel*, de S. F. Lacroix, pág. 144, 1820. — Mr. Dupain, *Nouvelles Annales*, t. XVII, página 317, etc.

Diacáustica.

Del griego διακαυστικός.

Definición, — Curva cáustica (ver esta voz) producida por la refracción.

Ecuación y construcción.—Esta curva es análoga á la catacáustica (ver esta voz) y su ecuación y construcción se hace del propio modo que ésta, teniendo solamente en cuenta la diferencia de las leyes de la reflexión á las de la refracción.

Casos particulares. — La diacáustica de una recta es una cónica.
— La de un círculo es la evoluta de un óvalo de Descartes.
— Las catacáusticas y diacáusticas se han denominado también *cáusticas catóptricas* y *cáusticas dióptricas*. (*Walter de Tchiznhawsen. Acta. Erud.* 1682).

Diagrama.

Del griego διά, por en medio, y γράμμα, escrito.

Definición. — En Geometría se llama así á la construcción de las líneas de que se hace uso para demostrar una proposición.

—En Mecánica se da especialmente el nombre de diagrama á las curvas relevadas por medio del indicador de Watt que representan la ley de la variación de la presión durante un doble curso del pistón, y por consiguiente el trabajo efectivo del vapor en los cilindros.

Forma y aplicaciones. — En una experiencia preliminar y antes de colocar el indicador sobre el cilindro de la máquina, se hace mover

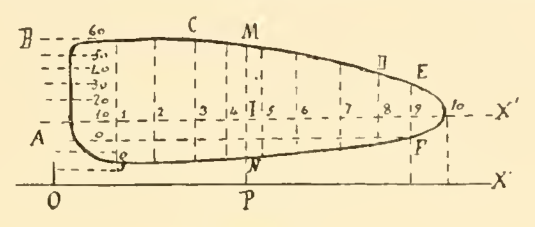


Figura 1.

el tambor del indicador y su lápiz trazará la recta horizontal OX (figura 1) que responde á una presión nula, puesto que la presión atmosférica obra ahora sobre las dos caras del pistón. Aquí se ha trazado luego la recta AX' que responde á una presión atmosférica. Sea MP la ordenada de un punto cualquiera de la curva con relación á OX, la cual ordenada encuentra en I á la horizontal AX'. La relación de MP á IP expresará la de la presión del vapor en el cilindro á la presión atmosférica, para la posición del pistón que corresponda á la fracción del curso señalado por la relación de OP á OX.

— Examinando este diagrama y siendo el punto de partida aquel que corresponde al momento en que el pistón está en el extremo de su curso, se ve, que la admisión del vapor se hace de A á B, la porción BC próximamente horizontal indica que la presión del vapor es constante sobre el pistón, por lo menos en el tercio de su curso; disminuye rápidamente hasta que en E finaliza el curso del pistón; llegado á este extremo, el pistón recibe todavía una presión un poco mayor que la de la atmósfera, porque el punto E se encuentra por encima de la línea AX'; la porción EF de la curva indica que la presión que se opone á la marcha retrógrada permanece mayor que

la de la atmósfera durante la novena y la octava de su curso; en el punto G la curva empieza á elevarse rápidamente por ser introducido el vapor en esta posición extrema.

—Este diagrama permite también calcular el trabajo correspondiente á un curso del pistón. En efecto, puesto que la ordenada MP expresa la presión, y la abscisa OP el camino recorrido, el trabajo del vapor sobre el pistón durante un curso está representado por el área $OBCEXO$; pero, por una razón semejante, el trabajo ejercido sobre la misma cara del pistón en el curso siguiente, está expresado por el arco $OAGNEXO$; por consiguiente, el trabajo desarrollado en definitiva sobre el pistón durante un curso es la diferencia de los dos anteriores, es decir, que está expresado por el área comprendida en la curva cerrada que forma el diagrama, área que se puede determinar analíticamente ó por medio de los intégrafos, ó también dividiéndole por líneas equidistantes perpendiculares á AX; se toman las longitudes de las ordenadas que corresponden á las de la escala del instrumento, se hace la suma y se divide esta suma por el número de las ordenadas; se tiene así la presión media por centímetro cuadrado de la superficie del pistón; se determina lo mismo la presión media en sentido opuesto y se restan las dos medias, lo que nos da la presión media efectiva buscada $P = p - p_1$. Esta, multiplicada por la superficie del pistón nos da la presión total real del vapor $P_1 = P \pi r^2$; esta nueva presión, multiplicada por la velocidad del pistón en metros por segundo, expresa el trabajo efectivo durante el curso entero y ésta dividida por 75 nos da el número de caballos de vapor:

$$F = \frac{P \pi r^2 . V}{75}.$$

El indicador de Watt es el empleado por la mayoría de los experimentadores que estudian los efectos del vapor en las máquinas. Mr. Morin ha propuesto otro aparato, en el cual las presiones están expresadas por las flexiones de una lámina elástica, *Leçons de Mécanique practique*, T. I; pero siendo más cómodo el primero, es el que más se utiliza.

— Se pueden encontrar tambien ejemplos de diagramas en los dinamómetros de estilo y de tracción, en la máquina de indicaciones continuas ó aparatos de Morin para demostrar experimentalmente las leyes de la caída de los graves etc.

Diagrama de Zeuner. — Convenciones.— Supongamos que se trata

de una máquina horizontal de ataque directo; que el eje de la varilla del pistón pasa por el centro del árbol; que la corredera de distribución está dirigida por una excéntrica circular siendo r el radio de la excéntrica, más pequeño que el radio R de la manivela; que la biela ó varilla de la excéntrica, de longitud l, muy grande con relación á r, dirige un punto de la corredera que se mueve según una recta coincidente con el eje de la varilla del pistón; que el radio de la excéntrica está calado en avance de la manivela en un ángulo $\frac{\pi}{2} + \delta$. Se llamará *avance angular* ó *ángulo de avance* el ángulo δ. Se medirá el camino descrito por el tirador ó por el punto considerado en él, tomando por origen la posición media de este punto, es decir, la que se encuentra á igual distancia de las posiciones extremas y que se puede obtener tomando sobre el eje del movimiento del punto considerado, á partir del centro del árbol, una longitud igual á l. Este camino lo representaremos por x. La distancia del tirador á su posición media, ó sea el momento en que la manivela pasa por uno de los puntos muertos ó por $\omega = 0$ y $\omega = \pi$, recibe el nombre de *avance linear* y le representaremos por A.

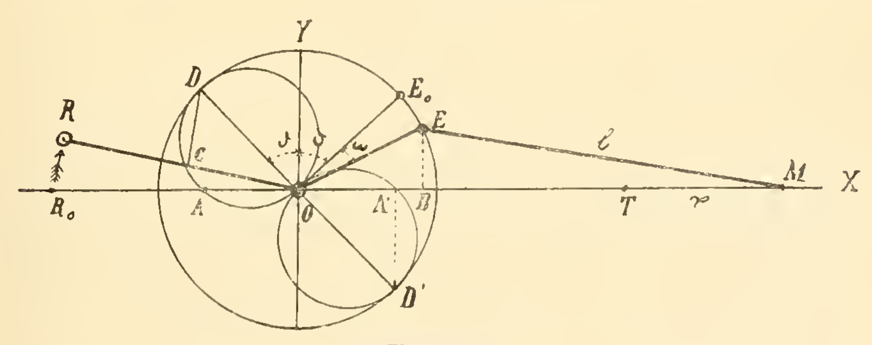


Figura 2.

Supuesto esto, si se nos da el ángulo ω descrito por la manivela á partir de un punto muerto, así como las cantidades $OE = r$, $EM = l$ y $OT = l$ (fig. 2) y se quiere determinar el camino x descrito por el tirador á partir de su posición media T, siendo $TM = x$, R_0O y E_0O las posiciones iniciales de la manivela y de la excéntrica respectivamente, $E_0Oy = \delta$; $R_0OR = \omega$ y $E_0OE = \omega'$; se tendrá:

$$x = r \,.\, \text{sen}\,(\delta + \omega) - l\left[1 - \frac{1}{l}\sqrt{l^2 - r^2\cos^2(\delta + \omega)}\right];$$

llamemos x la distancia del tirador á su posición media, considerada como positiva, pero tomada á la izquierda, y ahora ω' se contará á partir del segundo punto muerto. De consiguiente:

$$x' = r \,.\, \text{sen}\,(\delta + \omega') + l\left[1 - \frac{1}{l}\sqrt{l^2 - r^2 \cos^2(\delta + \omega')}\right].$$

Los avances lineares A y A' tendrán por valores:

$$\omega = 0, \quad A = r\,\text{sen}\,\delta - l\left[1 - \frac{1}{l}\sqrt{l^2 + r^2\cos^2\delta}\right]$$

$$\omega = \pi \quad A' = r\,\text{sen}\,\delta + l\left[1 - \frac{1}{l}\sqrt{l^2 - r^2\cos^2\delta}\right].$$

A causa de la pequeñez que de ordinario tiene la relación $r : l$; el segundo término de estas relaciones se puede despreciar. En general, se adoptan las fórmulas aproximadas:

$$x = r \,.\, \text{sen}\,(\delta + \omega)$$

$$x' = r \,.\, \text{sen}\,(\delta + \omega')$$

$$A = A' = r \,.\, \text{sen}\,.\,\delta,$$

y al diagrama polar de los valores de x y x' es al que se conoce con el nombre de *diagrama de Zeuner*.

Trazado. — Tomemos sobre la dirección OR de la manivela una longitud $OC = x$, el lugar de los puntos C será el diagrama buscado. Es este una especie de 8 cuyo eje mayor es igual á $2r$.

Si se desecha la oblicuidad de la biela de la excéntrica, se tiene $OC = r$ sen $(\delta + \omega)$. Y si se hace $DOY = \delta$, será

$$COD = \frac{\pi}{2} - (\delta + w)$$

y, por consiguiente, sen. $(\delta + \omega) =$ cos. COD. Será, por tanto,

$$OC = OD \,.\, \cos \,.\, COD;$$

luego, si se traza la recta DC, el ángulo $DOC = \dfrac{\pi}{2}$ y, por consi-

guiente, el punto C está sobre una circunferencia de círculo, de la cual r es el diámetro y cuyo centro está colocado sobre una recta que forma con la vertical $O\,Y$ un ángulo δ de lado opuesto á la posición inicial del radio de la excéntrica. Y el lugar completo del punto C, en lugar de ser un 8, está compuesto de dos circunferencias iguales OAD y $OA'D'$, las cuales se nombran *círculos de Zeuner* y son exactamente el diagrama polar de las distancias de la proyección B del punto E sobre la recta OX en su posición media O. También se denominan estos dos círculos, *círculos del tirador*, siendo $O\,A\,D$ el *círculo superior* ó círculo de las x y $O\,A'\,D'$, el *círculo inferior* ó círculo de las x'.

Si ahora se coloca un lápiz en el extremo M de la biela de la excéntrica perpendicularmente al plano de la figura, si se hace girar al lado de este lápiz y en un plano paralelo al de la figura un trozo de cartón, alrededor de la posición media T del punto M con una velocidad angular constantemente igual á la de la manivela OR, el lápiz trazará sobre el papel el diagrama polar en forma de 8, el que se acercará á ser dos círculos, cuanto el tirador de la varilla de la excéntrica sea mayor comparativamente al radio de la excentricidad.

Este aparato es de los preciosos para la verificación de los diferentes sistemas de distribución, y examinando el diagrama así obtenido, se pueden estudiar todas las particularidades del movimiento.

Diagrama eléctrico. — (Ver equipotenciales).

Diagrama termoeléctrico. — Curva que representa los fenómenos termoeléctricos. Si una de las soldaduras se mantiene á 0°, se pueden tomar por abscisas las temperaturas sucesivas de la otra soldadura y por ordenadas las fuerzas electromotrices correspondientes. Se obtiene así una parábola de eje vertical que corta de nuevo al eje de las x á la temperatura de inversión. La misma curva representa los fenómenos obtenidos elevando la soldadura fria á una temperatura t diferente de 0°, á condición de tomar para eje de las x una paralela al primer eje trazada por el punto de la curva que corresponde á t^0. Esto es una consecuencia de la ley de temperaturas sucesivas. Se ve que la temperatura del máximo es siempre la media entre la temperatura de la soldadura fría y la temperatura de inversión. Finalmente, si se construye la curva de los dos metales AB, y la de los dos metales AC, la diferencia entre las dos ordenadas da la fuerza electromotriz del par BC, según la ley de los metales intermedios.

Diametrales.

Definición. — Reciben este nombre las líneas que pasan por los puntos medios de un sistema de cuerdas paralelas de una curva dada.

Historia. — Newton llama diámetros de una curva, relativamente á una dirección dada, el lugar de los puntos cuyas coordenadas tienen por valores los medios aritméticos de las coordenadas de los puntos de encuentro de la curva con una transversal móvil paralela á la dirección dada, ó el lugar de los centros de las medias distancias de los puntos de interseccióu de la curva con la secante móvil. Estos lugares, que son todos rectilíneos si se trata de curvas de segundo grado, se confunden con los lugares de las medias armónicas imaginadas por Mr. Poncelet.

Propiedades. — La forma de las líneas diametrales y el grado de las ecuaciones que la representen, depende siempre de la forma y el grado de la ecuación de aquélla.

Si una curva es de grado m, su línea diametral será del grado $\frac{m(m-1)}{1.2}$. Así, pues, sólo en el caso de las líneas de segundo grado resultan las líneas diametrales de un grado inferior al de aquéllas; cuando se supone $m = 3$, el grado de unas y de otras es el mismo, y en los demás casos las líneas diametrales son de un grado superior al de las curvas á que pertenecen.

— Si se consideran una curva U y la curva diametral V, lugar de los medios de las cuerdas paralelas á una recta fija Δ; se verifican las siguientes circunstancias:

1.° V pasa por los puntos de contacto de las rectas Δ' que son paralelas á Δ y tangentes á U.

2.° V es tangente á las rectas Δ', en $m-2$ puntos, si m es el grado de U.

3.° A una vuelta ó lazo de la curva U corresponde otra en la V, cuya superficie es la mitad menor.

4.° Si U posee un punto doble en P, V pasa por este punto y la tangente á V es la rama conjugada de la dirección Δ, con respecto á las tangentes á U, en el punto P.

5.° Si P es un punto de retroceso, V pasa por el punto P, tangencialmente á U y posee $(m-2)$ puntos de retroceso sobre la paralela á Δ dirigida por P.

— Si una cúbica admite un centro, este punto es un punto de infle-

xión de la curva: é igualmente lo es este centro y este punto de inflexión para todas sus curvas diametrales.

Casos particulares. — Si

$$y = x\sqrt{\frac{x + a}{a - x}}$$

es la ecuación de una estrofoide, la diametral de las cuerdas paralelas al eje de esta curva, tiene por ecuación,

$$y^2 = -x\,\frac{(a + 2x)^2}{a + x}.$$

— Si

$$y^2 x = 1$$

es la ecuación de una cúbica, la diametral de las cuerdas que son paralelas á la dirección cuyo coeficiente angular es m, tiene por ecuación

$$y\,(y + mx)^2 + \frac{m}{2} = 0.$$

— Las diametrales de las cónicas son líneas rectas (*diámetros*). En las cónicas que tienen centro, todos los diámetros pasan por este punto. En la parábola todos los diámetros son paralelos, su dirección uniforme es la *dirección asintótica de la parábola.*

— Son diámetros *singulares* los que corresponden á las direcciones asintóticas de la ecuación general de las cónicas.

— Dos diámetros son *conjugados* cuando cada uno de ellos biseca las cuerdas paralelas al otro. Los diámetros perpendiculares á sus cuerdas son los *ejes.*

— Los diámetros de la elipse y de la hipérbola gozan de las propiedades notables debidas á Apollonius y que son *la suma en la elipse y la diferencia en la hipérbola de los cuadrados de dos semidiámetros conjugados es constante. El paralelogramo construído sobre dos diámetros conjugados es constante.*

Sobre otras clases de curvas diametrales. — Hay otras líneas diametrales que se definen diciendo que son el lugar geométrico de los centros de distancias medias de un sistema de cuerdas paralelas; pero aunque éstas son en general más sencillas que las anteriores, presentan dificultades de construcción por lo que no son usadas.

— Asimismo se puede considerar la diametral lugar de los puntos medios de las cuerdas que pasan por un punto tomado sobre una curva.

Para hallar su ecuación consideremos sea V la curva y $f(x, y, z) = 0$ su ecuación, y sean x_1, y_1, z_1 las coordenadas del punto M, del cual se trazan las cuerdas cuyos puntos medios I, I'..... pertenecen al lugar buscado.

Llamando x_0, y_0, z_0 las coordenadas de uno de los puntos I, la intersección de U con la recta MI se determinará resolviendo la ecuación:

$$f(x_0 + \lambda x_1, \quad y_0 + \lambda y_1, \quad z_0 + \lambda z_1) = 0,$$

que, desenvuelta por la fórmula de Taylor, se puede escribir:

$$f(x_0, y_0, z_0) + \lambda (x_1 f'_{x_0} + y_1 f'_{y_0} + z_1 f'_{z_0}) + \ldots\ldots + \lambda^m f(x_1, y_1, z_1) = 0$$

y expresando que la ecuación inversa

$$\frac{1}{\lambda^m} f(x_0, y_0, z_0) + \frac{1}{\lambda^{m-1}} (x_1 f'_{x_0} + y_1 f'_{y_0} + z_1 f'_{z_0}) + \ldots\ldots + f(x_1, y_1, z_1) = 0,$$

tiene dos raíces particulares, cuya suma es igual á $-z$, se obtiene una relación del grado $\frac{m(m-1)}{2}$ que representa la ecuación del lugar geométrico pedido.

Diámetro.

Definición. — Se da en Hidráulica el nombre de curva de los *diámetros* al perfil que en ciertos casos conviene dar á las paredes de un tubo de conducción para obtener un gasto en condiciones determinadas.

Propiedades y casos particulares. — Entre esta línea y la de carga existe cierta relación importante, á saber: si la línea de carga (ver esta voz) está dada por su ecuación $y = F(x)$, la curva de los diámetros será:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\gamma Q^2}{L^2} \cdot \frac{x^2}{d^5}, \qquad (1)$$

ecuación en la cual se deberá poner por $\frac{dy}{dx}$ su valor deducido

de $y = F(x)$ y en la que el diámetro d será considerado como variable; si por el contrario, la curva de los diámetros está dada por la ecuación $d=f(x)$, la línea de carga se deducirá de la integración de la ecuación (1), después de poner en lugar de d su valor en función de x.

— El diámetro del conducto de gasto uniforme, debe seguir las ordenadas de una parábola de tercer grado para dar el mínimum de pérdida.

—Comparando entre sí los diferentes sistemas de diámetros, se obtienen, entre otras, las siguientes conclusiones:

Cuando se tiene un producto Q de gasto uniforme á lo largo de un conducto con una pérdida de carga H si se llama Δ el diámetro constante dado por la expresión

$$\sqrt[5]{\frac{\gamma Q^2}{H}},$$

necesario para obtener este producto al extremo, los diferentes sistemas de conductos, á los que se puede recurrir, reúnen las siguientes circunstancias:

El diámetro constante que satisface á esta condición es 0,80 Δ. En este caso la curva de presión es una parábola de tercer grado muy aplastada en su vértice; la pérdida de carga se verifica toda cerca del depósito.

Si se quiere recurrir á una variación de diámetro, es necesario, para obtener el mínimun de pérdida, hacerle decrecer según las ordenadas de una parábola de tercer grado. El diámetro, en el origen del conducto, será 0,944 Δ, y el medio, para 0,708 Δ. En este caso, la curva de presión es una parábola del grado $\frac{4}{3}$ que se separa poco de una línea recta que expresa la pérdida de carga uniforme.

El conducto de diámetro variable, que nos da esta línea recta para línea de carga, se encuentra determinado por una parábola del grado $\frac{5}{2}$. El mayor diámetro es Δ, y el diámetro medio 0,714 . Δ.

— En un tubo cónico, el mínimum de pérdida es dado por el diámetro 1,02 Δ en el origen, y 0,42 . Δ en su extremo; el diámetro medio proporcional á la pérdida media será 0.72 . Δ.

La curva de presión es horizontal por encima del diámetro menor y tiene una asíntota horizontal, suponiendo el cono prolongado del

lado de su mayor diámetro, de manera que tiene un punto de inflexión intermedio.

Si se hace variar el diámetro como las ordenadas de una parábola de segundo grado, se tiene para diámetro en el origen 1,15 Δ, y para diámetro medio 0,77 . Δ.

En este caso la curva de presión es una parábola de segundo grado, cóncava hacia el tubo, y, por consiguiente, está por encima de la línea que expresa la pérdida de carga uniforme.

— Cuando se trata de un conducto que deba gastar Q en su trayecto y P en su extremo, que es el caso más ordinario en las aplicaciones, el diámetro más económico estará también dado por la parábola de tercer grado; pero si el producto P en el extremo es muy considerable, sólo se utiliza la porción de esta parábola alejada del origen, es decir, aquella cuyo diámetro es casi constante.

— Cuando se tiene una serie de tubos, será fácil determinar por medio de cálculos análogos, las longitudes que se deberán emplear de cada uno de ellos para obtener el mínimum de pérdida, y cuando en la práctica se quieran hacer decrecer los diámetros, las curvas de que hemos dado cuenta serán suficientes para servir de tipo al sistema de decrecimientos.

Didonia.

Es la curva que sobre una superficie dada comprende dentro de un perímetro dado la mayor área.

Su ecuación, expresada en quaterniones, siendo C una constante, es

$$\int SVv \,.\, d\rho \,.\, \partial\rho + C\partial \int T \,.\, d\rho = 0.$$

—Esta línea ha sido estudiada por Delaunay, y puede consultarse el *Traité des Quaternions* de Tait.

Diferencia ascensional.

Definición. — Se da este nombre al arco de ecuador comprendido entre el círculo de declinación que pasa por el centro de un astro, y el punto del ecuador que se eleva al mismo tiempo que el astro.

Propiedades. — La *diferencia ascensional*, es la diferencia entre la ascensión (ver esta voz) recta y la ascensión oblicua de un astro.

— La diferencia ascensional del sol está medida por la distancia del círculo de declinación que pasa por el centro del astro al meridiano

de las 6^h contada sobre el ecuador, ó el intervalo de tiempo comprendido entre las 6^h de la mañana y el momento de su salida, ó entre las 6^h de la tarde y el momento de su puesta.

—En la época de los equinoccios, la diferencia ascensional del sol es nula, puesto que entonces el sol carece de declinación.

Diferencial.

Ver Integral.

Dioclea.

Nombre dado por Barrow á la *cisoide* (ver esta voz) *de Diocles*.

Directriz.

Del bajo latín *directrix*.

Definición. — Se da este nombre á la línea recta ó curva, á lo largo de la cual se supone que se mueve otra, en la generación de una superficie.

Propiedades. — Si la generatriz es recta, la superficie queda determinada por tres directrices.

— El cilindro y el cono se definen por una sola directriz, puesto que su generatriz se encuentra sujeta á dos condiciones analíticas.

— Las directrices de una superficie ilimitada en todos sentidos, se pueden reducir á dimensiones tan pequeñas como se quieran, sin que esta superficie cese de estar comprendida en su definición.

— Toda superficie obtenida por medio de una generatriz y de un sistema cualquiera de directrices, se pueden siempre concebir nuevos sistemas de directrices y generatrices que la engendren, es decir, que toda superficie curva puede ser engendrada de maneras distintas.

— Las ecuaciones que expresan las condiciones de encuentro entre la generatriz y una de sus directrices, no obligan á que estas dos líneas se corten real y efectivamente, si bien sujeta sus ecuaciones á tener una solución común, que deberá ser imaginaria cuando la generatriz salga de los limites infinitamente pequeños de la directriz.

Aplicaciones. — La determinación y conocimiento de las directrices de cada especie son absolutamente necesarias para el estudio de estas mismas superficies y para la deducción de su ecuación respectiva.

— Como ejemplo exponemos el medio para determinar la ecuación de la superficie cilíndrica. Es ésta la engendrada por una recta que se mueve paralelamente á sí misma y recorre una curva dada. El cilindro queda determinado conociendo la directriz y la dirección de la generatriz.

— Representando por

$$f(x, z) = 0 \qquad f_1(y, z) = 0,$$

las ecuaciones de la directriz, y llamando x', y', z' á las coordenadas de uno cualquiera de sus puntos, se tendrá

$$f(x', z') = 0 \qquad f_1(y', z') = 0.$$

Las ecuaciones de la generatriz, que pasa por el punto (x', y', z') de la directriz son:

$$x - x' = a(z - z') \qquad y - y' = b(z - z').$$

Eliminando entre estas cuatro ecuaciones las tres variables x', y', z', la ecuación final que resulta

$$\rho(x, y, z) = 0,$$

será la relación entre las coordenadas de un punto cualquiera de una generatriz cualquiera, y por lo tanto, dicha ecuación es la de la superficie

— Si la directriz está en el plano de las xy,

$$f(x, y) = 0; \qquad z = 0$$

serán las ecuaciones de dicha directriz; x', y', 0 las coordenadas de un punto cualquiera M de esta curva y se tendrá la relación

$$f(x', y') = 0.$$

Las ecuaciones de la generatriz que pasa por el punto $(x', y', 0)$ de la directriz, serán

$$x - x' = az \qquad y - y' = bz.$$

Eliminando las variables x', y' entre estas tres ecuaciones, resulta

$$f(x - az, \quad y - bz) = 0,$$

ecuación de la superficie cilíndrica.

— En la teoría de polares recíprocas (ver esta voz), Poncelet llama *curva directriz* á la cónica que les sirve de intermedia á dos curvas de esta especie que pertenecen á un mismo sistema.

— Los sistemas de fuerzas, considerados en la Estática, cuando son independientes de toda medida, son idénticos á los sistemas focales, cuyo estudio hace la Geometría de posición; y del propio modo que un sistema focal está determinado por una curva de tercer grado, un sistema de fuerzas estará determinado por una curva semejante á la que se designa con el nombre de *directriz* del sistema.

— La construcción de esta línea es de importancia, pues puede en la práctica prestar grandes servicios. Se puede consultar la obra de Standt, *Beiträge* y la de C. Culmann, *Traité de Statique Graphique.*

Dirimantes.

Ver (Cáusticas y Anticáusticas).

Distancia aparente.

Definición. — Se llama *distancia aparente* de dos astros al arco de círculo máximo de la esfera celeste comprendido entre los centros de dichos astros.

Distancia polar.

Definición. — Se da este nombre al arco de meridiano celeste comprendido entre el centro de un astro y el polo boreal.

— Esta distancia se cuenta á partir del polo de 0° á 180°.

Distribución.

Definición. — En Física se llama línea de *distribución* á la que representa gráficamente el modo de estar distribuido el magnetismo sobre un imán de forma dada; correspondiendo sus abscisas á las distancias al centro, si se trata de una aguja imanada, por ejemplo, y representando sus ordenadas las cantidades de magnetismo libre de la barra referida á la unidad de longitud ó sean las densidades magnéticas lineales.

También se las suele distinguir con el nombre de *curvas de las componentes normales.*

Ecuación. — Si se tiene una aguja imanada cilíndrica cuya longitud sea $2\,l$ y su diámetro a, siendo éste muy delgado con relación á aquélla, esta barra adquirirá, sujeta á la acción longitudinal de un campo magnético de intensidad F, en un punto situado á la distancia x del medio del cilindro una densidad ρ, cuyo valor será, según Green: *An essay on the application of mathematical Analysis to the theories of Electricity and magnetism.* (Nottinghan, 1828):

$$\rho = \frac{1}{2}\,KFpa\,\frac{e^{\frac{px}{a}} - e^{-\frac{px}{a}}}{e^{\frac{pl}{a}} - e^{-\frac{pl}{a}}}, \qquad (1)$$

y haciendo

$$y = 2\pi\rho,$$

siendo y la cantidad de magnetismo libre de la barra referida á la unidad de longitud á la distancia x del centro.

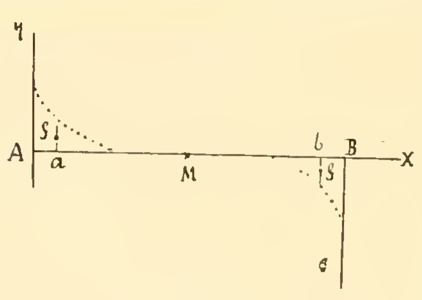


Figura 1.

Tomando x é y como abscisas y ordenadas, se tendrá la curva de la *distribución* (fig. 1.ª).

—Estas curvas han sido obtenidas por Coulomb para los imanes cilíndricos y Biot ha demostrado que pueden ser representadas por la ecuación

$$y = A\,(\mu^x + \mu^{l-x}),$$

en la que l representa la longitud de la barra, A y μ dos constantes, y las abscisas x se cuentan á partir de una de las extremidades.

Propiedades. — Las densidades magnéticas lineales son iguales y de signos contrarios para dos valores de x iguales y contrarios, es decir, para dos puntos de la barra simétricos con relación á su punto medio.

— Se puede obtener una aproximación, reemplazando la curva por una recta. Coulomb dividía los imanes en dos categorías: los imanes largos, cuya longitud era superior á 50 veces su diámetro, y los imanes cortos, cuya longitud era inferior á este límite. Para estos últimos se representa sensiblemente el magnetismo por una recta que forma con la barra NS (fig. 2.ª) un ángulo constante, y para los primeros se representa la distribución por los triángulos (fig. 3.ª) que tienen las mismas dimensiones que para un imán cuya longitud fuese exactamente igual á 50 diámetros. Su base es, pues, igual á 25 veces el diámetro. En el espacio intermedio hay sólo una cantidad de magnetismo que puede despreciarse.

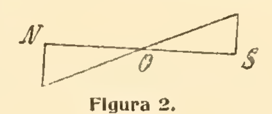


Figura 2.

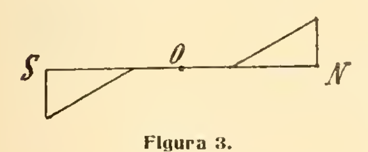


Figura 3.

—Si las curvas precedentes representasen exactamente la distribución del magnetismo, se encontraría la posición exacta de los polos, porque siendo proporcional en cada masa la acción de un campo uniforme á la magnitud de esta masa, las ordenadas representarían la acción de este campo. Bastaría, por tanto, componer fuerzas paralelas cuyas magnitudes estuviesen figuradas por estas ordenadas. El punto de aplicación de la resultante de estas fuerzas se obtendría proyectando sobre la barra el centro de gravedad de la curva ó del área triangular. Según las figuras (2) y (3), los polos se encontrarían en los imanes cortos á un sexto de su longitud, á contar desde la extremidad; en los imanes largos estarían á una distancia de la extremidad fija é igual, próximamente, á 8 veces el diámetro. Como estas curvas sólo representan las componentes normales, no se obtiene, sino aproximadamente por ellas, la posición de los polos (Lefevre).

—Para el hierro y el acero, K es en general muy grande para que en la fórmula (1) pueda ser desechada $\frac{1}{2}\,p$, y por consiguiente, la cantidad de magnetismo libre sobre las bases del cilindro. En este caso, los polos G G' de la barra corresponden á las proyecciones a, b

de los centros (fig. 1.ª) de gravedad de las curvas terminales. (Ver esta voz).

— Si se admite esta manera de distribución, el momento magnético de la aguja es:

$$M = \int_{-l}^{+l} xydx = KFp\pi a^2 \left(2l - \frac{2a}{p} \frac{e^{\frac{p}{a}l} - e^{-\frac{p}{a}l}}{e^{\frac{p}{a}l} + e^{-\frac{p}{a}l}}\right),$$

fórmula que, en realidad, no contiene más que una sola constante característica, el coeficiente K, puesto que p es asimismo una función de K.

— Mr. Bouty, *Annales de l'Ecole Normale* (2.ª serie, t. IV, página 9, 1875), ha seguido un método indirecto, fundado en las mismas fórmulas anteriores, para verificar la fórmula (1) relativa á la distribución del magnetismo.

Diurno.

Se distinguen el *arco* y el *círculo* de este nombre.

Arco diurno. — *Definición.* — Arco descrito por un astro sobre la esfera celeste desde el momento de su salida al de su puesta. (Ver *semidiurno.*)

Círculo diurno. — *Definición.* — Se da este nombre al círculo paralelo al ecuador, sobre el cual un astro parece se mueve por virtud de un movimiento diurno.

Divisoria.

Definición. — Se distinguen en Topografía con este nombre á una especie particular de curva de máxima pendiente (ver esta voz), la cual forma las líneas más elevadas entre las dos vertientes de un terreno.

Clasificación. — Aquella divisoria que pasa por la cima y depresiones de una cordillera es una *divisoria de primer orden* que correrá entre los grandes ríos que van á afluir al mar; á estos ríos van á verter sus aguas los de segundo orden, entre cada dos de los cuales hay una *divisoria de segundo orden.* Los ríos de este orden reciben á su vez las aguas de los de tercero, los cuales tienen su correspondiente divisoria; y así continuando hasta un número infinito de estos órdenes, los últimos de los cuales están constituídos por pequeñas

corrientes que forman las aguas pluviales en las más pequeñas quebradas del terreno.

Propiedades. — No se puede recorrer camino alguno normalmente á una divisoria sin verse obligado á descender.

— Las dos vertientes *V*, *V'* de una misma divisoria *D*, llevan el nombre de *laderas;* y las dos laderas *L'* y *L''* correspondientes á dos divisorias contiguas *D*, *D'* de un mismo orden, forman la cuenca del río ó arroyo *A*, el cual viene á ser la intersección de las dos vertientes ó laderas, que es la *vaguada.* (Ver esta voz.)

— La ladera *L''* se llama *derecha* con respecto al arroyo *A* y la *L'* es la ladera *izquierda* del mismo arroyo, denominaciones referidas á la posición de sus márgenes respecto á un observador que las recorriese en la dirección de la corriente.

— La reunión de las divisorias de todos los órdenes constituye el sistema *orografico* de la región ó terreno que se describe topográficamente.

Aplicaciones. — La determinación y representación de este sistema orográfico, juntamente con el hidrográfico (ver vaguada), en sus posiciones relativas, da á conocer de una manera completa la forma de la superficie terrestre en la extensión que se considera.

Dóricas.

Definición. — Se han dado este nombre á las líneas (generalmente curvas), que los griegos empleaban en sus templos dóricos, especialmente en las bases de los frontones, arquitrabes y frisos.

Historia. — La investigación de estas curvas se deben al arquitecto inglés Pennethorne, habiéndolas estudiado Mr. Peurose y Paccard en 1847, aunque sólo del primero se publicaron los trabajos. Se ocupó también de este asunto Mr. Burnouf en su obra *Memoires sur l'Antiquité* (Paris, 1879) y puede verse un artículo sobre las mismas en los *Anales de la construcción y de la industria*, 1879, pág. 278, debido al arquitecto Repullés y Vargas (E. M.).

Usos y aplicaciones. — Comprobada la existencia de estas curvas en el orden dórico, se ha tratado de explicar su utilidad con diversas razones, atribuyéndolas unos al objeto de garantir la solidez contra los temblores de tierra y otros á razones místicas, hasta que Mr. Bernouf las explicó, considerando su uso debido á razones puramente artísticas y de sentimiento, así como su aplicación al estilo

dórico, por ser éste el que representa el estado floreciente de la arquitectura griega, severa, sencilla y delicada.

Las razones en que hoy se funda la adopción de estas curvas es un fenómeno natural, una ilusión visual que hacía que el exquisito gusto artístico de los griegos no quedase satisfecho con el empleo exclusivo de líneas rectas y superficies planas. Compruébanse éstas ilusiones visuales fácilmente. Cuando sobre una recta viene á caer otra oblicua á ella, el ángulo agudo parece mayor que lo que realmente, es, y el ángulo obtuso menor en la misma proporción; pero si esta oblicua corta á la recta, sus dos ramas obran en el mismo sentido y sus efectos se suman. Este es un hecho que sería insensible si no hubiese medio de hacerlo aparecer, refiriéndole á un término de comparación; pero puesto que una oblicua aleja de su posición real á la recta sobre que cae, varias oblicuas paralelas harán mayor la ilusión, y oponiendo una á otra dos series de oblicuas paralelas que caigan en sentido inverso sobre una misma recta, ésta aparecerá deformada, cuyo hecho real es fácil de comprobar por cualquiera.

Esta misma ilusión hace que las secantes á una curva tiendan á rectificarla; igual efecto que los dichos, producen también las oblicuas curvilíneas.

Este fenómeno nos explica el que los griegos, en quien el sentimiento artístico resplandecía en el mayor grado, observasen sus efectos en las líneas oblicuas de sus frontones al caer sobre la base, que se les presentaría á la vista como deformada, y trataron de corregir el defecto haciendo dicha base curva para rectificar la sensación de curvatura con que aparecía la recta. Puede llamarse, pues, á esta curva de *rectificación*.

Iguales consideraciones motivaron indudablemente el empleo de curvas, así horizontales como verticales, en los arquitrabes, escalinatas, estilobatos, etc., como asimismo justifícase de esta manera la ligera inclinación que dieron los artistas griegos á los ejes de las columnas de sus templos dóricos hacia el interior, en tanto mayor grado cuanto más se separaban del centro en que ésta apenas era sensible.

Duplicatriz.

Definición.—Se ha dado este nombre á las líneas que sirven para solucionar el problema de la duplicación del cubo.

En este concepto la cisoide (ver esta voz) es una curva duplica-

triz, y lo propio las cúbicas simples, puesto que si en sus ecuaciones (ver cúbicas simples)

$$x^3 = hy^2 \qquad x^3 = h^2y \qquad xy^2 = h^3$$

se hace respectivamente

$$y = h\sqrt{2} \qquad y = 2h \qquad x = \frac{y}{2},$$

se encuentra en efecto:

$$x^3 = 2h^3 \qquad x^3 = 2h^3 \qquad x^3 = 2h^3.$$

— En general, todas las cúbicas pueden, más ó menos sencillamente, servir para la solución de este problema.

Ejemplo de una cúbica duplicatriz. — Si consideramos dos rectas

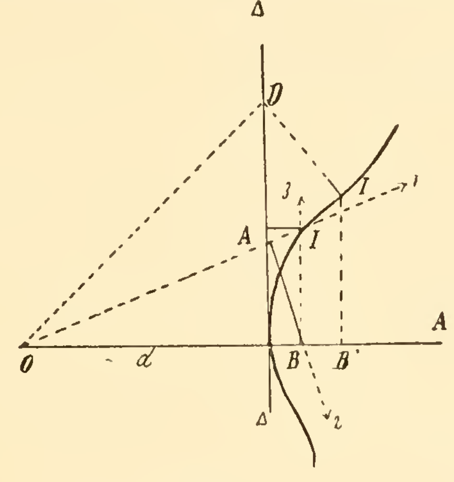


Figura 1.

perpendiculares entre sí, Δ y Δ′ (fig. 1), un punto fijo O, y se efectúa la construcción (1 . 2 . 3), en la cual los ángulos OAB y CBI son rectos. El lugar descrito por el punto I tendrá por ecuación, siendo $OC = d$, $OI = \rho$ y $AOC = \omega$,

$$\rho = \frac{d}{\cos^3 \omega},$$

y en coordenadas cartesianas

$$x^3 = d\,(x^2 + y^2).$$

La curva presenta la forma indicada en el dibujo, y está formada, excepción hecha del punto aislado O, por una sola rama parabólica doblemente inflexionada y que presenta su concavidad bacia la recta Δ. La inflexión de la rama tiene lugar para $\omega = 30°$.

Si desde el punto O como centro, con un radio igual á $d\sqrt{2}$, se describe un arco de círculo que corte á la curva en el punto I', se tendrá:

$$x^3 = d\,(d\sqrt{2})^2$$

ó

$$x^3 = 2d^3;$$

por tanto, OB' es el lado del cubo que, en volumen, será el doble del cubo cuyo lado sea igual á OC.

Puede ser consultada la obra *Essai sur la Geométrie de la Régle et de l'equerre*, G. de Longchamps.

E

Eclíptica.

Del griego εχλειπω, *eclipse.*

Definición. — La eclíptica es un círculo máximo de la esfera celeste, lugar geométrico de las posiciones del sol.

Historia. —Thales, en su escuela nombra á esta, línea *círculo oblicuo* (λοξος χύχλος) y el nombre con que hoy se conoce es debido á que en su plano tienen lugar los eclipses de sol y luna.

En el sistema de Tolomeo, el movimiento aparente anual del sol es un movimiento real y la tierra está inmóvil en el espacio, describiendo el sol de Occidente á Oriente la circunferencia de la eclíptica. En el sistema Copérnico, por el contrario, el movimiento del sol no es más que aparente, siendo la tierra la que gira alrededor de él, sistema hoy día universalmente adoptado, entre otras razones, por la mayor sencillez de éste comparado con el complicado sistema de Tolomeo; por analogía, pues todos los planetas giran alrededor del sol y la tierra sería en aquel caso una excepción, y por la aberración de la luz ó sea la desviación que experimentan los rayos luminosos que nos llegan de los astros, debido á la combinación del movimiento rectilíneo de la luz con el de la tierra en su órbita, á más de que la mecánica no nos da lugar á dudas por la influencia de sus atracciones recíprocas, etc.

Propiedades. — La eclíptica es recorrida por el centro del sol, de Occidente á Oriente, en el espacio de un año, por causa de su movimiento propio aparente.

— La recta intersección de los planos de la eclíptica y del ecuador, es un diámetro de la esfera celeste que se llama *línea de los equinoccios.* Los dos planos de la eclíptica y del ecuador forman entre sí un ángulo cuyo valor aproximado es de 23°,27′ 15″.

— El momento en que el sol pasa del hemisferio austral al boreal se llama *equinoccio de primavera*; y aquel otro en que, por el contrario, pasa del boreal al austral se llama *equinoccio de otoño.* Los puntos de

la circunferencia de la eclíptica situados á 90° de los puntos equinocciales se llaman *puntos solsticiales.*

— Una línea recta perpendicular al plano de la eclíptica y dirigida por el centro de la tierra, se llama *eje de la eclíptica*, por analogía con el eje del ecuador. Los dos puntos opuestos en que esta recta prolongada corta la esfera celeste se llaman los *polos de la eclíptica.* Se distinguen el *polo boreal* situado al lado boreal del ecuador y el opuesto *polo austral.*

— Los ejes del ecuador y de la eclíptica, siendo perpendiculares á sus planos respectivos vienen á formar entre sí un ángulo igual al que forman dichos planos ó sea de 23° 27′ 15″ próximamente.

— El polo boreal de la eclíptica es el que podemos percibir en Europa, está situado en la constelación del Dragón, entre las estrellas señaladas con las letras β y δ, algo más próximo de la segunda.

— La línea de los equinoccios no es una línea fija, y por lo tanto el punto del equinoccio de primavera ó *punto vernal* no lo es tampoco, teniendo un movimiento en sentido del movimiento diurno; fenómeno que se conoce en Astronomía con el nombre de *precesion de los equinoccios*, descubierto por Hiparco (128 a. d. J. C.), siendo Newton el primero que reconoció sus verdaderas causas. Hoy se sabe que el eje de la tierra describe un cono alrededor de una perpendicular al plano de la eclíptica; de manera que hace una revolucion completa en sentido retrógrado en 26.000 años próximamente, y por tanto, que la línea de los equinoccios verifica una revolución completa en este período de tiempo; resulta de aquí, que en el movimiento de traslación de la tierra alrededor del sol, esta línea viene á encontrar de nuevo al sol antes que la tierra haya completado una revolución entera. Respecto á las causas de este fenómeno se explican por medio de la teoría de la atracción y allí se determinan sus leyes mecánicas.

—Laplace determinó exactamente la posición del punto vernal para el año 1750, dando una fórmula que nos hace referir al punto aquél las observaciones de los años anteriores ó posteriores, conociendo por ella el camino variado $\psi - \psi'$ en función del tiempo; dicha fórmula es

$$\psi - \psi' = 0'',581727 \,.\, t - 0'',000752908 \,.\, t^2;$$

se toma t igual al tiempo transcurrido desde 1750 al año que se desea, tomándose positivo para años posteriores al mencionado y negativo para los anteriores.

— El ángulo de 23° 27′ 15″ que hemos dicho formaba el plano de la eclíptica con el ecuador se llama *oblicuidad de la eclíptica*; pues bien, este ángulo no es constante, cambia con el tiempo y según Laplace, *Exposition du Système du Monde* (lib. II, cap. XIII), la amplitud total de sus oscilaciones es de 2°,40′.

Este fenómeno se llama *nutación* (del latino *nutatio*), y consiste en una especie de oscilación del eje terrestre que lleva naturalmente consigo el que el plano del ecuador se aproxime ó aleje alternativamente del plano de la eclíptica.

— Los valores encontrados por procedimientos muy diversos de la oblicuidad de la eclíptica todos han sido decrecientes. Según Lacaille, disminuye en 47″ por siglo; según Lalande, en 33″, y según Delambre, en 48″. El cuadro que sigue pone de manifiesto estos decrecimientos, según las más importantes observaciones hechas desde tiempos antiguos por diferentes astrónomos en diferentes lugares de la tierra, deduciéndose de su examen que la expresada disminución es extremadamente lenta y de unos 48″ por cada siglo.

FECHAS DE LA OBSERVACIÓN	NOMBRE DEL OBSERVADOR	LUGAR DE LA OBSERVACIÓN	OBLICUIDAD
1100 antes J. C...	Tchao-Koung.......	China..............	23°,54′
350 ídem........	Pythées...........	Marsella...........	23°,49′
250 ídem........	Eratósthene........	Alejandría..........	23°,46′
50 ídem........	Lieon-Hiang.......	China..............	23°,46′
173 después.....	....	Idem...............	23°,41′
461 ídem........	Tson-Chong........	Idem...............	23°,39′
629 ídem........	Litchon-Fonng.....	Idem...............	23°,40′
880 ídem........	Albatenius.........	Arabia.............	23°,36′
1000 ídem........	Ebn-Jonnis.........	El Cairo............	23°,34′
1279 ídem........	Cócheon-King......	Pekín..............	23°,32′
1437 ídem........	Ulug-Bey..........	Samarkanda........	23°,31′
1800 ídem........	Delambre...........	París...............	23°,28′

— La causa de esta disminución se explica volviendo á la realidad del fenómeno; es decir, considerando que la eclíptica es realmente órbita de la tierra y no del sol. Siendo así, la tierra está sujeta á la atracción de los otros planetas del sistema polar, principalmente de

Júpiter y de Venus y ésta atracción complicada tiene por efecto hacerla aproximar insensiblemente al ecuador; pero esta aproximación no puede continuar indefinidamente hasta que anulara la oblicuidad, pues que en este caso se llegaría á confundir la eclíptica con el ecuador, llegando asl la recta de la tierra á producir para sí misma un equinoccio perpetuo. Según Lagrange, la disminución de oblicuidad deberá cambiarse en aumento.

— Las observaciones de Bradley y de Lemonnier permiten establecer las leyes geométricas del fenómeno de la nutación del eje de la tierra, del cual depende, entre otros, el acabado de expresar, ó sea el del cambio de oblicuidad de la eclíptica. Así, pues, en virtud de la nutación, el eje de la tierra describe en 18 años y $\frac{2}{3}$ un cono de base elíptica alrededor de su posición media, sobre el cono próximamente circular que tiene por eje la perpendicular al plano de la eclíptica y por semi-ángulo en el vértice la oblicuidad de la eclíptica; de modo que para darse cuenta del movimiento del eje de la tierra, es necesario suponer desde luego que el eje del cono de nutación, describe el cono de precesión, y que al mismo tiempo el eje de la tierra describe el cono de nutación.

— Paralelamente á la eclíptica, y próximamente de 18° de longitud, se distingue en el cielo una banda ó zona celeste que se llama *zodiaco* (del griego βωδιακός). En esta banda los planetas verifican su revolución en diferentes tiempos con movimiento particular de Occidente á Oriente, ó sea en sentido contrario al movimiento diurno. Esta banda se ha dividido en doce partes iguales de 30°, llamadas *signos* ó *casas*, agrupando las estrellas de cada una de estas partes entre sí y formando á lo largo de la eclíptica, doce constelaciones que se llaman *zodiacales*.

Ecuador.

Definición.—Se llama así al círculo máximo, intersección del plano perpendicular al eje principal de una esfera ó de un esferoide cualquiera con esta superficie.

Clasificación. — Se distinguen en particular el ecuador *celeste* y el *terrestre*, el *magnético* y el *térmico*.

Ecuador celeste y *ecuador terrestre.* — *Definición.* — Ecuador celeste es el círculo máximo de la esfera celeste perpendicular al eje del mundo. Divide la esfera celeste en dos partes iguales ó hemisferios, de los cuales uno se llama *septentrional* ó *boreal* porque contie-

ne el polo del mismo nombre; y el otro, *meridional* ó *austral*, por la misma razón.

La intersección del plano del ecuador celeste con la superficie del globo forma el ecuador terrestre, el cual divide la superficie de la tierra en dos hemisferios, á los que se les dan los mismos nombres que á los hemisferios correspondientes de la esfera celeste.

Propiedades. — Se da á este círculo el nombre de *ecuador* ó línea *equinoccial* á causa de la igualdad de los días y de las noches, que tiene lugar para toda la tierra cuando el sol está en su plano; lo que se verifica dos veces al año, á saber, hacia el 21 de Marzo y hacia el 23 de Septiembre, y que se llaman los *equinoccios.*

Los dos puntos opuestos, en los que el ecuador corta el horizonte, son los de E. y O., ó el de Oriente y Occidente, ó bien los polos del meridiano.

— El ecuador es cortado perpendicularmente por todos los meridianos, puesto que todos éstos pasan por sus polos.

— El ecuador celeste forma á cada instante con el horizonte de un lugar un ángulo igual al complemento de la latitud de este lugar, por ser este ángulo el complemento de la distancia del zenit al ecuador celeste, que es igual á la latitud.

Sobre el ecuador se miden la ascensión recta del sol y de los demás astros, su ascensión oblicua, y su diferencia ascensional. En virtud del movimiento diurno de la tierra, cada punto del ecuador hace con la esfera celeste una revolución aparente alrededor de la tierra en 24 horas, y, por tanto, en una hora, la 24.ᵉᵐᵃ parte de 360° ó 15°. De aquí que se divida el ecuador en 24 partes iguales, en que cada una comprende indiferentemente una hora ó 15°.

Ecuador magnético. — *Definición.* — Así como se ha dado el nombre de polos magnéticos á los puntos de la superficie de la tierra en que desaparece la fuerza magnética horizontal, de la misma manera, se llama *ecuador magnético* á la curva formada por los puntos en que la inclinación de la aguja es *nula.*

—Los puntos en que esta línea corta al ecuador terrestre reciben el nombre de *nodos.*

Historia. — La posición de esta línea y sus cambios de forma han sido objeto de serias investigaciones. Sabine fué el primero que determinó el nodo africano al principio de la expedición que emprendió, relativa á las experiencias del péndulo, *Pendulum Expériments* (1825, pág. 426), y en 1840, comparando las observaciones de Duperrey, Alleu, Dunlop y Sulivan, trazó un mapa del ecuador magnético, *Philosoph. Transactions*, *for.*—(1840, 1.ª parte, pági-

nas 137, 139 y 146). Se tienen también los notables trabajos debidos á Duperrey, *De la configuration de l'équateur magnétique* (*Annales de Chimie et de Phisique,* 2.ª serie, t. XXX, pág. 337; t. XXXIV, página 298, y t. XLV, pág. 371 (1826-1831)), y aquellos de Morlet, *Mémoires présentés par divers savants à l'Acad. Roy. des Sciences*, t. III, página 132; de Saigey, *Memoria sobre el ecuador magnético (Anales Marítimos y Coloniales* (1833, t. IV, pág. 5)); de Erman, *Magnetriche Beobachtungen* (1841, pág. 536); de Wilkes, *United States Exploring Expedition* (t. IV, pág. 263); de Elliot, *Philosoph. Transactions*, *for* (1851, 1.ª parte, pág. 287-331), etc.

Propiedades. —Esta curva es bastante irregular, sus nodos se encuentran situados, el primero, cerca de la isla de Santo Tomás, hacia la costa occidental de Africa, sobre los 30°, 20′ de longitud oriental; y el segundo, menos determinado, lo está en el mar del S., junto á las pequeñas islas de Gilberto, casi bajo el meridiano de Viti, entre los 166° 25′ de longitud occidental y los 175° 44′ de longitud oriental.

—Si se busca el plano medio de esta curva, figurándola sensiblemente como si fuera un círculo máximo de la tierra, se encontrarla que formaba un ángulo de 10° 47′ con el ecuador geográfico y que su eje cortaría á la superficie del globo en dos puntos situados en las regiones polares, el uno á los 79° 11′ N. y 78° 20′ O. y el otro á los 79° 11′ S. y 110° 40′ E.

—Observando la marcha que sigue el ecuador magnético, se ve que á partir de la cadena de los Andes, donde pasa entre Quito y Lima, continúa al O. atravesando casi todo el mar del S. en el hemisferio austral y se aproxima lentamente al ecuador terrestre. Poco antes de llegar al archipiélago Indio, pasa al hemisferio septentrional, toca únicamente las extremidades meridionales del Asia, y penetra en seguida en el continente africano al O. de Socotora, hacia el Estrecho de Bab el-Mandeb, siendo entonces cuando se separa más del ecuador terrestre. Después de haber atravesado las regiones desconocidas del interior del continente africano en dirección al SO., el ecuador magnético vuelve á la zona austral de los trópicos hacia el golfo de Guinea, separándose entonces de tal modo del ecuador terrestre, que va á cortar la costa brasileña hacia Os Ilheos al N. de Porto Seguro, á los 15° de latitud austral. Desde allí á las mesetas de las cordilleras, entre las minas de plata de Micnipampa y la antigua residencia de los Incas, Caxamarca, recorre toda la América del S., región que es para nosotros una tierra desconocida como el Africa central.

—Según Elliot, esta curva atraviesa la extremidad septentrional de Borneo y corriendo casi exactamente de E. á O., toca la punta Norte de Ceilán, á los 9° 45′ de latitud, siendo en esta parte de su curso, la línea de menor intensidad total, casi paralela á esta curva; pero más lejos, penetra en la parte oriental del continente africano, al S. del cabo Guardafui. Se la vuelve á encontrar al S. de Guadada, entre Angolola y Angobar, á los 10° 7′ de latitud, 38° 51′ de longitud oriental.

—Según observaciones recogidas y discutidas por Sabine, el nodo africano se ha trasladado de E. á O. entre los años 1825 y 1837, adelantando 4°. Este mismo movimiento ha sido comprobado por las observaciones de Panton de 1776 en la Ribera oriental de Africa, comparadas con las de Rochert d'Hericourt. Encontró éste el ecuador magnético mucho más cerca del Estrecho de Bab-el-Mandeb, un grado al S. de la isla Socotora, á los 8° 40′ de latitud boreal. No ha habido, por consiguiente, en cuarenta y nueve años, más que un cambio de 1° 27′ en latitud; pero en la misma época, Duperrey y Arago habían evaluado en 10° de longitud la traslación de los nodos hacia el Oeste.

—La variación secular de los nodos del ecuador magnético se ha producido, en la costa oriental del Africa que da frente al mar de las Indias, exactamente en la misma dirección que en la costa occidental. Queda aún por determinar la cantidad del movimiento.

Ecuador térmico.—Definición.— Se denomina así la línea que pasa por todos los puntos de la tierra en que la temperatura de todos los meridianos es máxima.

Propiedades. — En rigor, esta línea no es una línea isoterma, porque la temperatura media no es la misma en todos sus puntos.

—Esta línea se separa de una manera notable del ecuador terrestre, en particular sobre los dos continentes. Su elevación hacia el N. en el mar de las Antillas, es debida á la existencia de la gran corriente marina que transporta las aguas ecuatoriales del Atlántico hacia los parajes de estas islas. Los desiertos del Sahara, los de la Arabia y el desenvolvimiento del Asia meridional transversalmente situada al Norte del Océano Indico, unido á la existencia en las regiones ecuatoriales del Pacífico de una corriente marina análoga á la del Atlántico, produce la inflexión hacia el N. que se señala en la dirección del ecuador magnético, en la superficie del Africa y de los mares de la India.

—En los mapas térmicos se la suele distinguir bien, porque su color ó su trazado es distinto de las demás líneas isotermas.

—En Geometría se llama *ecuador* de una superficie de revolución á aquel de los paralelos de dicha superficie cuyo radio es el mayor de todos los demás.

Esta curva tiene la propiedad de que, en uno cualquiera de sus puntos, la tangente á la meridiana es paralela al eje de la superficie; lo propio que sucede al círculo de garganta.

Eje hidráulico.

Definición. — En los conductos cerrados el eje pasa por los centros de gravedad de las secciones.

En los canales descubiertos, esta línea es la intersección de la superficie libre con el cilindro vertical, cuyas generatrices pasan por el centro de gravedad de las secciones.

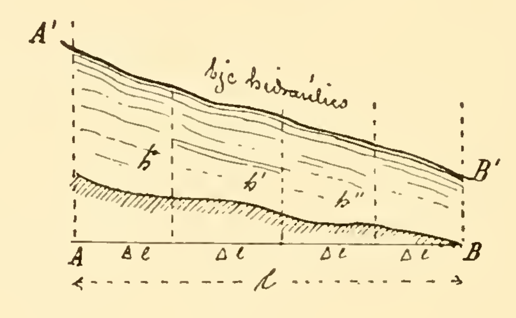


Figura 1.

Ecuación. — Consideremos una porción de corriente cuya longitud se encuentra proyectada sobre una horizontal $AB = l$ (fig. 1). Se divide esta longitud en un número cualquiera de partes, que para mayor sencillez supondremos iguales y representémoslas por Δl, y sean h^0, h', h''..... la altura de cada una de las secciones en las diferentes verticales.

Si llamamos además H la pendiente absoluta del eje hidráulico y ΔH_0, ΔH_1, ΔH_2..... la serie de pendientes absolutas del mismo eje, comprendidas entre dos verticales consecutivas I_0, I_1, I_2..... las pendientes relativas que corresponden á los puntos de intersección del eje hidráulico con las verticales equidistantes; la ecuación diferencial del eje hidráulico es:

$$dH = I \,.\, dl.$$

Si consideramos el rectángulo cuya altura sea $H' + h^0$, siendo H' la pendiente absoluta del fondo, tendremos evidentemente

$$H' + h^0 = H + h^n,$$

de donde

$$H = H' - (h^n - h^0)$$

y para la pendiente absoluta de una porción del eje hidráulico comprendida entre dos verticales equidistantes

$$\Delta H = \Delta H' - \Delta h' \ldots\ldots,$$

y pasando de las diferencias á las diferenciales

$$d H = d H' - d h' \ldots\ldots,$$

— Ver la Memoria de Mr. Bondin: *De l'axe hydralique des cours d'eau contenus dans un lit prismatique et des dispositifs realisant, en pratique, ses formes diverses. (Annales des Travaux publics de Belgique*, t. XX).

Elástica.

Definición. — Se conoce en Matemáticas con el nombre de *curva elástica* á la formada por una lámina metálica, fija horizontalmente por una de sus extremidades á un plano vertical y cargada en el otro extremo de un peso que la obliga á curvarse.

— Algunos autores, entre ellos W. Ritter, dan el nombre de *línea elástica* á la curva de flexión (Ver esta voz).

Historia. — Jacobo Bernouilli, con motivo del problema de la catenaria, se le ocurrió el de buscar la forma de la lámina elástica: *De la courbure d'une lame élastique (Acta Eruditorum*, 1696), en el caso de que ésta se encontrara fija por su extremo inferior, estuviese colocada verticalmente y sometida á la acción de un peso suficiente para que, obrando sobre su extremo superior, la tangente en este punto fuese horizontal, determinando la propiedad de que «la porción de eje comprendido entre la ordenada de la curva y su tangente será á esta tangente como el cuadrado de la ordenada á una cierta área constante».

Más tarde, en las *Mémoire de l'Académie des Sciences*, 1703, se encuentra el problema de la lámina elástica propuesto también por Jacobo Bernouilli en el caso que lo expresamos en la definición, dando á la curva obtenida el nombre de *curva elástica,* con que se la distingue. Otros muchos geómetras se ocuparon de este mismo problema, pudiéndose ver diversas soluciones en *Mémoires de St. Petersbourg*, t. III.

Juan Bernouilli ha demostrado en su obra *Essai sur une nouvelle théorie de la manœuvre des vaisseaux* (Bâle, 1714), que esta curva es la misma que la que formaria un lienzo perfectamente flexible, fijado horizontalmente por sus dos extremos y cargado de un flúido pesado. La demostración dada por este autor se encuentra en la *Mécanique* de Poisson, como asimismo el desenvolvimiento de sus propiedades.

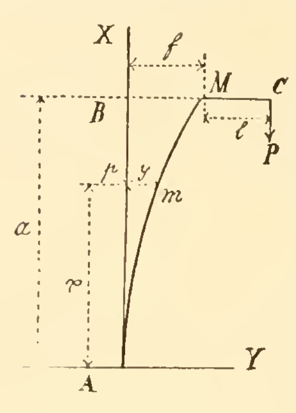


Figura 1.

Ecuación. — La ecuación de la curva en el primer caso que consideró Bernouilli se obtiene del modo siguiente: sea AM (fig. 1) la lámina vertical, empotrada en su extremo inferior y soportando el peso P suspendido en el extremo de la traviesa MC sujeto á manera de formar un ángulo recto con la pieza AM. La acción del peso comprime la pieza vertical en el sentido MA y tiende á hacerle doblar y romper. Llamemos a la distancia AB, l la MC, w el área de la sección transversal de la pieza, (x, y) la abscisa Ap y la ordenada mp de un punto cualquiera m de la curva afectada por la pieza; f la ordenada MB del punto extremo; ε el momento de resistencia á la flexión, ó más simplemente, el momento de flexión. La ecuación de equilibrio para el punto m será

$$\varepsilon \,.\, f''(x) = \varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = \mu = P(l + f - y),$$

y la integral de esta ecuación

$$y = (l + f)\left(1 - \cos . x \sqrt{\frac{P}{\varepsilon}}\right),$$

para $x = a$, será $y = f$, y por lo tanto

$$l = (l+f)\left(1 - \cos x \sqrt{\frac{P}{\varepsilon}}\right) \quad \text{y} \quad P = \varepsilon\left[\frac{\text{arc} \,.\, \cos \frac{l}{l+f}}{a}\right]^2,$$

y la ecuación de la curva

$$y = l\,\frac{1 - \cos . x . \sqrt{\frac{P}{2}}}{\cos a \sqrt{\frac{P}{\varepsilon}}}.$$

— En el segundo de los casos, aquel que lleva la denominación de *curva elástica*, es más sencillo determinar su ecuación, partiendo de la propiedad, que puede tomarse como definición, de que la curva elástica es aquella cuyas radios de curvatura están en razón inversa de la abscisa. En este supuesto, la ecuación diferencial que se establece es

$$\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dp}{dx}} = \frac{a^2}{2x},$$

siendo $\frac{a^2}{2}$ el producto constante del radio de curvatura por la abscisa del punto correspondiente de la curva. Se deduce de aquí

$$2xdx = \frac{a^2dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$$

é integrando

$$x^2 + c = \frac{a^2 p}{\sqrt{1+p^2}},$$

de donde

$$p = \frac{x^2 + c}{\sqrt{a^4 - (x^2+c)^2}},$$

que integrada de nuevo nos da

$$y = \int \frac{(x^2 + c)\,dx}{\sqrt{a^4 - (x^2 + c)^2}} + c,$$

que es la ecuación de la *curva elástica.*

— Las curvas elásticas han recibido también el nombre de *linterales*, pudiendo consultar á estos efectos las obras, *Théorie des fonctions*, etcétera, por M. Cournot (l. V, pág. 144) y el *Cours d'analyse*, por M. Duhamel (segunda parte, pág. 258).

—*Curva elástica de doble curvatura.* — M. Binet, *Comptes Rendus de l'Académie* (primer semestre, 1884, pág. 1115), estudia las circunstancias y ecuación de esta línea, la cual se completa y simplifica, por lo que á la integración de sus ecuaciones se refiere, en la misma obra y tomo, pág. 1197. Como consecuencia, Mr. Wantzel ha mostrado por vez primera, en una comunicación inédita á la *Société philomathique* el 29 de Junio (citada por Mr. Saint-Venant en los *Comptes Rendus de l'Académie* (15 Julio, pág. 148), que la curva elástica de doble curvatura, ó sea la curva afectada por el eje de una varilla elástica primitivamente cilíndrica, solicitada por un *par*, es necesariamente una hélice.

Eliaca.

Definición.—Se da, en general, el nombre de curva *eliaca* á la que va rodeando algún cuerpo.

— Como línea de esta especie se puede contar á la hélice. (Ver esta voz).

Historia. —Esta denominación se usaba frecuentemente en cantería y así se ve en Vandelvira, *Libro de Cantería* (T. I, pág. 7 v.°), donde se usa para señalar la línea del pilar de la vía de San Gil ó del Caracol de Emperadores, etc.

Elipcimbra.

Definición. — La curva de doble curvatura intersección de dos cañones que forman luneto oblicuo.

Historia. — Este nombre ha sido dado por Frezier, *Théorie et pratique de la coupe des pierres et du bois* (Strasbourg, 1738).

Construcción. —Supongamos una galería horizontal cuya directriz sea (fig. 1) *abc* — *a'b'c'*, situada en un plano perpendicular á las generatrices de la superficie cilíndrica y que á ella se da ingreso por

otra también cilíndrica y horizontal, cuya directriz es la curva, cuyo plano es perpendicular á las generatrices y que los planos de ambas directrices formen entre sí un ángulo α cualquiera.

Cortando las superficies por planos horizontales, se obtendrán diferentes generatrices en ambas superficies cilíndricas, las cuales, por su intersección, según se marca en la figura, nos determinan las

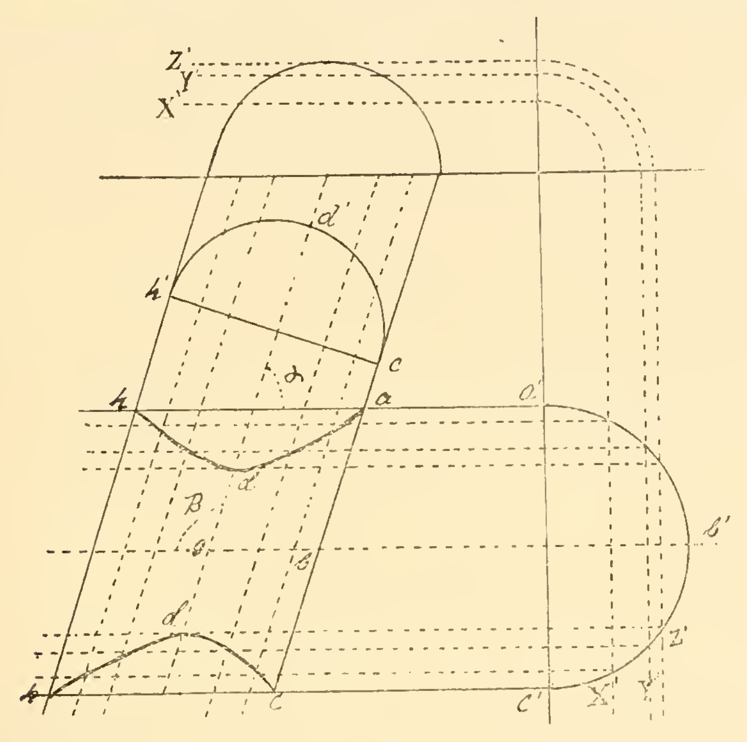


Figura 1.

curvas *adh, hdc,* que serán las proyecciones horizontales de las curvas buscadas.

Si las directrices de ambas galerías fueran circulares, las curvas *adh* y *cdh* serían una hipérbola equilátera, cuyas asíntotas serían las bisectrices de los ángulos α y β, que forman entre sí las generatrices de los dos cilindros propuestos.

Elipse.

Del griego (ἐλλειπειν).

Definiciones.—Curva lugar de los puntos cuyas distancias á otros dos fijos es una suma constante.

—Los puntos fijos se llaman *focos*. La recta que une los dos focos y termina en la circunferencia, *eje mayor*. La perpendicular al eje mayor y que pasa por su punto medio, *eje menor*. El punto en que los ejes se cortan, *centro de la elipse*, y aquéllos en que encuentran á la curva, *vértices*. Una recta cualquiera que une dos puntos de la curva, *cuerda;* si ésta pasa por el centro, *diámetro*, y las que parten de los focos y terminan en la curva, *radios vectores*.

Historia. — Siendo esta curva una de las cónicas, á lo que se dice sobre este punto en el artículo (*cónicas*) hacemos aquí referencia.

Ecuación y forma. — La ecuación de la elipse en coordenadas rectangulares referida á sus ejes y á su centro; siendo (x, y) las coordenadas de uno de sus puntos y $2a$ y $2b$ la magnitud de sus ejes, es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

—Se conviene generalmente, en tomar por eje de las x el eje mayor designado por $2a$.

—La ecuación anterior se puede escribir en las dos formas,

$$\frac{x^2}{a^2} = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

$$\frac{y^2}{b^2} = \left(1 + \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{x}{a}\right),$$

de donde resulta, que si se toma $OA = OA' = a$, $OB = OB' = b$, la la curva está comprendida toda ella en el interior del rectángulo $MNPQ$ (fig. 1). Si x crece desde O hasta a, y disminuye constantemente desde b hasta cero. Para $y = 0$; $x = \pm a$, y para $x = 0$ se tiene $y = \pm b$. El arco AB, no pudiendo ser cortado por una recta sino en dos puntos, presentará la forma indicada en la figura, y como á cada valor de x, se tienen dos de y iguales y de signos contrarios, la simetría nos dará para forma general de la elipse, la expresada.

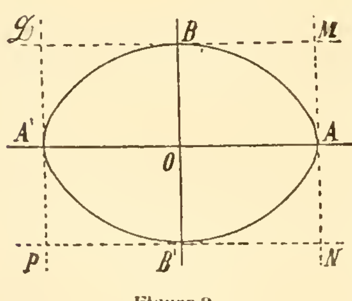


Figura 2.

—La ecuación de esta curva en coordenadas polares, siendo su cen-

tro el polo, y el eje mayor el eje polar, y (ρ, α) las coordenadas de un punto cualquiera de la elipse, es:

$$\rho = \frac{b^2}{a + c \cdot \cos \cdot \alpha}.$$

—En coordenadas axiales referida á su eje focal y al centro, es, siendo (λ, θ) las coordenadas de un punto,

$$\lambda^2 = a^2 + b^2 \cot^2\theta,$$

y en coordenadas líneas ó tangenciales será, aplicando el teorema de las formas simples á su ecuación, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, y siguiendo la notación de Clebsch

$$A = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & \infty \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \text{ de donde } A_{12} = A_{13} = A_{23} = 0$$

$$A_{11} = -\frac{1}{b^2}; \quad A_{22} = -\frac{1}{a^2}; \quad A_{33} = \frac{1}{a^2 b^2},$$

y, por tanto, multiplicando por $a^2 b^2$, se tendrá, para ecuación de la elipse, en coordenadas líneas:

$$a^2 u^2 + b^2 v^2 - 1 = 0.$$

Propiedades, centro y ejes. — Los cuadrados de las ordenadas, perpendiculares á uno de los ejes de esta curva, son entre sí como los productos de los segmentos en que dichas ordenadas dividen este eje.

— Las coordenadas perpendiculares á un eje están con las coordenadas correspondientes de la circunferencia descrita sobre este eje como diámetro, en la misma relación constante que el otro eje al eje considerado.

De aquí la siguiente construcción de la elipse. (Stevin). Sobre los ejes AA' y BB' (fig. 2) como diámetro, se describen dos circunferencias. Tracemos por el centro O una recta cualquiera que encuentre á las dos circunferencias en los puntos M_1 y M_2; por el punto M_1 se dirige $M_1 P$ perpendicular á AA', y por el M_2 la perpendicular $M_2 Q$ á BB'; estas dos rectas se cortan en el punto M, que lo es de la elipse, puesto que las dos rectas $M_1 P$ y $M_1 O$, cortadas por las paralelas OP y $M_2 M$ nos dan la proporción

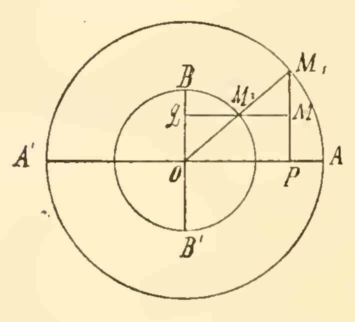


Figura 2.

$$\frac{MP}{M_1 P} = \frac{b}{a}.$$

—El círculo descrito con el eje mayor por diámetro se llama *círculo principal* ó *círculo homográfico* de la elipse.

— La elipse puede ser considerada como la proyección de un círculo sobre un plano que forme con el del círculo un ángulo definido por

$$\cos . \theta = \frac{b}{a}.$$

—El lugar geométrico engendrado por un punto M de una recta AB

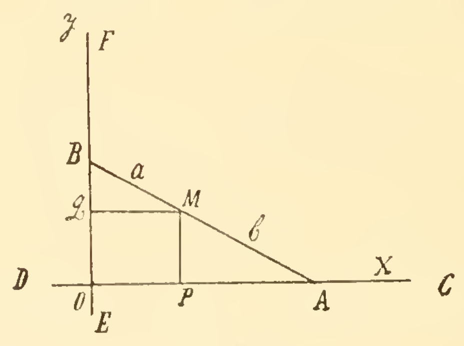


Figura 3.

de longitud constante, cuyos extremos A y B resbalan sobre dos rectas fijas CD y EF es una elipse. (Proclus).

En efecto, sea AB (fig. 3) una posición cualquiera de la recta dada, α el ángulo BAC y hagamos $MB = a$ y $MA = b$.

Si

$$x = OP = MQ = a \,.\, \cos \,.\, \alpha$$
$$y = MP = b \,.\, \text{sen} \,.\, \alpha,$$

será

$$\frac{x}{a} = \cos \,.\, \alpha \quad \text{é} \quad \frac{y}{b} = \text{sen} \,.\, \alpha;$$

y, por tanto, elevando al cuadrado y sumando, se tendrá para ecuación del lugar del punto M:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ecuación de la elipse.

De esta propiedad se deduce un medio de verificar la construcción de esta curva y en ella está fundado el llamado *compás elíptico*, de todos conocido.

—Dos rectas trazadas desde los extremos del eje mayor á un punto cualquiera de la elipse, determinan sobre la dirección del eje menor, á partir del origen, dos segmentos, cuyo producto es constante é igual á b^2.

—Si se une un punto cualquiera de la elipse á sus cuatro vértices, se obtiene un haz armónico.

Focos y directrices. — Los dos puntos situados sobre el eje mayor de una elipse á una distancia del centro $c = \pm \sqrt{a^2 - b^2}$ son los focos de la curva. La distancia $2c$, entre éstos puntos, es la *excentricidad.*

—Si un punto M está sobre la curva, la suma de los radios vectores trazados desde éste, es igual al eje mayor. En efecto, siendo F y F' los focos

$$MF = a + \frac{cx}{a} \qquad MF' = a - \frac{cx}{a}$$

y

$$MF + MF' = 2a.$$

Si el punto es exterior á la curva $MF + MF' > 2a$ y si interior $MF + MF' < 2a$.

— Para la construcción de los focos bastará describir desde uno de los extremos del eje menor una circunferencia cuyo radio sea igual

al eje mayor y los puntos en que corte á esta línea serán los buscados.

— El círculo descrito sobre un radio vector cualquiera es tangente al círculo homográfico (Castel).

— La elipse se la puede considerar como el lugar geométrico de los puntos igualmente distantes de un foco y de una circunferencia descrita desde el otro foco como centro y con un radio igual al eje mayor, la cual recibe el nombre de *circunferencia directriz* de la elipse, relativamente al otro foco.

— A cada foco de la elipse corresponde una recta tal que la relación de las distancias de un punto de la curva al foco y á esta recta es constante é igual á e. Estas rectas se llaman *directrices*. Si DL (fi-

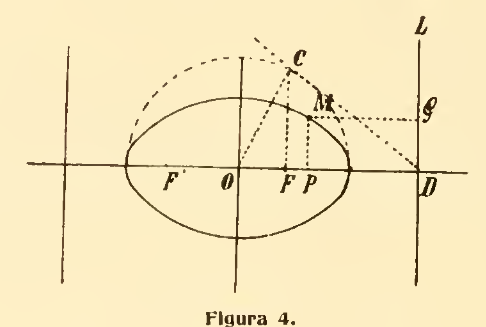


Figura 4.

gura 4.ª) es una de estas líneas, perpendicular al eje mayor y $OD = \frac{a^2}{c}$; y se toma un punto M en la elipse, se tiene

$$MG = PD = \frac{a^2}{c} - x$$

$$MF = a - \frac{cx}{a} = \frac{c}{a}\left(\frac{a^2}{c} - x\right),$$

y, por tanto,

$$\frac{MF}{MG} = \frac{c}{a} = e.$$

Para construir las directrices, tracemos por el foco F una perpendicular sobre el eje mayor hasta que encuentre en C á la circunferencia homográfica y por C tracemos una tangente CD á esta circunferencia. El triángulo OCD nos dará

$$OD = \frac{\overline{OC}^2}{OF} = \frac{a^2}{c};$$

por consiguiente, la perpendicular DL al eje mayor por el punto D es la directriz. La otra será $D'L'$.

— La directriz es la polar del foco correspondiente.

Parámetro. — La ecuación de la elipse tomando por ejes coordenados el eje mayor y la perpendicular levantada á este eje en el vértice izquierdo, será, llamando (x', y') las coordenadas de un punto de la curva,

$$y'^2 = \frac{2b^2}{a} x' - \frac{b^2}{a^2} x'^2,$$

el coeficiente $\frac{2b^2}{a}$ que tiene x' en esta ecuación, se llama *parámetro de la elipse;* y como

$$\frac{2b^2}{a} = \frac{4b^2}{2a};$$

resulta que el «parámetro de la elipse es una tercera proporcional al eje mayor y al menor».

— La cuerda perpendicular al eje mayor de la elipse y que pasa por el foco es igual al parámetro.

Tangente. — La ecuación de la tangente, en un punto (x', y') es:

$$y - y' = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'}(x - x').$$

— La tangente á la elipse forma dos ángulos iguales con uno de los radios vectores del punto de contacto y la prolongación del otro radio vector. Esta propiedad permite la solución de los tres problemas siguientes:

Problema 1.°—«Construir la tangente á la elipse en un punto dado en ella, conociendo los focos, y estando construida ó no la elipse.»

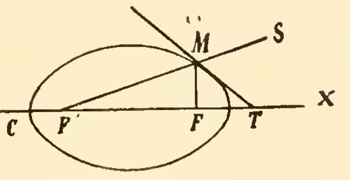


Figura 5.

Se dirigen (fig. 5) al punto de contacto los dos radios vectores FM y $F'M$, se prolonga uno de ellos $F'M$ y se divide en dos partes iguales el ángulo FMS; la bisectriz MT será tangente á la elipse.

Problema 2.º — «Dirigir las dos tangentes á la elipse desde un punto exterior á la curva, conociendo el eje mayor y los focos, y estando construida ó no la elipse».

Sea (fig. 6) CA el eje mayor y F y F' los focos de la elipse: desde el punto dado I se describe una circunferencia con un radio igual á la distancia que hay entre dicho punto y uno de los focos, el F por ejemplo; desde el otro foco F' se describe otra circunferencia con un radio igual al eje mayor; desde los puntos S y S' de intersección de ambas superficies se trazan las rectas SF', $S'F'$, SF y $S'F$ y desde el punto I, las perpendiculares IM é IM' á las rectas FS y FS': estas perpendiculares serán las dos tangentes á la elipse determinada por el eje mayor AC y por sus dos focos $F\,F'$ en los puntos M y M' en que cortan á las rectas SF' y $S'F'$.

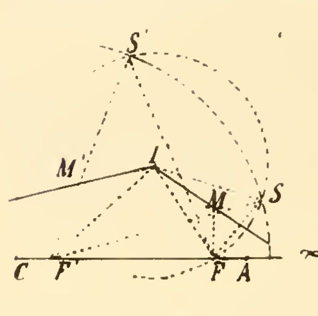


Figura 6.

Problema 3.º—«Conociendo el eje mayor y los focos de una elipse, y estando esta curva construida ó simplemente determinada por estos datos, construir sus dos tangentes paralelas á una recta dada».

Sean CA (fig. 7) el eje mayor, F y F' los focos de la elipse y HK la recta á la cual han de ser paralelas las tangentes. Desde uno de los focos, F por ejemplo, se baja á la HK una perpendicular FP indefinida en ambos sentidos, desde el otro foco F' se describe con el radio $2a$ un arco que cortará á esta perpendicular indefinida en dos puntos P y P', pues la distancia de la perpendicular al foco F' es á lo menos igual á FF'; se trazan las rectas $F'P$ y $F'P'$, y por los puntos medios Q y Q' de las rectas FP y FP' se dirigen las paralelas QM y $Q'M'$ á la recta dada, y estas paralelas serán las dos tangentes á la elipse en los puntos M y M'.

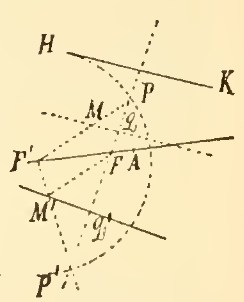


Figura 7.

— El lugar de las proyecciones de los focos sobre la tangente á la elipse es el círculo homográfico.

— El rectángulo de las perpendiculares bajadas desde los focos sobre una tangente es constante é igual á b^2 (Chappon).

— La bisectriz del ángulo que forman entre sí dos tangentes á una elipse, es asimismo bisectriz del ángulo que se forma, uniendo su punto de concurso con los focos. (E. Jube). De aquí se deduce que

las tangentes trazadas desde un punto exterior forman ángulos iguales con las rectas que unen estos puntos con los focos.

— Si desde uno de los focos de la elipse como centro se describe un círculo tangente á la directriz, se verifica:

1.° Si desde un punto P de la elipse se dirigen dos tangentes á este círculo, cortarán á la elipse en dos puntos M y M' tales, que MM' es paralela al eje mayor.

2.° Las tangentes trazadas al círculo por los puntos M y M' se cortan sobre la elipse en un punto P' tal, que PP' es paralela al eje menor.

3.° Las tangentes trazadas al círculo en los puntos en que corta á la elipse se encuentran en una de las extremidades del eje mayor; y

4.° Los puntos de contacto con la elipse, de las tangentes comunes á las dos curvas están á una distancia del foco igual á dos veces el parámetro de la elipse.

— Si un cuadrilátero es circunscrito á una elipse, la relación del producto de las perpendiculares bajadas sobre la misma tangente desde los otros dos vértices, tiene un valor constante.

Normal. — La ecuación de la normal en un punto (x', y') es:

$$y - y' = \frac{a^2 y'}{b^2 x'} (x - x').$$

— La normal en un punto de la elipse divide en dos partes iguales el ángulo de los radios vectores.

— Por un punto, tomado en el plano de una elipse, se puede, en general, dirigir cuatro normales á esta curva. Dos de estas normales son siempre reales.

— Los pies de las normales trazadas á la elipse por un punto P, se encuentran sobre una hipérbola equilátera que pasa por el punto P y el centro de la elipse y cuyas asíntotas son paralelas á los ejes de la elipse.

— En cada cuadrante de la elipse se pueden encontrar dos puntos tales que las normales que pasen por ellos están á igual distancia dada del centro. Dos puntos así determinados se llaman *puntos asociados*.

Siendo x y x' las abscisas de dos puntos asociados, la relación entre ellos es la siguiente:

$$(a^2 - x^2)(a^2 - x'^2) = (1 - e^2) x^2 x'^2.$$

Los valores

$$x = a\sqrt{\frac{a}{a+b}} \quad \text{y} \quad y = b\sqrt{\frac{b}{a+b}}$$

corresponden á los de la abscisa y ordenada de un punto asociado doble (O. Lebesque).

— El producto de los coeficientes angulares, de los lados opuestos de un cuadrilátero normal inscrito en una elipse, es constante é igual á $\frac{b^2}{a^2}$.

— Los pies de tres de las normales dirigidas desde un punto á una elipse, y el punto diametralmente opuesto al cuarto pie, forman un cuadrilátero inscriptible en un círculo (Joachimsthal).

— El círculo que pasa por los pies de tres de las normales dirigidas desde un punto á la elipse, pasa también por la proyección del centro de la curva sobre la tangente en el punto que está diametralmente opuesto al pie de la cuarta normal (Laguerre).

Polo tangencial y polo normal. — Si en los extremos A y B de una cuerda cualquicra AB de una elipse, se trazan las tangentes á esta curva, se cortan en un punto P que se llama *polo tangencial.* Asimismo las normales en los puntos A y B determinan por su intersección otro punto M que se le da el nombre de *polo normal.*

Si (α, β) son las coordenadas del polo normal y (α', β') las del polo tangencial, se tienen las relaciones

$$\beta = \frac{c^2\beta'(\alpha'^2 - a^2)}{a^2\beta'^2 + b^2\alpha'^2}; \quad -\alpha = \frac{c^2\alpha'(\beta'^2 - b^2)}{a^2\beta'^2 + b^2\alpha'^2}.$$

Sub-tangente y sub-normal.—Si T y N son los puntos en que la tangente y la normal en un punto $M(x', y')$ de la curva cortan respectivamente al eje mayor, se tendrá

$$OT = \frac{a^2}{x'} \quad \text{y} \quad ON = \frac{c^2x'}{a^2};$$

el valor de la sub-tangente será

$$S_t = \frac{a^2 - x'^2}{x'}$$

y el de la sub-normal,

$$S_n = -\frac{b^2 x'}{a^2}.$$

Diámetro. — La ecuación de un diámetro que biseca las cuerdas cuya ecuación es $y = mx + a$ tendrá por expresión

$$a^2 y m + b^2 x = 0.$$

— Todos los diámetros de la elipse son líneas rectas que pasan por el centro.

— Entre el coeficiente angular m de un diámetro y el m' de las cuerdas que biseca, se tiene la relación

$$m\,m' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

— La tangente á la elipse en uno de los extremos de un diámetro es paralela á las cuerdas que éste biseca.

— Si dos diámetros son tales que cada uno biseca las cuerdas paralelas al otro, se llaman *diámetros conjugados.*

— La ecuación de la elipse referida á un sistema de diámetros conjugados cuyas semi-longitudes sean a' y b' es

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1,$$

idéntica en la forma á la de la elipse referida á sus ejes.

— No hay más sistemas de diámetros conjugados rectangulares que el sistema de los ejes.

El eje menor de la elipse está siempre en el ángulo obtuso de dos diámetros conjugados y el eje mayor, en el ángulo agudo.

— El ángulo obtuso de dos diámetros conjugados tiene su máximo valor cuando coinciden con las diagonales del rectángulo construído sobre los ejes.

— Las coordenadas (x', y') de uno de los extremos de un diámetro, están relacionadas con las (x, y) de uno de los extremos de su conjugado por las expresiones

$$x = \mp \frac{ay'}{b} \qquad y = \pm \frac{bx'}{a} \qquad \text{(Fórmulas de Chasles).}$$

— La suma de los cuadrados de los semidiámetros conjugados es igual á la suma de cuadrados de los semi-ejes (Apolonio).

—El paralelogramo construido sobre dos semi-diámetros conjugados es equivalente al rectángulo construído sobre los semi-ejes (Apolonio).

— La suma de los cuadrados de las distancias de un punto cualquiera de la elipse á dos diámetros conjugados iguales es constante é igual á $\frac{2\,a^2b^2}{a^2+b^2}$.

— La suma de los cuadrados de las distancias de las proyecciones de dos diámetros conjugados sobre una recta fija cualquiera es constante.

— Dos diámetros conjugados interceptan sobre una tangente á partir del punto de contacto dos segmentos, cuyo producto es igual al cuadrado del semidiámetro paralelo á la tangente.

— Mr. Chasles *(Aperçu historique*, pág. 362) fundamenta en esta propiedad la construcción de los ejes de una elipse cuando se conocen dos diámetros conjugados, procediendo de la manera siguiente: Por el extremo de uno de los diámetros conjugados dados, se traza una recta perpendicular al segundo semidiámetro; se toma sobre esta recta á partir de dicho punto dos segmentos iguales á este segundo semidiámetro; se unen por dos rectas los extremos de estos segmentos al centro de la curva, se divide en dos ángulos iguales, por otras dos rectas, el ángulo que las dos primeras forman entre si y son suplementarios, las cuales serán en dirección los dos ejes de la elipse. La suma de las dos primeras rectas será igual al eje mayor, y su diferencia nos dará el menor.

Tangentes conjugadas. — Dase este nombre á dos tangentes cuyas direcciones son conjugadas, ó bien á las tangentes en puntos conjugados de la curva.

— El lugar de los puntos desde los cuales parten las tangentes conjugadas á la elipse, es una elipse homotética á la propuesta, cuyos ejes son iguales á los de ella multiplicados por $\sqrt{2}$.

Cuerdas suplementarias. — Se dice que dos cuerdas son *suplementarias*, cuando partiendo de un mismo punto de la elipse, terminan en las extremidades de un diámetro.

— Los coeficientes angulares m y m' de dos cuerdas suplementarias están ligados por la expresión

$$m\,.\,m' = -\frac{b^2}{a^2};$$

por consiguiente, la relación que existe entre el coeficiente angular de un diámetro y el de sus cuerdas conjugadas, así como la de los coeficientes angulares de dos diámetros conjugados, es idéntica á la que existe entre los coeficientes angulares de dos curvas suplementarias. De aquí se deduce, que si por el centro de una elipse se trazan rectas paralelas á dos cuerdas suplementarias, se obtiene un sistema de diámetros conjugados.

— Si por los extremos de un diámetro cualquiera se dirigen dos cuerdas paralelas á otras dos suplementarias, dichas dos cuerdas serán también suplementarias.

— Si por un punto de la elipse se dirigen dos cuerdas cuyas direcciones son conjugadas, sus extremos son diametralmente opuestos.

Radio de curvatura. —El valor del radio de curvatura ρ, está dado por la expresión

$$\rho = \frac{(b^4 x^2 + a^4 y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4}.$$

—El radio del círculo osculador en un punto cualquiera M de la elipse, es una tercera proporcional á la distancia de este punto al diámetro de M, y á la mitad de este diámetro conjugado (Catalan).

Centro de curvatura. — En la elipse, este punto puede ser considerado como un polo normal, estando el polo tangencial correspondiente sobre el punto tomado en la curva.

Si (x, y) son las coordenadas de un punto de la elipse y (X, Y) las del centro de curvatura correspondiente,

$$X = \frac{c^2 x^3}{a^4} \qquad Y = -\frac{c^2 y^3}{b^4}.$$

Evoluta.—Ver la voz *Evoluta de la elipse.*

Cuadratura. — La superficie de la elipse es media proporcional entre las superficies de dos círculos que tienen por diámetros respectivos los ejes de esta curva.

—La elipse $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$, siendo la proyección del círculo $y^2 + x^2 = a^2$, según un ángulo cuyo coseno sea $\frac{b}{a}$; el área de esta curva deberá ser el producto de la del círculo por $\frac{b}{a}$; es decir;

$$\frac{b}{a}\pi a^2 \quad \text{ó} \quad \pi ab.$$

— El área de un segmento elíptico comprendido entre el eje mayor y dos ordenadas perpendiculares á este eje es también el producto por $\frac{b}{a}$ del área del segmento correspondiente del círculo. El área $M_0\,P_0\,M_1\,P_1$ del segmento circular es la suma de las del sector OM_0M_1 y del triángulo $OM_1\,P_1$ disminuída de la del triángulo $OM_0\,P_0$; si se nombran x_0 y x_1 las abscisas de los puntos M_0 y M_1 esta área estará representada por

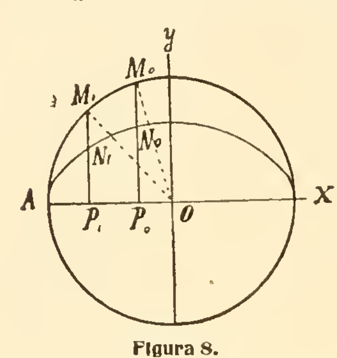


Figura 8.

$$\frac{1}{2}a^2\left(\text{arc}\,.\,\cos\frac{x_0}{a}-\text{arc}\,.\cos\frac{x_1}{a}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(x_1\sqrt{a^2-x^2_1}-x_0\sqrt{a^2-x^2_0}\right);$$

el área del segmento correspondiente de la elipse $N_0\,P_0\,P_1\,N_1$ es, por tanto,

$$\frac{1}{2}ab\left(\text{arc}\,.\cos\frac{x_0}{a}-\text{arc}\,.\cos\frac{x}{a}\right)+\frac{1}{2}\frac{b}{a}\left(x_1\sqrt{a^2-x^2_1}-x_0\sqrt{a_2-x^2_0}\right).$$

Si se toma el principio del segmento elíptico desde el extremo del eje menor, basta hacer $x_0=0$ en la fórmula anterior para tener la medida del segmento $B\,O\,P_1N_1$.

$$\frac{1}{2}a\,b\left(\frac{\pi}{2}-\text{arc}\,.\,\cos\frac{x_1}{a}\right)+\frac{1}{2}\frac{b}{a}x_1\sqrt{a^2-x^2_1}$$

ó

$$\frac{1}{2}ab\ \text{arc}\,.\,\text{sen}\ \frac{x_1}{a}+\frac{1}{2}\frac{b}{a}x_1\sqrt{a^2-x^2_1}.$$

— Esta misma área se puede representar por la integral:

$$\int_0^x\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,.\,dx,$$

y, por consecuencia,

$$\int_0^x\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,.\,dx=\frac{1}{2}ab\ \text{arc}\,.\,\text{sen}\ \frac{x}{a}+\frac{1}{2}\frac{b}{a}x\sqrt{a^2-x^2}.$$

Rectificación. —La rectificación de esta curva ha dado lugar á unas nuevas funciones trascendentes que han recibido el nombre de *funciones elípticas* y han sido estudiadas más particularmente en este siglo.

— El elemento de curva es

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{\frac{a^2 - e^2x^2}{a^2 - x^2}}.$$

— La longitud del arco de la curva comprendido entre el vértice B del eje menor y un punto $(x,\ y)$ está representado por la integral

$$\int_0^x dx\sqrt{\frac{a^2 - e^2x^2}{a^2 - x^2}},$$

esta integral tiene dos periodos, uno real

$$2\int_{-a}^{+a} dx\sqrt{\frac{a^2 - e^2x^2}{a^2 - x^2}},$$

cuyo valor no es otro que la longitud de la elipse entera, y otro imaginario

$$2\int_a^{\frac{a}{e}} dx\sqrt{\frac{a^2 - e^2x^2}{a^2 - x^2}},$$

que no ha sido todavía susceptible de interpretación. Esta integral es irreducible á las funciones circulares que no admiten más que un solo periodo.

Aplicaciones. — Tiene numerosas aplicaciones. Fuera de los innumerables usos á que se aplica en Geometría, en Sombras y Perspectiva de Sombras es de grande utilidad, en Estereotomía sirve para formar las directrices de los arcos rampantes, arcos y bóvedas elípticas, etc. En Astronomía, como órbita de los planetas. En Geodesia, como forma aproximada del meridiano terrestre, etc., etc.

ELIPSES DE DIFERENTES ESPECIES

Elipses confocales. — Si se tiene una normal á una elipse en un punto P, y á partir de este punto se toma á un lado y otro sobre esta normal dos longitudes iguales PN_1 y PN_2 tales, que el producto de PN_1 ó de PN_2 por la distancia del centro á la tangente adyacente á la normal nos da un producto constante, los lugares de los puntos N_1 y N_2 son dos *elipses confocales* del mismo centro de la elipse dada.
— Las rectas que en dos elipses confocales unen dos puntos *correspondientes*, son normales á una tercera elipse que biseca estas normales. (Dr. Heilermann.)

Elipse desvanecida. — La ecuación de la elipse *desvanecida* ó *amortiguada* no representa más que un solo punto en coordenadas reales; en coordenadas imaginarias representa las conjugadas de esta misma elipse, es decir, hipérbolas reducidas á sus asíntotas.
— La ecuación representa dos haces de rectas divergentes, el uno y el otro del centro de la elipse desvanecida. Su ecuación es la general de la elipse,

$$y = -\frac{Bx + D}{A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{(B^2 - AC)x^2 + 2(BD - AE)x + D^2 - AF},$$

cuando el término contenido bajo el radical tiene sus dos raíces iguales.
— Si el sistema de dos de estas rectas imaginarias conjugadas, vienen á ser tangentes á una de las conjugadas de una curva cualquiera, es la elipse desvanecida la que viene á ser bitangente á la curva.
— El foco se puede definir diciendo que es una *elipse desvanecida bi tangente*, según estas consideraciones y las expuestas en *círculo desvanecido bitangente*. (Ver esta voz.)

Elipse de Fregier. — Nombre dado al lugar de los puntos de Fregier.

Elipse de garganta. — Se da el nombre de *elipse de garganta* de una superficie á aquel de los paralelos elípticos de la misma que, sin ser nula, es la menor de todas.
— Esta línea tiene la propiedad de que en uno cualquiera de sus puntos, la tangente á la meridiana es paralela al eje de la superficie.

Elipses de inercia. — *Definiciones.* — Se llama *momento de inercia I* de una superficie, con relación á un eje OX (fig. 1) situado en su

plano, á la suma de los productos parciales de cada elemento de área $dw = dydx$ por el cuadrado y^2 de su distancia al eje Ox. Así, pues,

$$I = \int\int y^2 dy \cdot dx.$$

Siendo w el área total, se puede hacer $I = w \cdot r^2$, siendo r una cantidad que se llama *radio de giro*, y se tendrá:

$$r^2 = \frac{I}{w}.$$

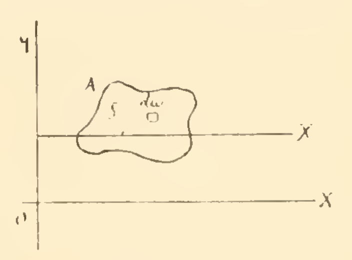


Figura 1.

— Si se representa por I_x el momento de inercia de la figura A, con respecto al eje OX, y por I_x' el relativo al eje OX', paralelo al OX y que pasa por el centro de gravedad G de la figura, y si h es la distancia entre ambos, se tiene:

$$I_x = I_x' \quad wh^2.$$

— Siempre que no se altere el valor de las áreas elementales ni de sus distancias al eje, podremos, por consiguiente, modificar su posición, moviéndolas paralelamente á dicho eje, sin que por esto cambie el valor de I.

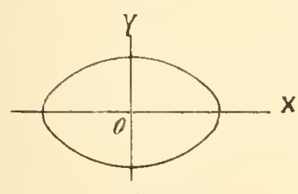


Figura 2.

Si se consideran dos ejes, OX y OY (fig. 2), trazados por el centro de gravedad de una sección, y si llamamos I_x é Y_y los momentos de inercia de esta sección con respecto á los dichos ejes, éstos tendrán por valor las expresiones:

$$I_x = \int\int y^2 dx \cdot dy; \quad I_y = \int\int x^2 \cdot dx \cdot dy$$

y sus cocientes por Ω, área de la sección, nos darán los valores de los radios de giro p_x^2 y r_y^2 con relación á los mismos ejes.

— Estas consideraciones expuestas, observaremos que si por un punto O del plano de una figura cualquiera se hacen pasar diferentes rectas con respecto á las cuales se determinan los momentos de inercia de la figura dada, y si á partir del punto O se toman sobre cada una de estas rectas longitudes tales que el producto del momento de inercia de la figura relativo á esta línea multiplicado por

el radio de giro correspondiente, sea una cantidad constante, el lugar geométrico de los puntos obtenidos es una elipse á la cual se da el nombre de *elipse de inercia.*

— Si el punto O, en lugar de ser tomado arbitrariamente, coincide con el centro de gravedad de la sección propuesta, la curva obtenida es también una elipse y ahora se la da el nombre de *elipse central de inercia* de la sección.

— Los ejes principales de la elipse de inercia correspondientes á un punto O del plano son los *ejes principales de inercia* ó simplemente los *ejes principales* relativos á este mismo punto. Los de la cónica central se les da el nombre de *ejes centrales.*

— También se puede definir la elipse de inercia de otra manera; si á cada una de las rectas OL (fig. 3), dirigidas desde un punto, O, del plano, se trazan dos paralelas, AB, $A'B'$, distantes de OL una longitud igual al radio de giro relativo á esta recta, la elipse de inercia puede ser definida como siendo la envolvente de las líneas AB, $A'B'$.

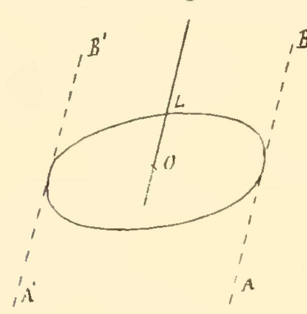


Figura 3.

Fórmulas de la elipse de inercia.—Si en un sistema de fuerzas paralelas constantes, pesos ó masas, ΔP, aplicadas á los puntos $(x, y, 1)$ se forma la suma de los productos de todos los ΔP, por las distancias p y q de los puntos de aplicación respectivos á dos rectas que pasan por un centro fijo $(x_m, y_m, 1)$, ó sea $\Sigma\, p\, q\,.\,\Delta P$, esta suma se llama *momento centrífugo (complejo*, según los italianos) con relación á las dos rectas. Se determina la posición de las rectas $(\xi, \eta, 1)$, $(\xi', \eta', 1)$ paralelas á las dadas, de manera que el producto de las distancias de estas dos rectas con relación al centro fijo multiplicada por $\Sigma\,.\,\Delta P = P$, sea igual á la suma buscada.

Para las aplicaciones prácticas todos los momentos en el plano pueden ser representados por medio de las cinco constantes siguientes:

$$a^2 = \frac{1}{P}\Sigma x^2{}_i \Delta P, \quad C = \frac{1}{P}\Sigma x_i y_i \Delta P, \quad b^2 = \frac{1}{P}\Sigma y^2{}_i \Delta P,$$

$$x_c = \frac{1}{P}\Sigma x_i \Delta P, \quad y_c = \frac{1}{P}\Sigma y_i \Delta P.$$

La ecuación tangencial de la elipse de inercia correspondiente á un centro de momentos (x_m, y_m 1) es

$$\begin{array}{llll} (a^2 - 2x_c x_m)\,\xi\xi' & + (C - x_m y_c - x_c y_m)\,\xi\eta' & - x_m\,\xi & + \\ (C - y_m x_c - y_c x_m)\,\eta\xi' & + (b^2 - 2\,y_c y_m)\,\eta\eta' & - y_m\,\eta & - \\ - x_m\,\xi' & - y_m & - 1 = 0. & \end{array}$$

Si se determinan dos rectas paralelas á las dos rectas dadas y cuyas coordenadas satisfacen á esta ecuación, el momento centrífugo con relación á las dos rectas dadas (que pasan por el punto x_m, y_m, 1) será:

$$(x_m\,\xi + y_m\,\eta + 1)\,(x_m\,\xi' + y_m\,\eta' + 1)\,\frac{\omega'^2}{\rho\rho'}\,P.$$

La ecuación de la elipse central es:

$$\begin{array}{llll} (a^2 - 2\,x^2)\,\xi\xi' & + C - 2\,x_c y_c)\,\xi\eta' & - x_c\,\xi & + \\ (C - 2 y_c x_c)\,\eta\xi' & + b^2 - 2 y^2{}_c)\,\eta\eta' & - y_c\,\eta & - \\ - x_c\;\;\xi' & - y_c\;\;\eta' & - 1 = 0. & \end{array}$$

Si se toma el origen de coordenadas en el centro de gravedad del sistema, la ecuación de una elipse de inercia cualquiera es:

$$a^2\,\xi\xi' + C\,(\xi\eta' + \xi'\eta) + b^2\,\eta\eta' - x_m\,(\xi + \xi') - y_m\,(\eta + \eta') = 1.$$

Por último, la ecuación tangencial de una elipse de inercia cuyo centro coincide con el origen de las coordenadas, es:

$$a^2\,\xi\xi' + C\,(\xi\eta' + \xi'\eta)\,b^2\,\eta\eta' = 1.$$

Si se determinan dos rectas cuyas coordenadas satisfacen á esta ecuación, el momento centrífugo con relación á dos rectas paralelas que pasan por el origen, será:

$$\frac{\omega'^2 P}{\rho\rho}$$

— La ecuación general de la elipse de inercia en coordenadas cartesianas es:

$$0 = \begin{vmatrix} a^2 & -2x_c x_m & C - x_m y_c - x_c y_m & -x_m & x \\ C - y_m y_c - y_c y_m & b^2 & -2 y_c y_m & -1 & y \\ & -x_m & -y_m & -1 & 1 \\ & x & y & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

ó

$$0 = \begin{vmatrix} a^2 & C & x_c & x_m & x \\ C & b^2 & y_c & y_m & y \\ x_c & y_c & 1 & 1 & 1 \\ x_m & y_m & 1 & 0 & 0 \\ x & y & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

La elipse de inercia correspondiente al origen de coordenadas es:

$$0 = + \begin{vmatrix} a^2 & C & x \\ C & b^2 & y \\ x & y & 1 \end{vmatrix} \quad \text{ó} \quad \frac{x^2}{a^2} + 2\frac{Cxy}{a^2 b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{C^2}{a^4 b^2}.$$

Determinación y propiedades. — Para encontrar la elipse central, bastará conocer el momento de inercia relativo á tres líneas de dirección cualquiera que pasen por su centro de gravedad, ó bien los momentos de inercia relativos á dos de estas líneas que se sepa de antemano son un sistema de diámetros conjugados de la elipse de inercia, problemas que se pueden resolver por el cálculo y también por los procedimientos de la Estática Gráfica.

— Determinada la elipse central, se conoce el momento de inercia del área dada con respecto á un eje cualquiera de su plano, por virtud de la relación antes citada entre los momentos referentes á ejes paralelos.

— Si el área dada admite un diámetro rectilíneo, esta línea, que pasa por el centro de gravedad del área y una paralela á las cuerdas que ella divide en partes iguales, dirigidas por el centro de gravedad, forman un sistema de diámetros conjugados de la elipse central, de manera que se puede construir la curva, si se conocen los momentos de inercia relativos á estas dos líneas. De aqui se deduce,

que si la superficie admite un eje de simetría, este eje y su perpendicular, dirigida por el centro de gravedad, son los ejes centrales de la superficie.

— La elipse central referente á un sistema de fuerzas paralelas Δp, guarda con las elipses de inercia del propio sistema las relaciones siguientes:

1.ª La elipse central tiene dos tangentes paralelas comunes con todas las elipses de inercia.

2.ª Los diámetros conjugados al diámetro común de las dos elipses son paralelos. El centro de gravedad del sistema está en el interior de todas las elipses.

3.ª Las fuerzas paralelas ΔP no pueden estar todas situadas en uno solo de los ángulos formados por dos diámetros conjugados, y, sobre dos diámetros conjugados cualquiera, existiendo á lo menos una que corta á la elipse central.

4.ª La diferencia de los cuadrados de las longitudes del diámetro común de la elipse central y de una elipse de inercia, es igual al cuadrado de la distancia de los centros de estas dos elipses.

— Cuando el centro de la elipse de inercia se aleja del de la elipse central en una dirección cualquiera, el diámetro conjugado á esta dirección permanece constante, mientras que el que corresponde á dicha dirección es igual á $\sqrt{x^2 + K^2}$, siendo x la distancia del nuevo centro al centro de gravedad, y K, la longitud del semi-diámetro de la elipse central correspondiente á la dirección x.

— Si todas las fuerzas se pueden agrupar de modo que los puntos de aplicación de las de un mismo grupo estén sobre una recta y que estas diferentes rectas sean paralelas, y que además, los puntos de aplicación de la resultante de cada grupo estén asimismo en una línea recta, los diámetros de la elipse central paralelos á estas dos rectas son conjugados, sucediendo lo propio para los diámetros paralelos de todas las elipses de inercia, cuyos centros estén situados sobre uno de estos diámetros de la elipse central.

— Si todas las fuerzas se pueden agrupar de modo que los centros de las elipses centrales de cada grupo aislado estén situados sobre una recta y que los diámetros conjugados á esta recta en todas las elipses sean paralelos, el diámetro paralelo á esta dirección en la elipse central de todos los sistemas es conjugado á la línea de los centros.

Casos particulares. — *Rectángulo homogéneo.* — Los ejes de simetría del rectángulo son los ejes principales de inercia. Luego la elipse central tiene sus ejes dirigidos según xx' é yy', y las magnitudes de sus semi-ejes son (fig. 4),

$$\frac{a}{\sqrt{12}} \quad \text{y} \quad \frac{b}{\sqrt{12}}$$

y su ecuación,

$$a^2x^2 + b^2y^2 = \frac{a^2b^2}{12};$$

de aquí se deduce que los radios de giro serán

$$r^2 = \frac{a^2}{12} \qquad r'^2 = \frac{b^2}{12}$$

y el momento de inercia:

$$\int_0^b ay^2dy = \frac{a\,b^3}{3}.$$

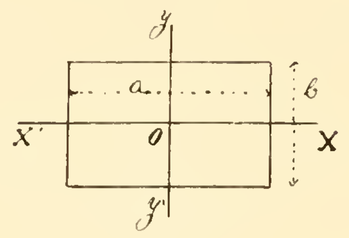


Figura 4.

Triángulo. — La mediana AI (fig. 5), siendo una línea diametral conjugada al lado BC, que divide en dos partes iguales las líneas GA y GX, pasan por el centro de gravedad del triángulo, sien-

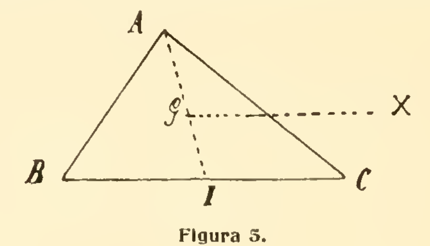


Figura 5.

do GX paralela á BC; resultan, pues, dos diámetros conjugados de la elipse central, y bastará determinar los momentos de inercia relativos á estas dos líneas, para trazar la elipse central.

El cuadrado del eje de giro relativo á BC, es $\frac{h^2}{6}$, el relativo á una paralela á BC, trazada por el centro de gravedad del triángulo, será

$$\frac{h^2}{6} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{h^2}{18}.$$

El cuadrado del radio de giro del triángulo ABC, relativo á la mediana AI, es doble del cuadrado del radio de giro relativo á AI del triángulo AIC. Este último, siendo K la longitud de la perpendicular bajada de C sobre la mediana, es $\frac{K^2}{6}$; el primero es, por lo tanto, igual á $\frac{K^2}{3}$.

Asi, pues, se tienen los elementos necesarios para trazar la elipse central.

— Si el triángulo es isósceles, las líneas GA y GX, siendo perpendiculares, serán los ejes de la elipse central. Si b es la base y h la altura del triángulo, los cuadrados de los dos radios de giro principales serán:

$$\frac{h^2}{18} \quad \text{y} \quad \frac{K^2}{3} = \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2}{3} = \frac{b^2}{12}.$$

Si el triángulo es equilátero, una mediana cualquiera es eje principal, lo cual exige que la elipse central se reduzca á un círculo.

Elipse.—Los momentos de inercia relativos á los ejes son $\frac{\pi ab^3}{4}$ y $\frac{\pi a^3 b}{4}$, y los radios de giro correspondientes

$$\frac{1}{2} b \quad \text{y} \quad \frac{1}{2} a.$$

— Como los ejes principales de la elipse dada son necesariamente los ejes centrales de la elipse central, esta elipse será semejante á la propuesta y semejantemente colocada, y sus ejes serán iguales á los semi ejes de la propuesta.

Corona circular. — La elipse central de una corona comprendida

entre dos círculos concéntricos de radio R y mR, es un círculo de radio

$$\frac{R}{2}\sqrt{1 + m^2}.$$

Aplicaciones. — Las elipses de inercia acabamos de ver cómo influyen para la determinación de los momentos de inercia, y estos momentos son de una gran importancia en Mecánica aplicada á las Construcciones, pues entran á formar parte en la ecuación de resistencia de los problemas de flexión.

$$\frac{RI}{V} = \frac{1}{n} Pl,$$

en la cual, como se sabe, I es dicho momento con relación al eje que pasa por el centro de gravedad de la sección normal al plano longitudinal de simetría en la pieza que se estudia; R, el coeficiente del trabajo; V, la máxima distancia al eje de la viga de las fibras más alejadas; n, un número que depende del caso de flexión que se considera; P, la fuerza total, aislada ó repartida, que actúa sobre la viga, y l, la longitud de la viga contada entre los apoyos ó empotramientos.

— Sobre estas líneas se pueden consultar, entre otras muchas, las siguientes obras: *La Statique graphique et ses applications aux constructions,* M. Levy (Paris, 1874); *reber die graphische Statik zur Orientirung,* J. Weyranch (Leipzig, 1874); *Graphical Method for the Analysis of Bridge Trusses,* Ch. E. Greene. (New York, 1875); *Die Graphische Statik* C. Culmann. (Zurich, 1866 y 1875); *Cours de Mécanique Appliquée aux constructions,* M. E. Collignon (1869); *Pratique de la Mécanique Appliquée á la Resistance des materiaux,* P. Planat; *Mecánica aplicada á las construcciones,* J. Marvá y Mayer. (Madrid, 1888), etc.

Se tienen trabajos también debidos á Bauschinger, Eddy, Ott, Wenck, Ebel, Chalmers, Cotteril y otros, así como tablas especiales de momentos de inercia de diferentes áreas y perfiles, entre otras, las de F. C. Paul Banlee, utilísimas á los constructores.

Elipse de Longchamps. — Elipse que tiene por centro el del círculo inscrito y pasa por los pies de las bisectrices interiores. — *Geometría* de Longchamps, pag. 69-83.

Elipse de fuerzas. — *Definición.* — Cuando las fuerzas que obran

sobre las secciones de un cuerpo son proporcionales á las longitudes de estas secciones y se determina para cada sección de un haz la fuerza que le corresponde por unidad de longitud, éstas fuerzas, tomadas en magnitud y en dirección á partir del vértice del haz, forman con las secciones un haz en involución. A una sección corresponderá, como dirección conjugada, la de la fuerza que la solicita. Los extremos de todas las fuerzas están situados sobre una elipse cuyos ejes coinciden con los de la involución ; este elipse se llama *elipse de fuerzas.*

Propiedades. — A dos secciones rectangulares corresponden como fuerzas dos diámetros conjugados de la elipse, y en particular, á las bisectrices de los ejes corresponden los diámetros conjugados iguales.

— Cuando la involución tiene dos radios dobles que, por consiguiente, dividen armónicamente todos los radios conjugados y forman dos ángulos iguales con los ejes, las fuerzas que solicitan las secciones, tomadas según estos radios, son iguales entre sí y se reducen á los esfuerzos cortantes. Estos radios dobles separan las secciones que están sujetas á las compresiones de las que lo están á las tensiones. Cada uno de dos ángulos de radios dobles contiene un eje, para la dirección del cual el esfuerzo es un máximo ó un mínimo; este esfuerzo es normal á la dirección de cada eje y no nos da lugar á ningún esfuerzo cortante.

— Cuando la involución no tiene radios dobles, no existe ninguna sección que no esté sujeta á más que á esfuerzos cortantes. Todas las secciones están sujetas á esfuerzos del mismo sentido. El esfuerzo máximo se produce según la dirección del eje mayor y el esfuerzo mínimo, según la dirección del menor. Ningún esfuerzo cortante obra según la dirección de los ejes.

— Cuando los radios dobles se confunden, y por consiguiente coinciden con uno de los ejes, la fuerza que obra sobre una sección cualquiera está siempre dirigida según este eje. La elipse de fuerzas se reduce á la recta de los radios dobles, y en la dirección de esta recta, la materia está á la vez sujeta á un esfuerzo cortante y á una compresión ó á una tensión; normalmente á esta dirección, no está sujeta sino á una compresión ó á una tensión , ó bien no está sujeta á ningún esfuerzo.

Aplicaciones. — Cuando para un punto se conocen los dos ejes, es decir, las direcciones de la mayor tensión y de la mayor compresión, y si para un punto infinitamente próximo sobre estas direcciones, se determina de nuevo las direcciones de la mayor tensión y de la ma-

yor compresión que éste sufre y así sucesivamente, se obtendrán dos trayectorias, una de las tensiones y otra de las compresiones, que en su punto de partida se cortarán en ángulo recto, y nos darán las direcciones según las cuales se trasmiten en el cuerpo las tensiones y presiones. Estas trayectorias reciben el nombre de *curva de las tensiones* y *curva de las presiones.* (Ver estas voces.)

Para más detalles puede ser consultada, entre otras obras, los *Elements de la Théorie de l'élasticité* de C. Culmann.

Elipse esférica. — Definicion. — Curva lugar de los vértices de los triángulos de igual base y cuyos otros dos lados forman una suma constante.

— Por ser esta curva la intersección de la esfera con un cono de segundo grado, que tiene su vértice en el centro, recibe el nombre de *elipse esférica.*

Historia. — Mr. Fuss es el primero que se ocupa de esta línea á fines del siglo pasado *(Nova acta Petropolitana*, t. III); Mr. Charles estudió luego las propiedades de esta cónica geométricamente y Mr. Gudermann, por el procedimiento analítico, haciendo uso de las coordenadas esféricas. El célebre profesor de Munster ha sido el primero en dar la rectificación de la elipse esférica, haciéndola depender de una trascendente elíptica de tercera especie, *Journal de Crelle* (t. XIV, 1835).

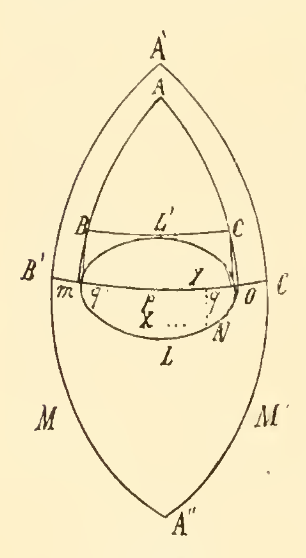
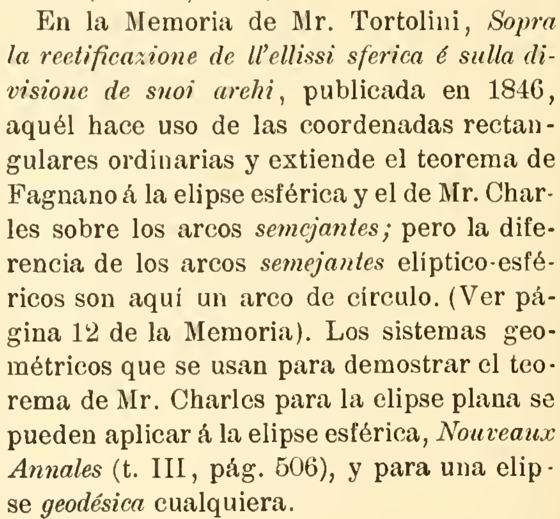
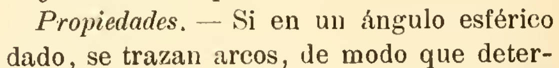


Figura 6.



En la Memoria de Mr. Tortolini, *Sopra la rettificazione de ll'ellissi sferica é sulla divisione de suoi archi*, publicada en 1846, aquél hace uso de las coordenadas rectangulares ordinarias y extiende el teorema de Fagnano á la elipse esférica y el de Mr. Charles sobre los arcos *semejantes;* pero la diferencia de los arcos *semejantes* elíptico-esféricos son aquí un arco de círculo. (Ver página 12 de la Memoria). Los sistemas geométricos que se usan para demostrar el teorema de Mr. Charles para la elipse plana se pueden aplicar á la elipse esférica, *Nouveaux Annales* (t. III, pág. 506), y para una elipse *geodésica* cualquiera.



Propiedades. — Si en un ángulo esférico dado, se trazan arcos, de modo que determinen con los lados de este ángulo, triángulos de igual superficie, la curva envolvente de todos estos arcos es una elipse esférica.

Busquemos sus elementos; sea $B\,A\,C$ el ángulo dado, si á partir de A se traza el arco $m\,o$ de círculo máximo y desde p medio de este arco tomamos

$$p\,C' = p\,B' = \frac{\pi - A}{2},$$

y si desde B' y C' como polos se describe con la distancia $\frac{B'\,C' - S}{2}$, siendo S la superficie dada, dos arcos de círculo, que se corten en A'', y se trazan los arcos de círculo máximo $A''\,B'$ y $A''\,C'$ que se cortarán en A' y desde este punto como polo se traza el arco BC; $A\,B\,C$ será la superficie S por medir,

$$A + B + C + \pi = B'\,A'' + C'\,A'' - B'\,C' = S.$$

Si ahora unimos p con A'' y se prolonga este arco hasta L en que encuentra á $B\,C$; tomamos $p\,L' = p\,L$ y $p\,q = p\,q' =$ complemento de $C'\,A''$; los cuatro puntos L, L', p, q' son los cuatro puntos de la la elipse buscada.

— Esta proposición ha sido enunciada sin demostrar, por Charles en una Memoria inserta en el *Journal de Liouiville* (t. II, pág. 102, 1837). Su demostración y la ecuación general de las *cónicas esféricas* (ver esta voz), así como otras muchas propiedades, han sido tratadas extensamente por Mr. Gudermann.

— De que esta línea resulte de la intersección de la esfera con un cono de segundo grado que tiene su vértice en el centro, resulta que ella es la línea de curvatura del cono; de modo que se puede enunciar este teorema importante: *las líneas de curvatura de los conos de segundo grado son dos elipses esféricas.*

— Si la suma de los radios vectores de la elipse esférica es igual á la semi circunferencia, la elipse es siempre un círculo máximo, cualquiera que sea la distancia de los dos focos.

Elipse imaginaria. — La ecuación de la elipse imaginaria, reducida á su forma más sencilla es

$$a^2y^2 + b^2x^2 = -a^2b^2.$$

— El lugar representado por esta ecuación se compone de las mismas hipérbolas que representa la ecuación

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2;$$

pero las características de la misma conjugada no son las mismas en las dos ecuaciones; así la conjugada $C = 0$ del lugar $a^2y^2 + b^2x^2 = -a^2b^2$ toca la elipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ en los extremos de su eje mayor, mientras que la conjugada de la misma característica $C = 0$ del lugar $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ toca á la elipse en los extremos del eje menor. La intersección se hace hasta el momento en que la elipse se desvanece, en cuyo caso los ejes se confunden.

La elipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ es la envolvente imaginaria de las conjugadas del lugar $a^2y^2 + b^2x^2 = -a^2b^2$.

Elipses inscritas y circunscritas. — Entre las primeras se cuentan las siguientes; la *de Brocard* cuyos focos coinciden con los puntos de Brocard y es la envolvente de los círculos de Tucker; la de *Lemoine* que tiene por focos el centro de gravedad del triángulo que le es inscrito y el punto de Lemoine; la de *Mandart*, cuyo centro es el punto complementario del punto de Gergonne; la de *Simmons*, cuyos focos conciden con el primer centro isógono y el primer centro isodinámico, tocando á los lados del triángulo en los pies de las rectas que unen los vértices al primer centro isógono; y la *elipse k* que tiene por centro el punto k de Lemoine y toca los lados del triángulo en los pies de las alturas.

Entre las segundas, se tiene la *elipse de Steiner*, cuyo centro es el de gravedad del triángulo que le es circunscrito y pasa por el punto de Steiner.

— Los estudios sobre estas líneas se deben principalmente á E. Vigarié, *Journal de Mathématiques Speciales*, 1889, pág. 58; encontrándose los de la elipse de Mandart publicados por éste en *Mathésis*, 1894.

Elipsoidales.

Definición. — Dáse este nombre, en Física, á ciertas curvas intersección de la superficie de las ondas por un elipsoide.

Historia.—La denominación de *elipsoidales* dada á esta clase de curvas, se debe á Mr. Lamé, *Théorie mathématique de l'elasticité des corps solides* (pág. 242 y siguientes), donde puede verse el desarrollo de los cálculos referente á lo que en resumen exponemos á continuación.

Propiedades. — La superficie de las ondas es la superficie envuelta por todas las ondas planas, concordantes y posibles á una unidad de tiempo después de su paso simultáneo por el origen. Su ecuación,

$$R = PQ + q;$$

teniéndose el grupo de las tres ecuaciones,

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= R \\ a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 &= P \\ a^2 (b^2 + c^2)\, x^2 + b^2 (c^2 - a^2)\, y^2 + c^2 (a^2 + b^2)\, z^2 &= RP + q \end{aligned}\right\}$$

el cual, considerando á R y P como dos parámetros auxiliares puede representar la superficie.

De este grupo de valores se obtiene el siguiente,

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= \frac{(R - a^2)(P - b^2 c^2)}{(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)} \\ y^2 &= \frac{(R - b^2)(P - c^2 a^2)}{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)} \\ z^2 &= \frac{(R - c^2)(P - a^2 b^2)}{(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)} \end{aligned}\right\}$$

y por medio de diferentes transformaciones de cálculo se llega á obtener la ecuación de la superficie de las ondas bajo una de las dos formas

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{P - b^2 c^2} + \frac{y^2}{P - c^2 a^2} + \frac{z^2}{P - a^2 b^2} &= 0 \\ \frac{a^2 x^2}{R - a^2} + \frac{b^2 y^2}{R - b^2} + \frac{c^2 z^2}{R - c^2} &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Ahora bien; toda esfera cuya ecuación sea

$$x^2 + y^2 + z^2 = R_1$$

corta la superficie de las ondas según una *curva esférica* que está al mismo tiempo sobre un cono cuya ecuación es:

$$S \frac{a^2 x^2}{R_1 - a^2} = 0,$$

representando por S la suma de tres términos simétricos al solo que le sigue; y todo elipsoide cuya ecuación sea

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = P_1$$

traza sobre la misma superficie una curva *elipsoidal* que está al mismo tiempo sobre un cono cuya ecuación es

$$S \frac{x^2}{P_1 - b^2 c^2} = 0.$$

— Por consiguiente, cada punto de la superficie de las ondas está determinado por la intersección de una curva esférica y una curva elipsoidal.

— Las curvas esféricas y elipsoidales se cortan en ángulo recto. En efecto; si x_1, y_1, z_1 son las coordenadas de un punto M_1 de la superficie y los parámetros R y P tienen por valores R_1 y P_1, los dos conos (1) y (2) tendrán para planos tangentes en este punto

$$S \frac{a^2 x_1 x}{R_1 - a^2} = 0, \qquad S \frac{x_1 x}{P_1 - b^2 c^2} = 0,$$

y el coseno del ángulo comprendido entre estos planos tiene por factor

$$S = \frac{a^2 x_1^2}{(R_1 - a^2)(P_1 - b^2 c^2)} = S \frac{a^2}{(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)} = \frac{1}{A} S a^2 (b^2 - c^2) = 0.$$

Por tanto, los dos conos se cortan octogonalmente. Ahora bien; la tangente á la curva esferica en M_1 es perpendicular al radio de la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = R_1$$

ó arista común de los dos conos; ella es, por consiguiente, perpendicular al cono (2), y por lo tanto, á la tangente á la curva elipsoidal.

Aplicaciones. — Descompuesta la superficie de las ondas, según acabamos de ver, por medio de las curvas elipsoidales y esféricas, en elementos rectangulares, se pueden aplicar á la misma los métodos de Mr. Charles y las propiedades de M. Liouville sobre las líneas de naturaleza diversas trazadas sobre superficie cualquiera.

Elíptico.

Definición.—Se llama arco *elíptico* aquel que está formado por una porción de elipse.

Historia. — Se le denominó también *arco del hilo* ó *á vuelta de cordel* por el sistema que usaban para trazarlo. López de Arenas, *Carpintería de lo blanco.....*, 1633, cap. XXI.

Emersión.

Definición.—Se dice *arco de emersión* de un astro, el que exige que el sol se encuentre oculto en el horizonte para dar lugar á que el astro pueda ser visto á simple vista. También se llama *arco de visión.*

Propiedades. — Este arco no es el mismo para todos los planetas; se estima su valor ordinariamente de 5° para Venus, si bien en ciertas épocas es completamente nulo; de 10° para Júpiter y Mercurio, de 11° para Saturno y de 11°,50 para Marte.

— Para las estrellas de primera magnitud se considera que el valor de este arco es de 11° á 12°; sin embargo de que Sirio es visible en pleno día en los países meridionales y sobre todo en los trópicos. Otra estrella, también de tanta apariencia como Sirio, es Cánope, en noches despejadas; pero su luz no es tan blanca como la de aquélla, resultando como más empañada, por lo que no se la ve con tanta facilidad durante los crepúsculos.

— Según Ptolomeo, el arco de emersión para las estrellas de tercera magnitud (Riccioli, *Almag.*, nov. I, 659) es de 14°.

— Para las estrellas de magnitudes inferiores al tercero, se estima en 18°, porque hasta que el sol ha descendido 18° no es posible el distinguirlas, lo cual se llama *descenso del círculo crepuscular.*

Entrada.

Definición.—Curva de *entrada* se llama á una de las dos curvas intersección de dos superficies cuando existe penetración.

Propiedades. — Si las superficies que se encuentran son de segundo grado, la curva de entrada es plana, lo mismo que la curva de salida (ver esta voz). Así, por ejemplo, un cono oblicuo que penetra en una esfera, según un primer círculo, sale necesariamente, según otro círculo.

Entre los centros.

Definición. — En Astronomía dase este nombre al arco que va perpendicularmente desde el centro de la tierra á la órbita lunar en los eclipses.

Propiedades. — Al principio y final de un eclipse, la distancia de los centros de la tierra y la luna, es igual á la suma de los semidiámetros; pero entre estas distancias extremas existe una que es perpendicular á la órbita de la luna, y por consecuencia es la más corta de todas. Esta determina el medio del eclipse.

—En el momento de la conjunción, la distancia de los centros es perpendicular á la eclíptica, y por consiguiente, igual á la latitud de la luna.

Envolvente.

Definición. — Se da este nombre á la curva lugar geométrico de las intersecciones sucesivas de una línea plana movible en su plano consigo misma.

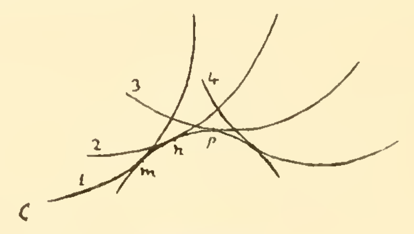


Figura 1.

Ecuación y propiedades. — Supongamos una línea C móvil que toma las diversas posiciones 1, 2, 3..... (fig. 1), las cuales se cortan sucesivamente dos á dos en los puntos m, n, p....., que hallándose suficientemente próximos determinan la línea $m\ n\ p$..... Esta línea $m\ n\ p$..... es la *envolvente* y la curva C recibe el nombre de *involuta.* (Ver esta voz.)

Sea $f(x, y, a) = 0$ la ecuación de una curva, que cambia á la vez de forma y posición en el plano cuando su parámetro varía de una manera continua; las ecuaciones de esta curva en dos posiciones infinitamente próximas serán:

$$f(x, y, a) = 0 \quad \text{y} \quad f(x, y, a + d\,a) = 0.$$

Para determinar el punto de encuentro de estas curvas, se puede á la segunda ecuación sustituirla por una combinación de otras dos; se las resta miembro á miembro, y dividiendo el resultado por da se tiene $\frac{df}{da} = 0$, obteniéndose la envolvente buscada eliminando a entre las dos ecuaciones

$$(a) \qquad f(x, y, a) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{df}{da} = 0.$$

Así, pues, *la envolvente de las involutas que corresponden á la ecuación (a) se obtienen eliminando el parámetro variable entre la ecuación dada y la derivada de áquélla tomada con relacion á dicho parámetro.*

— Si la curva móvil es invariable de figura, su movimiento puede ser considerado como el rodaje de una curva sobre otra fija en su plano. (Ver *epicicloides.)*

— En el caso en que las involutas consideradas están determinadas por una ecuación que encierra dos parámetros variables ligados por la relación

$$\varphi(\lambda, \mu) = 0,$$

se obtiene la ecuación de la envolvente eliminando λ y μ entre las tres ecuaciones:

$$f(x, y, \lambda, \mu) = 0, \quad \varphi(\lambda, \mu) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{f'_\lambda}{\varphi'_\lambda} = \frac{f'_\mu}{\varphi'_\mu},$$

la última de las cuales nos dice *que las derivadas tomadas con relación á los parámetros variables son proporcionales.*

— La envolvente es tangente á las involutas en los puntos que le son comunes con estas curvas.

Método geométrico para encontrar las envolventes.— Dada la envolvente por puntos de intersecciones de su involuta, se determinará, cuando sea posible, la situación límite en que las dos posiciones sucesivas de ésta se confundan y el problema propuesto quedará reducido á un lugar geométrico ordinario, que en algunos casos puede ser muy sencillo.

Así por ejemplo: propongamos el determinar la envolvente de los círculos que tienen su centro movible sobre una elipse dada y que pasan por uno de los focos; sean M y M' (fig. 2) dos puntos de la elipse próximos entre sí y C y C' los círculos descritos desde estos

puntos como centros respectivamente con $M F$ y $M' F$ por radios; C y C' tendrán un segundo punto común, A, simétrico de F con relación á la secante MM'. Consideremos que M' viene á confundirse con M; $M M'$ vendrá á tomar la posición $M T$ tangente á la elipse en el punto M y el límite del punto A queda bien determinado; es el punto A' simétrico de F con relación á C y se sabe que el lugar del pun-

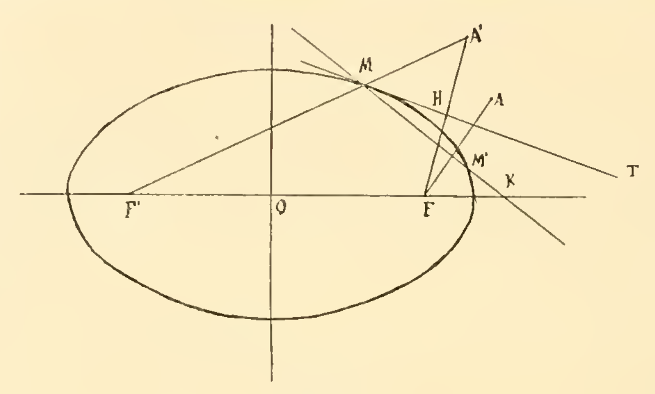


Figura 2.

to A' es el círculo director que tiene su centro en el foco F'. Esta es, por tanto, la envolvente.

Evolvente de las normales á una curva plana. — La ecuación de la normal á una curva en un punto (x, y) de esta curva es:

$$Y - y = \frac{-1}{\frac{dy}{dx}}(X - x) \quad \text{ó} \quad (Y - y)\frac{dy}{dx} + (X - x) = 0, \qquad (a)$$

siendo X é Y las coordenadas movibles, x el parámetro variable; y y $\frac{dy}{dx}$ funciones dadas de x.

— La ecuación de la normal derivada con relación á x nos da

$$(Y - y)\frac{d^2 y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0, \qquad (b)$$

y se tiene, por tanto, para obtener la envolvente buscada, aquí la evoluta, de una curva dada, $f(x, y) = 0$ que eliminar x é y entre las ecuaciones (a) y (b) y la ecuación de la curva.

Evolventes de las conjugadas de un lugar plano. — La curva real, cuando existe, es una envolvente de estas conjugadas. La curva real puede también no ser envolvente más que de una porción de estas conjugadas y se puede reducir á ciertos puntos aislados por los cuales pasen todas las conjugadas cuyas características estén comprendidas entre ciertos límites: ella puede asimismo desaparecer enteramente.

La curva real sea ó no tangente á todas sus conjugadas, puede tener otra envolvente que sería imaginaria. Los puntos de esta envolvente tienen por coordenadas las soluciones del sistema formado por la ecuación del lugar y la condición de que $\frac{dy}{dx}$ sea real.

Así, las conjugadas de la hipérbola

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = a^2 b^2$$

son todas las elipses que tienen con ella un sistema de diámetros conjugados común. (Ver *conjugadas.*) Estas conjugadas tienen por envolvente el sistema de la hipérbola ella misma y de su conjugada:

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = a^2 b^2, \qquad (a)$$

lo que está conforme con la teoría, pues esta hipérbola (a) está formada por las soluciones imaginarias sobre partes reales de la ecuación de la hipérbola primitiva,

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = - a^2 b^2,$$

y $\frac{dy}{dx}$ es real en el punto correspondiente á cada una de estas condiciones.—(Marie.)

Ejemplo de envolventes. — Las cáusticas que desempeñan un papel muy importante en la teoría de los espejos esféricos ofrecen un ejemplo de curvas envolventes muy sencillo.

— Las curvas que son ellas mismas sus envolventes han sido denominadas *Selbsthüll-curven.* (Ver *analagmáticas.*)

Epiciclo.

Del griego επι, sobre, y de κυκλος, círculo.

Definición. — Se denominaba así en Astronomía antigua á una órbita circular, sobre la cual suponíase se movían los planetas y

cuyo centro movíase asimismo sobre la circunferencia de un círculo mayor, llamado deferente (ver esta voz) y que servía para referir á movimientos regulares las irregularidades aparentes de los movimientos de los planetas.

Historia. — Conviene á este círculo lo que en la palabra *deferente* se dice.

Propiedades. — Sea un circulo fijo; si el centro de un circulo se mueve sobre la circunferencia de centro fijo, el segundo círculo hemos dicho se nombra epiciclo. Si, ademas, el centro de un tercer círculo se mueve sobre la circunferencia del primer epiciclo, este tercer círculo se nombra *segundo epiciclo*, y así sucesivamente; por tanto $(n+1)^m$, circulo es el *emé*^{mo} *epiciclo*. Se encuentra esta teoría desorrollada en *Journal de Crelle*, t. I, pág. 283.

— La combinación de dos movimientos uniformes de velocidades convenientes, sobre el epiciclo y el deferente, pueden reproducir, casi, las circunstancias del movimiento aparente del Sol, que él mismo sería explicado más sencillamente, aunque de un modo equivalente en el fondo, suponiéndole por órbita un círculo excéntrico á la tierra y cuyo centro fuese distante precisamente una longitud igual á la del epiciclo en la otra hipótesis.

La misma combinación de movimientos es bastante todavía para Venus, con esta diferencia, que mientras que el deferente y el epiciclo del Sol están necesariamente contenidos en un solo plano, aquél de la ecliptica, el del epiciclo de Venus debe formar con su deferente, contenido en el plano de la eclíptica, un ángulo tal que la latitud máxima de este planeta sea, en efecto, aquella que nos da la observación. Este ángulo, ligado á la inclinación verdadera de la órbita de este planeta sobre el plano de la ecliptica, depende también de las longitudes atribuídas á los radios del deferente y de la excéntrica, radios cuya relación está determinada por la magnitud de la digresión máxima del planeta. Por otra parte, mientras que las velocidades angulares del sol sobre su epiciclo y del centro de este epiciclo sobre el deferente deban ser iguales, se dará al centro del epiciclo de Venus sobre su deferente un movimiento precisamente igual al movimiento aparente del Sol, para tener cuenta de la igualdad de las digresiones máximas del planeta en los dos sentidos, oriental y occidental.

— El movimiento de la Luna es algo más complicado que el de Venus, porque, además que el epiciclo deba tener una cierta inclinación con respecto al deferente, es necesario también, para tener en cuenta los cambios de posición del perigeo, suponer que la Luna

tarda algún más tiempo en recorrer un epiciclo que el centro de este epiciclo tarda él mismo en recorrer su deferente. Pero aun es necesario complicar más esta hipótesis, haciendo mover la Luna sobre un segundo epiciclo de menor radio, cuyo centro describe aquel que acabamos de suponer.

—La teoría de Mercurio, cuyas digresiones máximas varían de 16° 1/4 y 28° 3/4, es aún más complicada.

Epicicloidales.

De las voces griegas ἐπι, sobre, κυκλος, círculo y ειδος, forma.

Definición. — La curva que describe un punto del plano de un círculo que rueda sin resbalar, recorriendo una circunferencia.

Pertenecen estas curvas á la clase de las trocoides (ver esta voz) y se dividen en *planas* y *esféricas*, según que los círculos fijo y movible estén en un mismo plano ó formen un ángulo constante.

Epicicloide plana. — Comprende cuatro géneros de curvas: las exteriores (*epicicloide*), é interiores (*hipocicloide*) alargadas y reducidas ó acortadas, según que el un círculo gire por fuera ó por dentro del otro ó que el punto generador se halle fuera ó dentro del círculo móvil.

Historia. — La invención de estas curvas se atribuye á Rœmer, célebre astrónomo danés (cuyas obras manuscritas se perdieron en el incendio del Observatorio de Copenhagne en 1728), que reconoce el primero, que los perfiles de los dientes de los engranajes cilíndricos deben de afectar la figura epicicloidal.

La Hire se ampara de esta idea, sin nombrar á Rœmer en su *Traité de mécanique où l'on explique ce qui est nécessaire dans la pratique des arts* (1675), y en su *Mémoire sur les épicycloides* (1694).

Se encuentran estudios de estas curvas en el libro de los *Principios*, de Newton (1687); en la obra *Lectiones Mathematicæ de Méthode integralium*, etc., de J. Bernouilli, escrita el año 1691 y en la cual se ocupa de la rectificación y de la cuadratura de estas curvas, y en los *Eléments de Géométrie*, de Clairault (1741).

La propiedad de que «cuando el radio de la circunferencia móvil es igual al diámetro de la fija, la epicicloide es el diámetro», es debida á La Hire, según unos, y á Cardan, según otros autores, propiedad muy notable, porque ofrece al arte de las máquinas, la bella transformación del movimiento circular en rectilíneo alternativo.

Asimismo, pueden verse estudios de esta clase de curvas en las *Transactions philosophiques*, núm. 128 y en las *Mémoires de l'Académie des Sciences* (1706, 1727 y 1732).

Savary, á principios de este siglo, prolonga la teoría de Descartes desarrollada en su obra *Geometría* (1637), relativa á las tangentes á estas curvas, deduciendo la construcción de sus círculos osculadores.

Epicicloide. — Ecuación. — Sea O el centro de una circunferencia fija, cuyo radio es R, y sea r el radio de la circunferencia móvil: K es el punto de contacto de las dos circunferencias al empezarse el movimiento. Escogeremos como ejes de coordenadas dos ejes octogonales que pasan por O, de tal modo que el eje de las abscisas pase por K.

En la posición K' del punto generador de la epicicloide, el centro

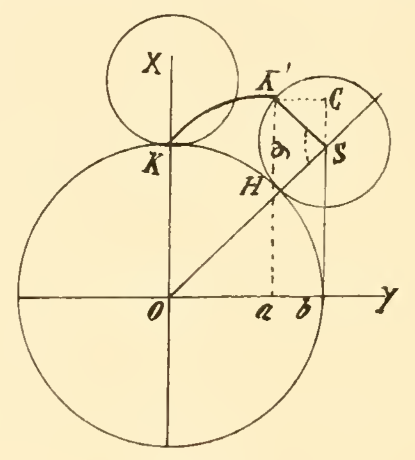


Figura 1.

del círculo móvil estará en S, y dicho círculo cortará al círculo fijo en el punto H. Tracemos las rectas aK' y bS perpendiculares al eje de las ordenadas y la $K'C$ perpendicular á ellas. Llamaremos α al ángulo que forma el radio SK' con la línea SO que une los centros de las dos circunferencias propuestas. Tendremos, por ser iguales los arcos KH y HK', que

$$\text{ángulo } KOS = \frac{r\alpha}{K} \quad \text{y ángulo } K'Sb = \frac{(r+R)\alpha}{R},$$

como las coordenadas del punto K' son

$$x = Sb + CS; \quad y = Ob - K'C,$$

se verificará

$$\left.\begin{aligned} r &= (r + R)\cos\frac{r\alpha}{R} - r.\cos\frac{(r+R)\alpha}{R} \\ y &= (r + R)\,\text{sen}\,\frac{r.\alpha}{R} - r.\text{sen}\,\frac{(r+R)\alpha}{R} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

que son los valores de las coordenadas de un punto cualquiera de la curva ó sea su ecuación cartesiana.

Estas ecuaciones se pueden abreviar si se hace en ellas $\frac{r}{R} = K$, de donde $R = \frac{r}{K}$ y tomarán la forma

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{r} &= \frac{1+K}{K}\cos.K\alpha - \cos.(K+1)\alpha \\ \frac{y}{r} &= \frac{1+K}{K}\,\text{sen}.K\alpha - \text{sen}.(K+1)\alpha \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

La expresión de la *distancia de un punto de la curva al punto O*, se obtendrá elevando al cuadrado y sumando las ecuaciones (1), y será

$$\Delta^2 = (r + R)^2 + r^2 - 2r\,(r + R)\cos.\alpha.$$

Supongamos que α varía entre los límites 0 y 2π. Cuando $\alpha = \pi$, $\cos\alpha = -1$, y en este caso A tiene su mayor valor, que es $R + 2r$. Cuando $\alpha = 0$ ó $\alpha = 2\pi$, $\cos\alpha = 1$ y Δ toma su valor mínimo que es R. Vemos, pues, que resulta un arco cuya base es igual á la circunferencia del círculo móvil. Haciendo que α variase de 2π á 4π, y así sucesivamente obtendríamos nuevos arcos de epicicloide.

Tangente. — Diferenciando las ecuaciones (2) se tendrá

$$\frac{dx}{r} = \{-(1+K)\,\text{sen}.K\alpha + (K+1)\,\text{sen}\,(K+1)\alpha\}\,d\alpha =$$

$$= (K+1)\,2.\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}\cos\left(K\alpha + \frac{\alpha}{2}\right)d\alpha$$

$$\frac{dy}{r} = \{(1+K)\cos.K\alpha - (K+1)\cos(K+1)\alpha\}\,d\alpha =$$

$$= (K+1)\,2.\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}\,\text{sen}\left(K\alpha + \frac{\alpha}{2}\right)d\alpha \quad (3)$$

de donde

$$\frac{dy}{dx} = \text{tg}.\left(K\alpha + \frac{\alpha}{2}\right), \quad (4)$$

que nos da la tangente trigonométrica de la inclinación de la tangente á la epicicloide para cada valor de la variable α, vemos que es independiente de la magnitud de los radios, aunque no de la razón que hay entre ellos, de donde deducimos que todas las epicicloides en que K es constante, son curvas semejantes.

— El número de tangentes paralelas á una recta dada en una epicicloide completa, es $p + 2q$, siendo $\frac{p}{q}$ la fracción irreducible que expresa la razón del radio del círculo fijo al del móvil.

— *La longitud del arco* se obtendrá haciendo uso de la fórmula:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

en la que, substituyendo los valores de dx, dy dados por las expresiones (3), será:

$$ds = 2r(K+1)\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\,d\alpha,$$

é integrando,

$$s = -4r(K+1)\cos\frac{\alpha}{2} + C;$$

el valor de la constante se determinará, suponiendo que el arco que se quiere medir tiene su origen en el punto K, para el cual $\alpha = 0$ y $s = 0$, y tendremos:

$$C = 4r(K+1);$$

y substituyendo:

$$s = 4r(K+1)\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right) = 8r(K+1)\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{4},$$

y si queremos el valor de la longitud total de la epicicloide, se hará $\alpha = 2\pi$, y tendremos:

$$s = 8r(K+1).$$

— *El área* estará dada por la expresión, área $= (2K+3)\pi r.^2$, si en ella hacemos $K = \frac{a}{R} = \frac{a}{\infty} = 0$, que es el caso de la cicloide, resulta para esta curva, como se sabe (V. cicloide),

$$\text{área} = 3\pi r^2.$$

— El *ángulo de contingencia* ó sea el de dos tangentes consecutivas, se ve fácilmente que tiene por valor

$$\left(K + \frac{1}{2}\right) d\alpha,$$

y por tanto el *radio de curvatura* será

$$\rho = \frac{ds}{\left(K + \frac{1}{2}\right) d\alpha} = \frac{4\,(K+1)}{2K+1}\, r \,.\, \mathrm{sen}\, \frac{1}{2}\, \alpha.$$

— *Evoluta.* — La ecuación (4) nos da diferenciada:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) \frac{2K+1}{2} \cdot \frac{d\alpha}{dx},$$

y por tanto,

$$\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{1 + \dfrac{dy^2}{dx^2}} = \frac{2K+1}{2} \cdot \frac{d\alpha}{dx}.$$

Las coordenadas de un punto de la evoluta valdrán:

$$\alpha = x - \frac{2}{2K+1} \cdot \frac{dy}{d\alpha} \quad \text{y} \quad \beta = y + \frac{2}{2K+1} \cdot \frac{dx}{d\alpha},$$

y poniendo en lugar de x é y los valores deducidos de las fórmulas (2), y ejecutando operaciones se llega á obtener,

$$\frac{\alpha}{r} = \frac{1}{2K+1} \left\{ \frac{K+1}{K} \cos .\, K\alpha + \cos\,(K+1)\,\alpha \right\}$$

$$\frac{\beta}{r} = \frac{1}{2K+1} \left\{ \frac{K+1}{K} \,\mathrm{sen}\,.\, K\alpha + \mathrm{sen}\,(K+1)\,\alpha \right\},$$

ecuaciones de la evoluta. Así, pues, la evoluta de una epicicloide es otra epicicloide de la cual el círculo generador tiene por radio:

$$r' = \frac{a}{2K+1} = \frac{Rr}{2r+R}.$$

— Mr. Gongis (*Nouveaux Annales de Maths.*, t. III, pág. 124) ha demostrado que el lugar de las parábolas que tienen un punto fijo y pasan por un punto también fijo, es una epicicloide engendrada por un punto de una circunferencia rodando sobre otra del mismo radio.

— Cuando un círculo rueda sobre otro de igual radio, la epicicloide que se obtiene es una cáustica secundaria de Quetelet. Ha recibido el nombre particular de *Cardioidea.*

Hipocicloide. — *Ecuación tangente*, etc. — La ecuación y demás expresiones correspondientes á esta curva, no difieren de las apuntadas para la epicicloide, más que en la sustitución, en las de esta curva de $R - r$ en lugar de $R + r$. Así, por ejemplo, su ecuación será:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{r} &= \frac{1-K}{K} \cos . K\alpha + \cos (K-1)\alpha \\ \frac{y}{r} &= \frac{1-K}{K} \operatorname{sen} . K\alpha + \operatorname{sen} (K-1)\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Propiedades. — Si el radio del círculo móvil es mitad del círculo fijo, la hipocicloide se reduce á una línea recta; que es la propiedad atribuída á La Hire ó Cardan, de que hablamos al principio. En efecto; haciendo $r = \frac{1}{2} R$

$$K = \frac{r}{R} = \frac{1}{2},$$

y la segunda de las ecuaciones (5) tomará la forma

$$\frac{y}{r} = \operatorname{sen} \frac{1}{2}\alpha + \operatorname{sen}\left(-\frac{1}{2}\alpha\right) = \operatorname{sen} \frac{1}{2}\alpha - \operatorname{sen} \frac{1}{2}\alpha = 0,$$

ó bien,

$$y = 0,$$

que representa el eje de las x.

— Si el radio del círculo móvil es la cuarta parte del fijo, es decir, si $r = \frac{1}{4} R$, lo que nos da, $K = \frac{r}{R} = \frac{1}{4}$, las ecuaciones (5) tomarán los valores:

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{r} &= 3\cos\frac{\alpha}{4} + \cos\frac{3\alpha}{4} \\ \frac{y}{r} &= 3\,\text{sen}\,\frac{\alpha}{4} - \text{sen}\,\frac{3\alpha}{4}\end{aligned}\right\}\ \text{ó}\ \left.\begin{aligned}\frac{x}{r} &= 4\cos^3\frac{\alpha}{4} \\ \frac{y}{r} &= 4\,\text{sen}^3\frac{\alpha}{4}\end{aligned}\right\}\ \text{de donde}\ \left\{\begin{aligned}\cos\frac{\alpha}{4} &= \sqrt[3]{\frac{x}{4\alpha}} \\ \text{sen}\frac{\alpha}{4} &= \sqrt[3]{\frac{y}{4\alpha}};\end{aligned}\right.$$

y por lo tanto,

$$\sqrt[3]{\frac{x^2}{(4a)^2}} + \sqrt[3]{\frac{y^2}{(4a)^2}} = 1,$$

ó bien,

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = (4a)^{\frac{2}{3}},$$

y como $4\,a = R$, se tendrá para ecuación de la tal hipocicloide,

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}.$$

— El número de tangentes á la hipocicloide paralelas á una recta dada, es $p - 2\,q$, siendo como antes queda dicho $\frac{p}{q}$ la fracción irreducible que expresa la razón del radio del círculo fijo al del móvil.

—M. Vidal (*Nouveaux Annales de Math.*, t. II, pág. 496) ha demostrado que la envolvente de una recta de longitud constante que se apoya sobre los lados de un ángulo recto, es la hipocicloide engendrada por una circunferencia rodando interiormente sobre otra, cuyo radio sea cuatro veces mayor.

— La hipocicloide de cuatro retrocesos ha recibido el nombre particular de *astroide* por Amstein. También la llamó *cubo-cicloyde* Montucci. Ver *Nouvelles Annales*, 1874, 1880 y 1885.

Epicicloides é hipocicloides, alargadas y reducidas. — Si en lugar de tomar por punto generador uno de los puntos de la circunferencia móvil, se toma un punto más alejado del centro, se obtiene una curva tal como la $m_1\,d_1\,n_1$, á la cual se da el nombre de epicicloide *alargada*. Si, por el contrario, se toma un punto más próximo al centro, se obtiene una curva tal como la $m_2\,d_2\,n_2$, á la que se denomina epicicloide *reducida ó acortada*. Las mismas variedades existen para las curvas hipocicloidales; siendo de notar el caso aquel de

que el radio del círculo móvil es mitad del del círculo fijo ó sea cuando la hipocicloide se reduce á una línea recta, pues en este caso la hipocicloide *alargada* ó *reducida* viene á ser una elipse.

— Estas curvas pueden ser representadas por ecuaciones análogas á las (1) que han representado á las naturales. Llamando d la distancia del punto generador al centro del círculo móvil, se encontraría que las ecuaciones serán:

$$x = (r \pm R) \cos \frac{r\alpha}{R} \mp d \, . \cos \frac{(r \pm R)\,\alpha}{R}$$

$$y = (r \pm R) \operatorname{sen} \frac{r\alpha}{R} \mp d \, . \operatorname{sen} \frac{(r \pm R)\,\alpha}{R},$$

en estas fórmulas, el signo superior conviene á las epicicloides y el inferior, á las hipocicloides.

— Significaremos por último una propiedad general á las curvas epi-

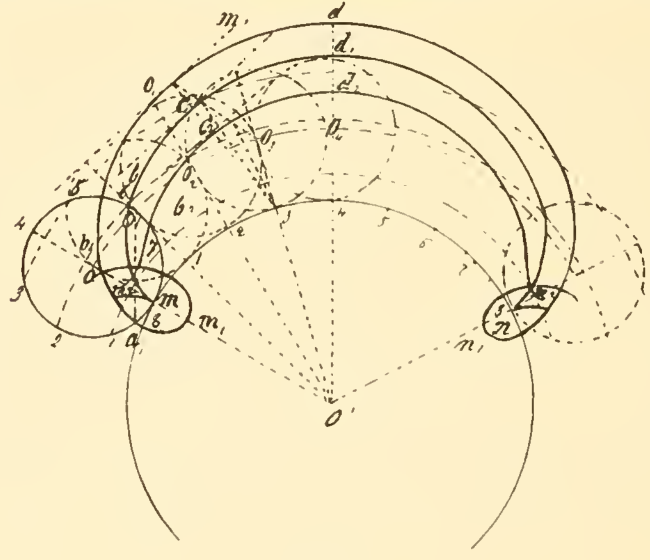


Figura 2.

cicloidales y que es, que todas ellas pueden ser engendradas por la rotación de dos círculos diferentes sobre un mismo círculo.

Trazado. — El trazado de estas curvas puede efectuarse de dos maneras diferentes, por puntos siguiendo un procedimiento gráfico, ó por un trazado continuo sirviéndose de aparatos construidos al efecto.

Por el primer procedimiento, si se trata de epicicloides (*Geometría Descriptiva*, Elizalde, pág. 150), sean dos circunferencias cuyos centros son O y O′; y m el punto generador, al rodar la primera sobre la segunda, los elementos de aquélla se ajustarán sucesivamente sobre porciones iguales de ésta, de modo que cuando la móvil venga á tocar á la fija en un punto cualquiera, 3′, ocupará la posición de la circunferencia O_3, tangente á la O_1 en el punto 3′ y tomando sobre ella un arco, 3′ c, de la misma longitud que el m 3′, se tendrá el punto correspondiente de la curva. Del mismo modo se podrán obtener cuantos puntos se quieran; pero se usa generalmente otro procedimiento más rápido, y es el siguiente: se divide la circunferencia móvil en un número cualquiera de partes iguales y se llevan sobre la fija á partir del punto generador. Por cada uno de los puntos que así resultan en la circunferencia fija se traza una tangente á ella y de radio igual al de la móvil, teniendo todas ellas sus centros sobre una concéntrica á las O′ y cuyo radio será $OO' = O'm + mO$. Para obtener en cada una de ellas el lugar que ocupa el punto generador, basta encontrar su intersección con una circunferencia concéntrica á la fija, y cuyo radio sea la distancia de su centro al punto de división, que en la móvil corresponde al número de divisiones que el punto de contacto primitivo haya recorrido hasta el de contacto actual. Así, por ejemplo, cuando el punto de contacto sea el 3′, el generador se hallará en c_1, que es la intersección de la circunferencia, cuyo centro es O_3, con la descrita desde O′ como centro con el radio O′3. Luego si trazamos desde O′ como centro y con los radios O′1, O′2, O′3..... que corresponden á los puntos de división de la circunferencia móvil otras que corten sucesivamente á las posiciones correspondientes de aquélla, los puntos a, b, c..... pertenecerán á la epicicloide natural que buscamos.

Para trazar las epicicloides alargada y reducida se seguirá un método análogo al adoptado para las cicloides (ver esta voz); de suerte que, si suponemos obtenido un punto c de la epicicloide natural, se tendrá el correspondiente de la alargada, que origina el punto m, y el de la reducida engendrada por el m_2, tomando en la recta O_3c las magnitudes $cc_1 = m\,m_1$ y $cc_2 = m\,m_2$.

Si la relación de los radios es inconmensurable, las ramas de esta curva se suceden indefinidamente. La unión de cada dos de ellas, se hace por puntos de retroceso de primera especie, situados en la circunferencia fija. La epicicloide alargada resulta ser una curva de nudo, que presenta tantos puntos múltiplos como sean los de retroceso que tenga la natural, y la reducida tendrá tantos pares de pun-

tos de inflexión cuantas sean las ramas de la curva. Si la relación de los radios es conmensurable, al cabo de un cierto número de ramas, según sea dicha relación, se reproducirán éstas sobre sí mismas.

Cuando se trata del trazado de hipocicloides, supongamos para mayor facilidad, puesto que ello no quita generalidad al método, que los radios de las circunferencias dadas tengan la relación de uno á tres por ejemplo. Divídase la circunferencia móvil en un número cualquiera de partes iguales, y la fija en un número triple de



Figura 3.

ésta, con lo cual las magnitudes de las divisiones en una y otra serán iguales.

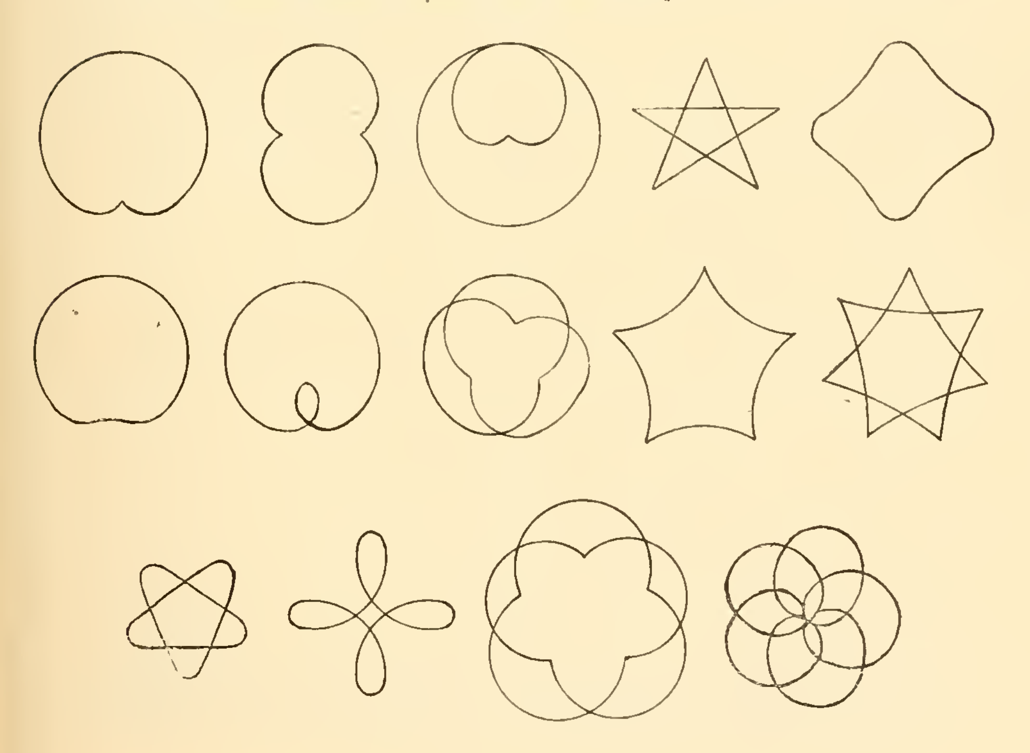
Para hallar los diferentes puntos de la curva, se trazará en cada uno de los de división de la circunferencia fija, y tangente interiormente á ella, una igual á la móvil. En la posición correspondiente de esta última, y á partir del punto de contacto hacia el lado en que se verifica el movimiento, se llevarán tantas divisiones de las obtenidas cuantas sean las que haya entre la posición primitiva del citado punto de contacto y la que ahora la suponemos. Así, en la circunferencia que se apoya en el punto $1_1'$, se tomará un arco, $1'a$, igual á una de las divisiones del círculo móvil; dos divisiones, ó sea $2'b$, para la segunda posición de este círculo; tres, ó sea $3'c$, para la tercera y análogamente para las demás. La curva *mabcdn*, que pase por los puntos así determinados, será la epicicloide que buscamos. Sus tangentes pueden obtenerse por el procedimiento expuesto

para la epicicloide exterior, conociéndose así la dirección de los diversos elementos de la curva.

Si el punto generador m_1 está fuera del círculo móvil, se obtiene la hipocicloide alargada $m_1\ a_1\ b_1\ c_1 \ldots\ n_1$, empleando las construcciones que para las epicicloides, así como en el caso en que el punto generador, m_2, está dentro del círculo, se engendra la hipocicloide reducida $m_2\ a_2\ b_2\ c_2 \ldots\ n_2$.

— El segundo de los procedimientos empleados para el trazado de estas curvas, ó sea el de obtenerlas por un movimiento continuo, se logra por medio de mecanismos muy sencillos. Se han ocupado de este objeto, Mr. Saladin en Francia, y Mr. Perigal en Inglaterra, usando sistemas particulares de ruedas dentadas, y Mr. Suardi por medio de un instrumento á que dió el nombre de *pluma geométrica*, pudiendo consultarse sobre este particular la obra *Traité de la composition des machines*, de Lantz y Betanconst.

Manifestaremos, por último, que en el *Traité de Cinématique* de Mr. Laboulaye se puede ver un gran número de curvas epicicloidales obtenidas mecánicamente por los medios indicados y de algunas de las cuales damos á continuación el dibujo.



Epicicloides anulares.— Curvas de doble curvatura, engendradas por un punto de un círculo rodando *angularmente* sobre otro círculo. Ver *Développemens de Géométrie Descriptive.*—T. Olivier, pág. 219.

Epicicloide esférica. — *Definición.* — Se llama así la curva engen-

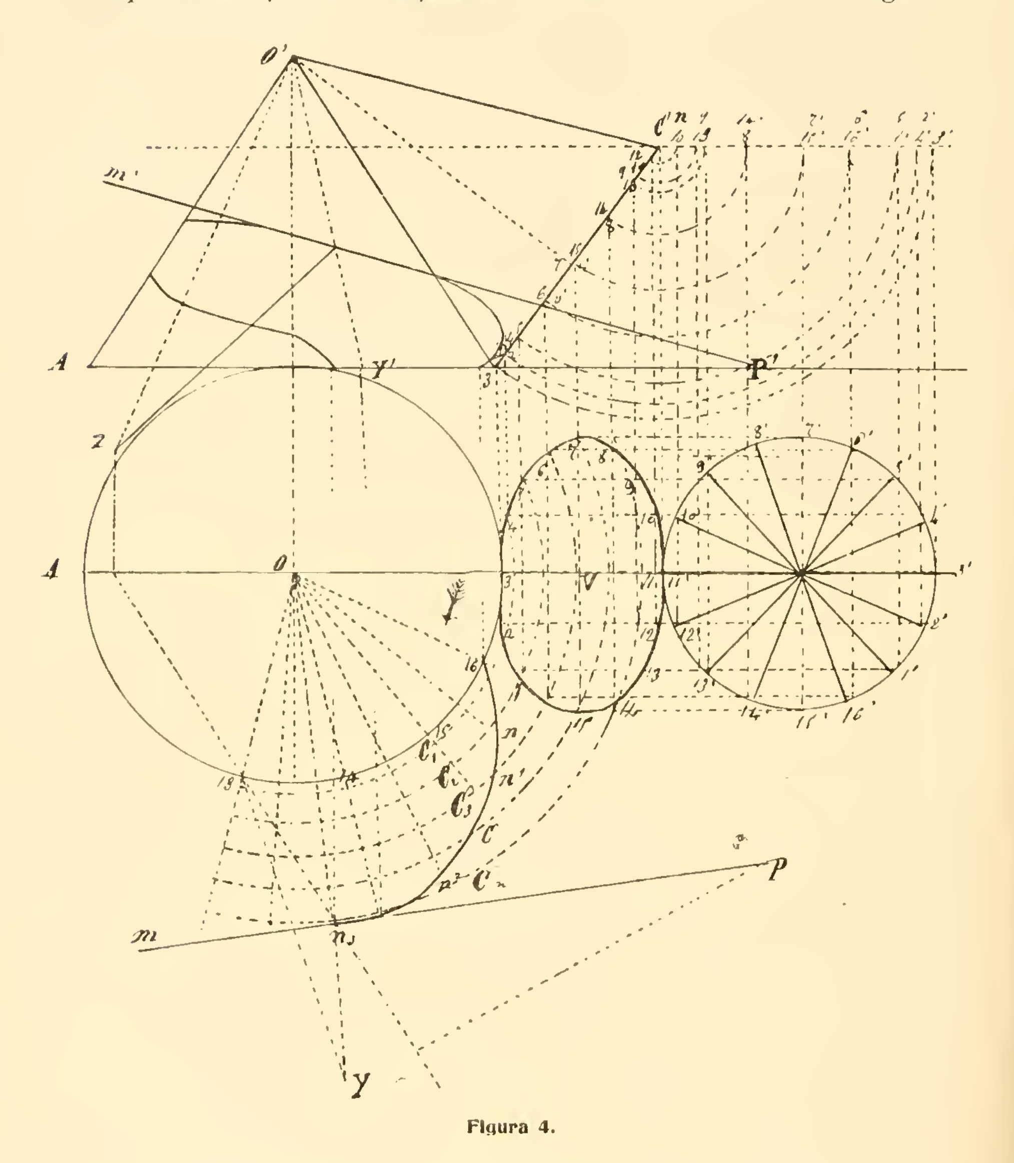


Figura 4.

drada por cada uno de los puntos de la base de un cono de revolución que rueda sin resbalar sobre otro cono también de revolución que permanece inmóvil y cuyo vértice coincide con el del primero.

Historia. — Los hermanos Bernouilli se ocuparon de esta curva; *Jacobi Bernouilli basilensi ópera* (Génova, 1744), y *Johannis Bernouilli ópera omnia* (Lausanne y Génova, 1742); haciéndolo también á principios del siglo pasado J. Hermann, matemático suizo, y Nicole, que publicó *en Recueil de l'Académie des Sciences*, un trabajo sobre ella, titulado *Théorie des epycicloides sphériques et leur rectification*, á principios del siglo pasado.

Propiedades. — Esta curva está trazada sobre una esfera, puesto que en el movimiento indicado en su definición, el punto que la engendra permanece á una distancia constante del vértice común de los dos conos, que será el radio de dicha esfera.

— Si se toma el punto que describe la curva sobre la generatriz de contacto de los dos conos en su posición primitiva, se ve que la esfera de que acabamos de hablar contiene el paralelo de cada cono que pasa por la posición inicial del punto generador, y, por lo tanto, la curva de que nos ocupamos puede considerarse engendrada por un punto de un círculo de la esfera, rodando sobre otro círculo de la misma esfera, siendo, por consiguiente, análoga á la epicicloide descrita de una manera semejante sobre un plano. De aquí el nombre de *epicicloide esférica.*

— Al propio tiempo que un punto de la circunferencia del círculo móvil describe una epicicloide esférica, todos los puntos del plano de dicho círculo describirán otras curvas que serán epicicloides, *alargadas* ó *reducidas*, según que estén fuera ó dentro de la indicada circunferencia.

Trazado gráfico. — Tomaremos como plano horizontal de proyección la base OA del cono que permanece inmóvil, y sea OA —$O'A'$ las proyecciones de dicho cono, y o' c' d' el contorno aparente del movible en proyección vertical. La proyección horizontal de la base de este último será la elipse *de* 7,15, cuyo eje, 7,15, se determina por las construcciones que se marcan en el dibujo.

Se dividirá en partes iguales la base del cono movible, para lo cual la rebatiremos sobre el plano horizontal que pasa por c. Supongamos que se hacen diez y seis divisiones iguales, las proyecciones de los puntos de división sobre la traza del plano del rebatimiento que, como sabemos, es la paralela á la línea de tierra que pase por c', estarán determinadas y vueltas á la posición primitiva de la base por medio de arcos en la proyección vertical, quedarán referidos fácilmente á la horizontal y hecha la división que queríamos. A partir del punto 3, aplicaremos, sobre la circunferencia OA, arcos iguales á los del círculo móvil. Supongamos que empieza el movi-

miento del cono en el sentido que marca la flecha; es evidente que el centro vv' de la base describirá una circunferencia en un plano horizontal que pase por él, y las proyecciones de ella serán C y C' situada sobre la traza del plano. Vamos á construir la curva trazada por el punto 16 en el movimiento.

Cuando dicho punto 16 venga á tocar á la circunferencia A, el punto 1 estará con respecto á él, en la misma posición relativa que el 4 estaba con relación al 3, cuando los ejes de ambos conos se hallaban en el plano paralelo al vertical que se considera pasa por el vértice; para obtener, pues, el punto 16 en su nueva posición, se trazará la circunferencia C_1, y en ella, á partir del punto p se tomará un arco, $pn = 4\,m$, y será n un punto de la epicicloide.

Para determinar la segunda posición del punto 16, se describirá la circunferencia C_2, y en ella, á partir de p_1 se toma un arco, $p_1\,n_1 = 5\,m_1$, el punto n_1 obtenido, pertenecerá á la epicicloide por la misma razón que el anterior. Del mismo modo se tomaría sobre la circunferencia C_3 una distancia $p_2\,n_2 = 6\,m_2$, y tendríamos un nuevo punto de la epicicloide, siendo muy fácil obtener todos cuantos se quieran, tanto más próximos, cuanto más lo estén los de división del círculo móvil.

Las proyecciones verticales de estos puntos de la curva, fácil es comprender que se hallarían sobre las trazas verticales de los círculos C_1 C_2 C_3.....

— Si se quiere trazar la tangente $m - m'$ á la epicicloide, se tendrá presente que el eje instantáneo de rotación del cono móvil, siendo la generatriz de contacto el elemento de la epicicloide, es un arco de círculo cuyo plano es perpendicular á esta generatriz; la tangente buscada estará, pues, contenida en el plano, dirigida por $m - m'$ perpendicularmente á la generatriz de contacto. Pero estando la epicicloide trazada sobre una esfera cuyo centro es oo', la tangente buscada está en el plano tangente á la esfera; es decir, en el plano dirigido por $m - m'$ perpendicularmente á la recta que une este punto al vértice. La intersección de estos dos planos será la tangente pedida. El dibujo señala estas construcciones.

Aplicaciones. — Las epicicloides son de una gran importancia por el papel que desempeñan para el trazado de los engranajes, si bien en la práctica del trazado de éstos se usan también medios aproximativos debidos á Poncelet, Willis y Tredgold.

Epitrocoide.

Definición. — Curva trocoide (ver esta voz), en el caso particular de que las líneas que la engendran son exteriores; es decir, cuando la rotativa gira por fuera de la base.

Equilibraciones.

Definición. — Si se considera un puente levadizo que puede girar alrededor de un eje horizontal; una cuerda arrollada á una polea sostiene el puente por un lado y un peso en el otro que puede resbalar á lo largo de una curva contenida en su plano vertical. Esta curva, llamada de las equilibraciones, deberá ser tal, que el equilibrio tenga lugar en todas las posiciones posibles, entre el peso del puente y el peso auxiliar.

Historia. — La solución del problema expresado en la definición anterior, fué dada por G. l'Hospital en su obra *De curva æquilibrationis (Acta eruditorum*, 1695), dándole este nombre y cuya solución damos más abajo. Juan Bernouilli pretendió que esta curva podía ser engendrada por un punto ligado á un círculo, rodando sobre otro igual y la llamó por esta razón *cicloydal.*

— Para el conocimiento detallado de los diferentes sistemas y modos de funcionar de las diferentes clases de puentes levadizos, se puede ver entre otras, las obras *Traité de la Charpente*, de Krafft, *Traité de la constructions des ponts*, de Gauthey y especialmente el *Memorial de O'fficier du Génie*, t. II.

— Mr. Belidor, *Sciences des ingenieurs*, substituye á la curva de las equilibraciones una sinusoide (ver *Sinusoide de Belidor*), curva corregida más tarde por Mr. Aimé, si bien estas correcciones resultan difíciles en la práctica.

— Mr. Delile imagina otra forma de línea que lleva su nombre (ver *Curva de Mr. Delile*), y Mr. Derché se sirve para estos objetos de curvas espirales.

Señalaremos, por último, que en la obra citada, *Memorial de O'fficier du Génie*, t. II, se encontrarán los medios y variantes propuestos por diferentes constructores, al objeto de resolver lo mejor posible, según los casos, el movimiento de los puentes levadizos, entre otros los de Mr. Bobenheim, Bergere, Crenilly, Gorselin, Thiebault, etc.

Ecuación. — Supongamos que A (fig. 1) sea el eje de rotación del

tablero AB del puente; Q, el peso de este tablero; C, la polea sobre la cual pasa la cuerda BCM, CMN, la curva de las equilibraciones; P, el peso del cuerpo que debe resbalar sobre esta curva. L'Hospital resuelve el problema considerándole puramente geométrico. *(Ante omnia anfersi debet, quod mechanicum est in questione, ut pure Geo-*

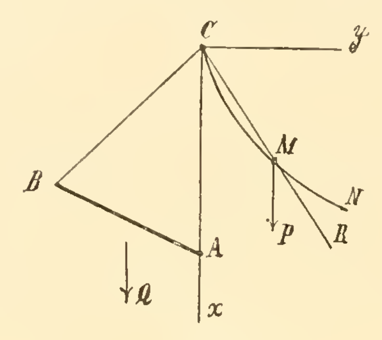


Figura 1.

métrica reddatur, dice en su obra citada), y para ello el peso del tablero supuesto en B le reemplaza por otro mitad menor, aplicado en B, haciéndole igual á AC; el peso del cuerpo M le representa por una magnitud b y designa por a la longitud total BCM.

En esta hipótesis, la curva buscada CMN, referida á los ejes Cx y Cy, está dada por la ecuación

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+y\,\dfrac{dy}{dx}} = \frac{a-\sqrt{x^2+y^2}}{b}$$

ó

$$b\,.\,dx\sqrt{x^2+y^2} = ax\,.\,dx + ay\,.\,dy - (xdx + y\,.\,dy)\sqrt{x^2+y^2};$$

es decir,

$$bdx + xdx + ydy = a\,\frac{x\,.\,dx + y\,.\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

ecuación que integrada nos da

$$bx + \frac{1}{2}(x^2+y^2) = a\sqrt{x^2+y^2} + \text{c.}^{\text{te}}$$

L'Hospital deduce de esta ecuación una manera para verificar por puntos la ecuación de la curva.

Equino.

Del griego, *echinos*, erizo.

Definición. — Perfil que afecta una moldura de superficie convexa, de forma circular, elíptica ó parabólica.

Clasificación. — Se distinguen el *recto* y el *reverso;* se llama *recto* cuando presenta su vuelo por la parte superior, y *reverso* cuando por la inferior.

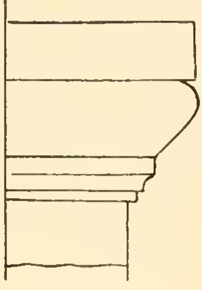


Figura 1.

En el caso particular de que el equino presenta la forma de un cuadrante de círculo, recibe el nombre de *cuarto-bocel.*

Historia.—No siempre se ha dado á este perfil el nombre actual; así se encuentra escrito, *echino*, en Serlio (*Arq.*, *trad. por Villalpando*, t. IV, pág. 7) y en Tosca (*Mathematicas*, t. V, pág. 6), y también *equino* ú *óvalo* en Castañeda, *Comp. de Vitrubio*, L. I, cap. IV. Esta denominación de *óvalo*, dada por algunos autores, es debida á que en el capitel jónico va adornado el equino con *óvolos*; produciéndose así confusión que debe evitarse.

Figura 2.

Forma. — La forma que afecta este perfil es diferente según los diversos órdenes; así, en el dórico griego es aplastado, semejante á una línea recta ó rama parabólica, aproximándose más á la primera, lo que le da un aspecto de firmeza y mucha elegancia. En el orden dórico romano, su forma es más redondeada y su aspecto más pesado.

Aplicaciones. — Este perfil se emplea, en Arquitectura, en los cornisamentos y capiteles del orden dórico principalmente y en las cornisas.

Equipotencial.

Definición. — Se da este nombre, en Física, á las superficies, *líneas* ó puntos en que el potencial es el mismo.

— Las superficies equipotenciales se denominan también superfi-

cies de nivel, y toda línea trazada sobre una superficie de esta clase es una *línea equipotencial*.

Aplicaciones y usos. — Las líneas equipotenciales, juntamente con las de fuerza (ver esta voz), ofrecen una disposición general análoga á la de las cartas topográficas sobre las que se figura el relieve de un terreno por medio de las curvas de nivel y de las líneas de máxima pendiente. Los diagramas así obtenidos permiten resolver gráficamente un gran número de problemas de electricidad práctica; consideremos como ejemplo el caso de dos masas actuantes, tales, que para una de ellas $mK = 20$ y para la otra $m'K = 5$.

Para determinar la intersección de las superficies equipotenciales formadas por los dos centros, con el plano que contienen estos puntos, se trazarán las líneas de nivel circulares de los dos centros considerados aisladamente.

Sean n_1, n_2, n_3, n_4, n_5..... los círculos trazados alrededor del pri-

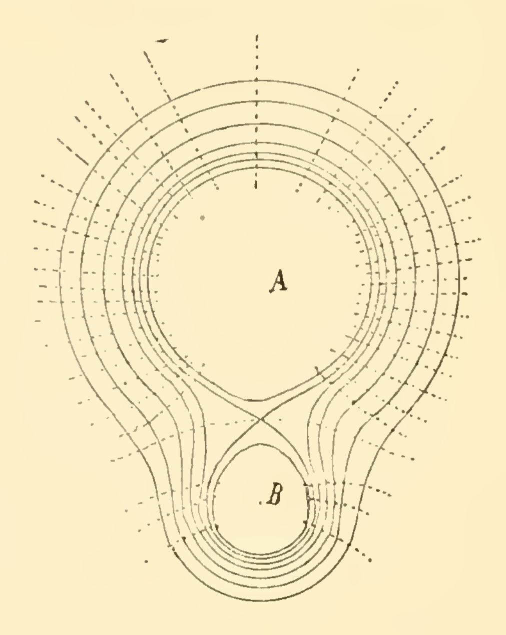


Figura 1.

mero y n'_1, n'_2, n'_3..... aquellos que lo están alrededor del segundo.

La línea equipotencial del quinto orden pasará evidentemente por las intersecciones de las circunferencias n_4, n'_1; n_3, n'_2; n_2, n'_3; n_1, n'_4.

La línea equipotencial del orden cuatro pasará por las intersec-

ciones de las circunferencias n_3, n'_1; n_2, n'_2; n_1, n'_3; y así de las demás.

En la figura 1, tomada del *Traité d'électricité et de magnetisme*, de Maxwell, las dos masas están concentradas en los puntos *A* y *B*. Las líneas llenas son las *equipotenciales*, las de trazos son las líneas de fuerza.

—A estos objetos pueden consultarse también el *Cours de Physique*, J. Jamin (t. IV, primera parte, pág. 100).

Determinación de estas líneas. — Prácticamente han sido determinadas estas líneas por diferentes experimentadores, siguiendo métodos distintos. Así, por ejemplo, Mr. Guébhard, *Journal de Physique* (2.ª serie, t. I, pág. 205; 1882), por medio de anillos movibles y siguiendo el método electroquímico; Mr. W. G. Adams, *Proceedings of the Royal Society of London; Bakerian Lecture* (XXIV, página 1, 1875); analizado en el *Traité d'électricité et de magnetisme*, de Mr. Gordon, traducido por Mr. Raynaud (t. II, pág. 78, París, 1881); ha trazado estas líneas sobre conductores atravesados por una corriente, apoyándose en el hecho de que si se reúnen los dos bornes de un galvanómetro á dos puntos tomados sobre una misma superficie equipotencial, la aguja no sufre variación, cualquiera que sea la intensidad de la corriente.

La disposición adoptada consiste en un galvanómetro Thomson que se unía á una punta, estableciendo un contacto fijo con una hoja de estaño y con un tubito que se pasaba por la superficie de la hoja. Cuando el galvanómetro quedaba inmóvil, se marcaba la posición del electrodo móvil apoyado sobre una aguja retenida por un resorte en el interior de este electrodo.

Las figuran que siguen representan algunos de estos resultados. La figura 2 se obtuvo colocando los polos de la pila sobre una hoja de estaño de 0,31 de lado, en *AB*, á 12,6 centímetros uno de otro y á la misma distancia del centro *O*. La figura 3 corresponde á una hoja de 45,72 de lado; la corriente entraba por el centro *A* y salía por los cuatro electrodos *BCDE*. Sobre la figura 4 está en *A* el electrodo positivo, siendo *B* y *C* dos electrodos negativos distantes del primero 7,6 centímetros cada uno, representando el último un disco circular en el que la corriente entra por el borde y sale por el centro. La figura 5 corresponde á un disco circular en que la corriente penetra por el centro *B* y sale por un punto *A* de la circunferencia.

—También pueden verse sobre este mismo particular, entre otros, los trabajos de Mr. Kirchhoff, *Pogg. Ann.* (t. LXIV, pág. 497, 1845); de Mr. Verdet, *Annales de Chimie et de Physique* (3.ª se-

rie, t. XL, pág. 115, 1854); de Mr. Quincke, *Pogg. Ann.* (t. XCVII, página 382, 1856); Mr. Verdet, *Annales de Chimie et de Physique* (3.ª serie, t. XLVI, pág. 203, 1856); de Mr. Chervet, *Annales de Chimie et de Physique* (6.ª serie, t. I, pág. 271, 1884), y *Journal de Physique* (2.ª serie, t. III, pág. 292), etc.

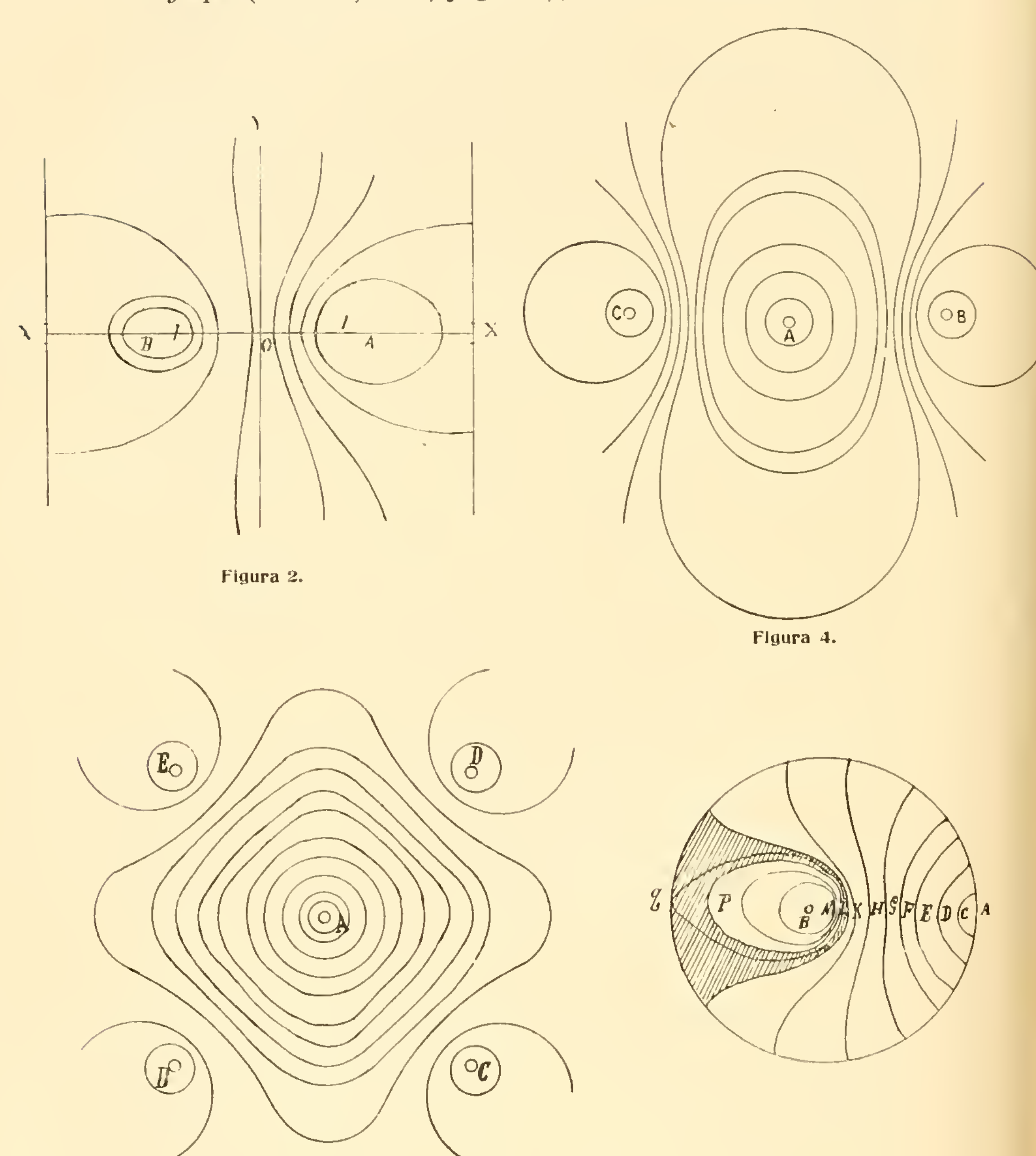


Figura 2.

Figura 4.

Figura 3.

Figura 5.

Error.

Definición. — Curvas que sirven para la resolución gráfica de una ecuación ó de un problema gráfico. Distinguiremos, por consiguiente, estos dos casos.

Historia. — Lagrange, en el *Journal de l'Ecole Politecnique* (Cuadernos VII y VIII), trata de las curvas de error y refiriéndose al método de resolver las cuestiones por medio de estas curvas, dice (página 270): «uno de los más útiles que se han imaginado, y del cual se hace uso continuo en la Astronomía, donde las soluciones directas serían muy difíciles y casi imposibles, puede servir también para resolver problemas importantes de Geometría, de Mecánica y de Física; en una palabra, es la regla de falsa posición tomada en el sentido más general, y hecha aplicable á todas las cuestiones en las cuales hay que determinar una incógnita».

Primer caso. — *Definición.* — La curva de error aplicable á la resolución gráfica de una ecuación, se la puede definir más particularmente diciendo, que es aquella cuyas abscisas son las hipótesis hechas sobre el valor de una incógnita y cuyas ordenadas representan los errores resultados de estas hipótesis.

Indicación del método. — Si $\varphi(x)$ es la relación á la cual una magnitud incógnita, x, debe satisfacer, la ecuación $y = \varphi(x)$, será la ecuación de la curva de error. El valor de x para el cual el error y es nulo, es el verdadero valor de esta incógnita.

Para construir la curva se darán á x valores distintos y se determinarán los correspondientes de y; se construirán los puntos que tienen por coordenadas los valores de x é y, y por ellos se hará pasar un trazado continuo, que será la curva de error, y sus puntos de encuentros con el eje de las x darán necesariamente á conocer los valores buscados para la incógnita.

Si dos errores sucesivos son, el uno por exceso y el otro por defecto, es decir, uno positivo y otro negativo, la curva cortará precisamente al eje de las x entre los dos puntos correspondientes y se podrá aproximar tanto como se quiera al verdadero valor de la incógnita entre las abscisas de los puntos así obtenidos, estrechando los límites considerados.

En las aplicaciones, la incógnita que se busca no suele ser susceptible más que de un sólo valor, por lo cual no resulta ambigüedad.

Segundo caso. — Cuando se emplea una curva de error para resol-

ver un problema gráfico, se buscarán las cantidades x é y de manera que para variaciones muy pequeñas de x el error y varíe entre límites bastante grandes. Esto depende de la naturaleza del problema, sin que podamos dar ninguna regla general para el citado caso.

Los ejemplos que siguen nos darán á conocer la manera de proceder en los diferentes casos de aplicación.

— Supongamos que se quiere hallar el radio de la circunferencia en la cual se pueda inscribir exactamente un polígono del que todos los lados se han dado.

Se describirá una circunferencia y se inscribirán los lados dados colocándolos unos á continuación de otros. Si el polígono cierra por sí mismo, es decir, si el último lado termina en el punto en que el primero empieza, el problema está resuelto. En general se tendrá (relativamente al radio supuesto) un error en más ó menos y el último vértice del polígono inscrito caerá más allá ó más acá del primero; de suerte, que la cuerda que une estos dos puntos *no será nula.*

Tracemos dos ejes rectangulares, tómese como abscisa el radio elegido y como ordenada la cuerda que representa ó mide el error que la elección del radio trae consigo. Variando el radio adoptado, se obtendrán diferentes cuerdas y otras tantas ordenadas, pudiéndose trazar la curva cuyo punto de intersección con el eje de la abscisa hará conocer el radio buscado. Cuando el radio sea muy pequeño se mirará el error como positivo, y cuando sea muy grande será negativo. (Lagrange.)

— Supongamos ahora que se trata de dirigir una normal común á

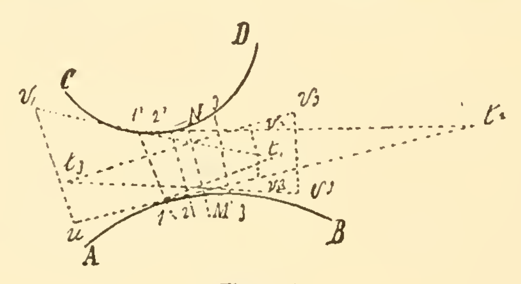


Figura 1.

dos curvas, AB y CD, á las cuales se sabe trazar las tangentes. Desde luego se reconoce á simple vista la región en que debe encontrarse la normal buscada; en esta región se toma, sobre una AB de las dos curvas, un punto, 1. Tracemos en este punto la tangente

$1 \,.\, t_1$ y la normal $1 \,.\, 1'$ que encontrará en un punto, $1'$, á la segunda curva, CD; tracemos á esta curva la tangente en el punto $1'$. Si ésta fuera paralela á la tangente $1 \,.\, t_1$, el problema estaría resuelto y $1 \,.\, 1'$ sería la normal buscada.

Ahora bien; como generalmente no pasará así, es decir, que las tangentes en 1 y $1'$ se encontrarán en un punto tal como el t_1, á partir de este punto se tomará sobre la tangente una longitud $n_1 t_1$ igual á una longitud arbitraria dada, que designaremos por l, y en el punto n_1 levantaremos sobre la primera tangente la perpendicular $n_1 v_1$ terminada en la segunda.

Teniendo lugar el encuentro de estas dos tangentes hacia la derecha, se deduce que el punto tomado sobre la curva AB no es el punto 1, sino que deberá estar situado á la derecha de este punto. Tomemos, pues, un punto 2 sobre BA y hagamos respecto de él iguales construcciones que hicimos para con el 1 y resultará que el encuentro tiene lugar todavía á la derecha y que, por consiguiente, el punto buscado está aún á la derecha del punto 2. Tomemos, pues, otro punto, 3, á la derecha de 2 y repitamos las construcciones. Esta vez las tangentes $3 \,.\, t_3$ y $3' t_3$ trazadas en los puntos 3 y $3'$ á las curvas dadas, se encuentran en t_3 á la izquierda. Tomemos $t_3 n_3$ igual á l y levantemos sobre $3 \,.\, t_3$ la perpendicular $n_3 v_3$.

Hechas estas construcciones se trazará la curva de error, tomando por abscisas los arcos $0, \; -1 \,.\, 2, \; -1 \,.\, 3$, contados á partir del punto 1, y por ordenadas las longitudes $n_1 V_1 - n_2 V_2 - n_3 V_3$ proporcionales á las tangentes trigonométricas de los ángulos en t_1, t_2 y t_3. Sobre una recta, XX, se toma arbitrariamente un punto 1; luego, á partir de este punto, se llevan las longitudes $1 \,.\, 2$ y $1 \,.\, 3$, respectivamente iguales á los arcos del mismo nombre, sobre la figura 1. En los puntos 1, 2 y 3 se levantarán los perpendiculares á XX y tomaremos sobre estas perpendiculares las longitudes

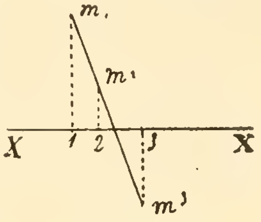


Figura 2.

$$1 \,.\, m_1 = n_1 v_1, \quad 2\, m_2 = n_2 v_2 \;\; \text{y} \;\; 3\, m_3 = n_3 v_3,$$

teniendo en cuenta que la última de estas longitudes se deberá tomar en sentido contrario de las otras dos, atendiendo á que el ángulo en t_3 está en sentido contrario de los ángulos en t_1 y t_2. Por los puntos m_1, m_2 y m_3, así determinados, se hace pasar un trazado continuo y ésta será la curva de error.

Esta curva corta al eje XX en un punto M. Tomando sobre la curva AB, á partir del punto 1, un arco 1 . M igual á la abscisa del mismo número sobre XX, el punto M así obtenido será el punto buscado; es decir, que si se traza en M la normal á la curva AB, cortará á la curva CD en un punto N tal, que las tangentes en M y N formarán entre sí un ángulo cuya tangente trigonométrica será nula y por lo tanto serán paralelas. Así, pues, MN será la normal común. (Sonnet.)

Otros casos del empleo de esta clase de curvas se pueden ver en el artículo *Gráficas*.

Aplicaciones. — Los ejemplos anteriores nos dicen cómo las curvas de error (que algunos nombran *de tanteo*) pueden emplearse bien para el cálculo de cantidades que no son susceptibles de evaluarse con todo rigor y obtener así un valor aproximado; bien en Geometría para la determinación de ciertos puntos que no pueden ser obtenidos de una manera directa, tales, por ejemplo, como el punto más alto y el más bajo de la intersección de dos superficies, el de tangencia á una curva gráfica, etc.

Escarabajo.

Definición. — Curva formada por los lugares de los pies de las perpendiculares bajadas desde un punto de la bisectriz de un ángulo recto, sobre una línea de una longitud constante cuyos extremos resbalan sobre los lados de este ángulo.

Ecuación. — Tomando como ejes coordenados las bisectrices del ángulo dado, y haciendo $2b$ igual á la longitud constante y a igual á la distancia del vértice del ángulo dado al punto fijo, se tiene para ecuación de esta línea:

$$(x^2 + y^2 + ax)^2 (x^2 + y^2) = b^2 (x^2 - y^2)^2.$$

— Si se toma como polo el vértice del ángulo dado y su bisectriz como eje polar, su ecuación en coordenadas polares, será:

$$\rho = b \,.\, \cos \,.\, 2w - a \,.\, \cos \,.\, w.$$

Puede verse: *Traité de Analyse*. Laurent. T. II, pág. 183. La *Geométrié Analytique*, de Painvin, pág. 432, etc.

Escarzano.

Definición. — Se llama arco *escarzano* aquel cuya curva es circular, pero menor que la semi-circunferencia, es decir, que su flecha es menor que la mitad de la luz.

El centro de este arco se encontrará más bajo que la línea de sus arranques.

Historia. — Esta denominación de *escarzano* se encuentra usada por Fr. Lorenzo de San Nicolás, *Arte y uso de Arquitectura* (P. I., cap. XXXVIII), y también por Serlio, *Arquitectura, trad. por Villalpando* (Lib. IV, pág. 13), habiéndosele conocido igualmente con el nombre de *escazari, Ordenanzas de Sevilla* (Tít. Albañiles, página 15, V).

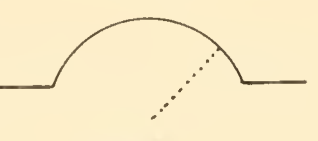


Figura 1.

Aplicaciones. — Se usa hoy particular y preferentemente á otros, para los puentes, porque á la vez que se aumenta la sección de desagüe, se eleva poco la rasante de la vía.

Escocia.

Definición. — Curva de forma cóncava, usada como perfil de una moldura, empleada generalmente en las bases de las columnas ó de un edificio.

Historia. — En Vignola, *Tratado de los cinco órdenes de la Arquitectura*, se encuentran las reglas para el trazado de esta curva, así como las proporciones que debe de guardar esta moldura en los órdenes jónico, corintio y compuesto en que se la encuentra.

Clasificación. — Según su situación, se distinguen (en el caso de haber dos en una misma basa de columna) con el nombre de *escocia superior*, la más aproximada al fuste, y de *escocia inferior*, la que sigue descendiendo hacia el zócalo.

Según su forma, se obtiene la *escocia recta* y la *inversa*. La primera presenta su mayor vuelo en la parte baja (fig. 1), y la segunda, en su parte superior. También se tiene la *escocia de la basa ática*, la cual se obtiene por un trazado especial que abajo detallamos.

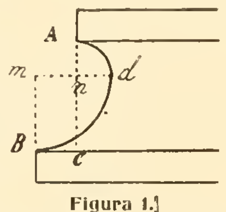


Figura 1.]

Trazado. — El trazado de esta curva puede hacerse por puntos ó por arcos de círculo que se acuerdan por contacto interior.

Primer método. — Por puntos. —Unanse los extremos A y B (figura 3) de los filetes superior é inferior de la escocia, por una linea recta, AB, la cual se toma como diámetro y sobre la que se describe una semi-circunferencia. Trazada ésta, se dirigen las ordenadas $11'$, $22'$, $33'$..... que se limitan en los puntos de la curva. Por los puntos 1, 2, 3..... se trazan las paralelas á MA y mB y se toman respectivamente sobre estas paralelas $11''$ $22''$..... iguales á $11'$, $22'$..... luego, uniendo los puntos $1''$, $2''$, $3''$..... por un trazado continuo, se determina la *escocia*, que, en este caso, será una porción de elipse.

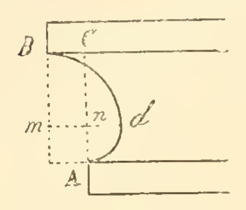


Figura 2.

Segundo método.—Por arcos de círculos. — Se trazan con dos y con cuatro centros.—La primera se hace del modo siguiente: sean A y B (figuras 1 y 2) los puntos por donde debe pasar la escocia; trácense las rectas AC y Bm, perpendiculares á las líneas de los filetes, y tomando sobre AC una distancia $An = \frac{1}{3} AC$, se determina el punto n; trazando por este punto la nm, paralela á las lineas de los filetes, el punto m en que corta á la Bm será un centro, siendo el otro el n antes hallado. Haciendo centro en estos puntos y trazando los arcos Ad y dB, queda obtenida la curva buscada. La segunda, ó sea la escocia de cuatro centros, se construye de la manera siguiente: levántense en los puntos A y B dos rectas (fig. 4) perpendiculares á los filetes, y divídase la altura Am en tres partes iguales: por el primer punto O de división se traza la recta OC, paralela á las líneas de los filetes, y con el radio OA, haciendo centro en O, se traza el cuadrante AC. Se divide el radio OC en cuatro partes iguales, se prolonga la OC, se toma $OO' = \frac{1}{4} OC$, y haciendo centro en O', con el radio OC, se traza un árco, *cd*, igual á

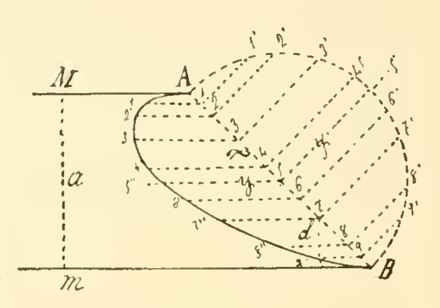


Figura 3.

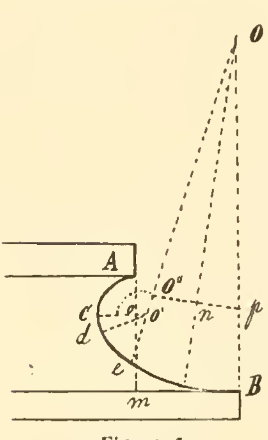


Figura 4.

la mitad de OC. Hecho esto, se traza la recta do', y en su prolongación se toma $O' O'' = \frac{1}{2} OC$; se hace centro en O'', y con el radio $O''d$, se traza el arco dc. Tómese ahora $Bp = dO''$ y trácese la recta $O''p$; luego, por el punto medio de esta línea $O''p$, se levanta, á la misma, la perpendicular nO, la cual cortará en O á la Bp; se une este punto O con el O'', y haciendo centro en O con el radio OB, se traza el arco eB, y quedará formada la escocia $AcdeB$.

Escocia de la basa ática — El trazado de esta curva se verifica como sigue: por el punto A (fig. 5), se traza una vertical, Ac, indefinida, y por el B, una horizontal, Bd, que corta á la Ac en el punto d. Se toma el punto medio O de la línea Ad, y se dirige por este punto la horizontal indefinida ef, y haciendo centro en O con el radio OA, se traza el arco Ae. Se une el punto obtenido e con el B, se traza á la recta eB la perpendicular nm en su punto medio, y el punto O' en que esta perpendicular corta á la línea ef, se toma como centro de un arco eB de radio eO' que, unido al eA, forma la curva pedida.

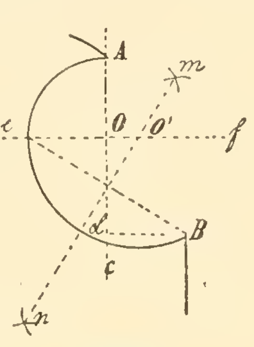


Figura 5.

Terminaremos diciendo, que la mayor parte de los arquitectos trazan esta curva sin el auxilio del compás, prefiriendo guiarse por el gusto más que por las reglas geométricas.

Esféricas.

Definición. —Reciben este nombre las curvas situadas sobre la superficie de la esfera.

Historia. — Mr. Gudermann, en 1835, publicó un Tratado especial sobre estas curvas, ó sea sobre la *Esfero-Geometría Analítica*, estudiando esta superficie por medio de un sistema de coordenadas geodésicas, tomando por ejes la meridiana y el ecuador, proyectando octogonalmente cada punto de la esfera sobre estos ejes por medio de líneas geodésicas y tomando por *coordenadas* las *tangentes* de los arcos interceptados sobre los ejes desde el origen; y en 1847, Mr. Borguet, *Essai de géométrie analytique de la sphere*, el cual, y en la parte IV, las líneas esféricas son expresadas por ecuaciones entre la longitud y la latitud de sus puntos, sistema que presenta algunas ventajas sobre el anterior por hacer más fáciles las ecuaciones de ciertas líneas de uso frecuente; pero como aquél tiene este sistema

el inconveniente de no ofrecer caracteres diferenciales para la clasificación de las curvas.

Mr. Borguet aplica su sistema á la determinación de los espacios cuadrables de Viviani, á la rectificación de la loxodromia esférica, á la formación de la ecuación de las proyecciones estereográficas, á la consideración de la espiral de Pappus, á las clelies de Guido Grandi, etc.

Clasificación.—Las líneas esféricas se dividen en dos clases: aquellas cuyas ecuaciones no contienen más que las tangentes trigonométricas de las coordenadas, se llaman *algebraicas*, y todas las demás se llaman *trascendentes.*

Esta clasificación es atendiendo á que el sistema de coordenadas aceptado, sea la una la longitud y la otra, si bien no es la latitud, es una distancia que contada sobre el primer meridiano se encuentre en las mismas condiciones que la longitud contada sobre el ecuador.

— Las líneas algebraicas se dividen en líneas de diferentes órdenes, según el grado de su ecuación.

— Las trascendentes no están sujetas á ninguna clasificación.

Propiedades. —Toda ecuación algebraica de primer grado representa un círculo máximo; la de segundo orden, una cónica esférica (ver esta voz), ó sea la intersección de un cono de segundo grado cuyo vértice está en el centro de la esfera. En general, toda línea algebraica del orden n resulta de la intersección de la esfera con un cono que tenga su vértice en el centro y cuya ecuación en coordenadas rectilíneas sea del grado n.

— Una línea esférica de grado impar tiene necesariamente un número impar de curvas simples (ver esta voz) y un número impar de puntos de inflexión, y toda línea esférica de grado par tiene un número par de curvas simples y un número cero ó par de puntos de inflexión.

— Mr. Lamé aplica esta denominación de *esféricas* á la intersección de una esfera con la superficie de las ondas. (Ver *elipsoidales.*)

Esferolemniscata.

Definición. — Esta curva es el lugar de los puntos tomados sobre los círculos máximos de una esfera, dirigidos desde el centro de una hipérbola equilátera esférica, perpendicularmente á sus tangentes de modo que sus distancias al centro quedan por éstas divididas en partes iguales.

Clasificación. — Se distinguen la *esferolemniscata* tal como la hemos definido y la *esferolemniscata de segunda especie* originada del propio modo que aquélla, sin más diferencia que la hipérbola equilátera esférica que se toma para su generación; sea asimismo una hipérbola equilátera esférica de segunda especie.

Historia. — Las denominaciones dadas á estas curvas provienen de sus analogías con la lemniscata de Bernouilli (ver esta voz), que se obtiene según un método parecido, sirviéndose de una hipérbola equilátera plana, y tanto estos nombres como el estudio de sus propiedades ha sido propuesto por M. Strebor (*Nouv. Ann.*, T. VII, páginas 137 y 452).

Esferolemniscata. — *Propiedades.* — Esta curva coincide con el lugar geométrico del vértice de un triángulo esférico cuya base sea dada, y en el cual el producto de los senos de los semi-lados es constante é igual al cuadrado del seno de la cuarta parte de la base.

—La base del triángulo que se acaba de indicar es la distancia entre los focos contiguos de las ramas opuestas de la hipérbola equilátera esférica, de la cual se deriva la esfero lemniscata.

— El arco de esta curva se expresa exactamente por una función elíptica de primera especie sin adición alguna.

Esferolemniscata de segunda especie. — *Propiedades.* — Esta curva tiene por ecuación polar central la siguiente:

$$tg^2 \frac{1}{2} \rho = tg^2 \alpha . \cos. 2 \omega.$$

— Esta curva coincide con el lugar del vértice de un triángulo esférico, cuya base sea dada y en que el producto de las tangentes trigonométricas de sus semi-lados es constante é igual al cuadrado de la tangente trigonométrica de la cuarta parte de la base.

— Como en la esferolemniscata, la base del triángulo que se acaba de indicar, coincide con la distancia que hay entre los focos contiguos de las ramas opuestas de la hipérbola equilátera esférica, de la que se deriva la curva de que nos ocupamos.

— Sabemos que el arco de lemniscata de Bernouilli se expresa por una función elíptica de primera especie de módulo $\sqrt{\frac{1}{2}}$. Pues bien, el arco de la esferolemniscata esférica de segunda especie, se expresa por una función elíptica de tercera especie de módulo $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Espacios (Curva de los).

Definición. — Curva representativa del movimiento de un punto material y que se traza tomando por abscisas los tiempos y los espacios por coordenadas.

Determinación de la curva. — Como el movimiento de un punto se puede estudiar independientemente de su trayectoria, se puede buscar la ley de este movimiento; es decir, una relación entre el espacio recorrido á partir de un origen fijo marcado sobre la trayectoria y el tiempo transcurrido á partir de un momento dado.

Esta ley, expresada por una ecuación, $e = f(t)$, en que e y t representan el espacio y el tiempo, puede ser construída por puntos, refiriéndola á dos ejes rectangulares, originando una curva, cuyas ordenadas sean los valores de e y las abscisas, los de t. La longitud destinada á representar la unidad de tiempo, es naturalmente arbitraria, y respecto á las ordenadas se pueden tomar en una relación cualquiera á voluntad. Es, sin embargo, ventajoso adoptar la misma longitud para representar la unidad de tiempo y la de espacio, el segundo y el metro.

Dando á t un número suficiente de valores, se trazarán cuantos puntos se juzguen necesarios para hacer el trazado de la curva á mano.

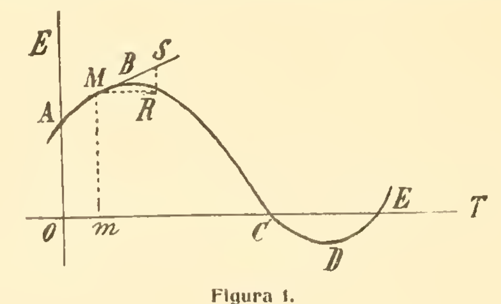


Figura 1.

Si la ley que liga los espacios á los tiempos no es conocida y sí sólo algunos valores de e correspondientes á otros de t, se construirán estos valores y se trazará la curva uniendo los puntos así obtenidos por un trazo continuo.

En algunos casos, el móvil traza él mismo la curva, como sucede en los aparatos de indicaciones continuas; el de Mr. Morin por ejemplo.

Propiedades y usos. — De cualquier modo que esta curva se obten-

ga, su forma es suficiente para dar una idea del movimiento que se estudia. Sea $ABCDE$.... (fig. 1) esta curva. Si la ordenada aumenta, como sucede de A á B, el móvil se aleja del origen de los espacios y el movimiento es *progresivo*, y si la ordenada va disminuyendo, como tiene lugar entre B y C, el móvil va acercándose al origen y el movimiento es *retrógrado*. Cuando la curva corta al eje de las abscisas, como en el punto C, el móvil, en el tiempo correspondiente á OC, se encuentra en el origen de los espacios, y cuando las ordenadas son negativas, viénese á expresar que el móvil pasa de uno á otro lado del origen.

Esta curva sirve asimismo para determinar la velocidad del móvil en un instante cualquiera, construyendo la curva de las velocidades (ver esta voz). Para obtener la velocidad en un instante cualquiera, sea $ABCD$..... la curva de los espacios; MS la tangente en un punto M de esta curva; MR una paralela á OT igual á la longitud que se tome para representar la unidad de tiempo, y RS una paralela al eje de las e, es evidente que el triángulo $M'R'S'$, cuyos lados $M'R'$ y $R'S'$ representan respectivamente dt y de, sería semejante al MRS y que, por consiguiente, la velocidad $\frac{de}{dt}$ estará representada por RS si en todos los casos los espacios no han sido ni alargados ni reducidos; luego RS nos dará la velocidad, aumentada ó disminuída, en la misma relación que lo hayan sido los espacios en sí mismos.

Resulta de este medio de representación que cuando el movimiento es progresivo, la velocidad va aumentando si la curva de los espacios presenta su convexidad hacia el eje de las t, y disminuyendo si es la concavidad la que mira hacia dicho eje. Si el movimiento es retrógrado, la velocidad aumenta cuando la curva de los espacios presenta su concavidad hacia el eje de las t y disminuye si es la convexidad la que mira hacia dicho eje. Si la ordenada de la curva pasa por un máximo ó un mínimo, la velocidad es nula, cambiando ordinariamente de sentido, y si la curva de los espacios presenta un punto de inflexión en que su tangente sea paralela al eje de los tiempos, la velocidad será nula, sin que cambie el sentido del movimiento.

Casos particulares. — Cuando el movimiento sea uniformemente variado, el espacio está representado por una función de la forma

$$e = e_0 + v_0 t + \frac{1}{2} j t^2,$$

y la curva de los espacios es una parábola de segundo grado, cuyo eje es paralelo al eje de las ordenadas.

Cuando el movimiento es uniforme, el espacio tiene por expresión:

$$e = e_0 + v\,t,$$

y la curva de los espacios se reduce á una línea recta que forma con el eje de las t un ángulo cuya tangente es igual á v.

Espigas.

Líneas representadas por la ecuación

$$\rho = \frac{a}{\text{sen}\,.\,m\theta}$$

—Han sido estudiadas por Aubry. *Journal de Mathématiques Speciales,* 1895.

Espirales.

Del latín *spiralis*.

Definición. — Se nombra espiral á una curva, engendrada por el movimiento de un punto, girando alrededor de otro fijo, del cual se separa ó aproxima, según una ley determinada.

— Si el punto móvil permanece en el plano que contiene al fijo, la espiral obtenida es *plana* y será *alabeada* cuando el punto generador gira alrededor de una recta fija del espacio, ó más claramente, que el movimiento se verifica sobre una superficie de revolución.

Historia. — Independientemente de que al tratar de las diferentes especies de espirales, señalaremos el autor ó autores que primeramente se han ocupado de su particular estudio, aquí, al hablar de ellas en general, indicamos asimismo las primeras obras que se han escrito sobre estas curvas, abarcándolas, por lo menos las que en el tiempo de ser escritas se conocían; tales son, por ejemplo, las siguientes: el Tratado *De lineis spiralibus demonstrationes*, de Y. Boulhian (1657); el titulado *Mesolabum, sen duæ medicæ proportionales per circulum et ellipsim vel hiperbolam, infinitis modis exhibitæ,* de Sluse, geómetra flamenco, en cuya última parte, ó *Miscellanea,* se ocupa de estas curvas (1659-1668); el *De nobis spiralibus exereitationes,* de P. Nicolás (Tolosa, 1693, en 4.°); diferentes Memorias de Clairaud y de Varignon, insertas en *Le recueil de l'Académie des Sciences* de 1662 á 1696, y en la *Histoire de l'Académie des Sciences* (1704), en la que se hace la descripción de diversas clases de estas curvas.

Entre los trabajos modernos sobre esta materia, merece especial mención el de J. Swellengrebel, titulado *Sur les courbes croissant indéfiniment et sur celles decroisant indéfiniment*, inserto en los *Archives* de Grünert (1851).

Espirales planas. — Denominaciones y propiedades generales. — En toda espiral se da el nombre de *polo* al centro de la curva y se llama *círculo regulador* aquel cuyo radio es recorrido en una revolución por el punto móvil.

La parte de la espiral que comprende el arco engendrado en una revolución, se denomina *espira.*

Una espiral tiene necesariamente una infinidad de espiras distintas; el radio polar puede crecer indefinidamente, aun cuando el ángulo tienda á un límite fijo; en este último caso, la espiral es asíntota á un círculo. El radio polar disminuye cuando se le da un movimiento contrario y puede acercarse hacia cero ó hacia un límite cualquiera; en el primer caso, la espiral tiene por asíntota el mismo polo; en el segundo tiene por asíntota un círculo.

Espiral de Arquímedes. — Definición. — Imaginemos que una recta, OA, se mueve uniformemente alrededor de un punto, O, de manera que su extremo A describe una circunferencia de círculo de radio igual á OA; y que un punto, M, á partir del centro, recorre con movimiento uniforme el radio OA durante el tiempo en que el punto A describe toda la circunferencia. El lugar geométrico en que se encuentran situados los puntos M, es la línea llamada espiral de Arquímedes.

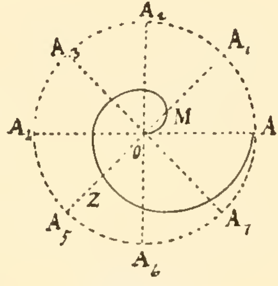


Figura 1.

Historia. — Se atribuye el descubrimiento de esta curva á Conon de Samos, amigo y casi discípulo de Arquímedes, que le dió el nombre de *espiral de Arquímedes* por deferencias á este sabio, el cual la estudió, dando á conocer sus propiedades y las de sus tangentes, sirviéndose para ello de construcciones geométricas, tan complicadas, que Vieta puso en duda su exactitud y Bouillard, astrónomo francés, confesaba no entenderlas y sólo el cálculo diferencial ha podido dar plenamente la razón al matemático de Siracusa.

Pappus, matemático de Alejandría, demostró, *Collections mathématiques*, que la sección producida por un cono del mismo eje que la superficie helizoidal rampante, se proyecta sobre un plano perpendicular al eje, según una espiral de Arquímedes.

Los geómetras de los siglos XVII y XVIII han estudiado detenidamente esta curva y encontrado curiosísimas analogías entre ella y otra en absoluto diferente, como lo es la parábola.

Ecuación. — El sistema polar es aquí el sistema natural. Supongamos que O sea el polo y el eje polar esté dirigido según la posición primitiva de OA; por definición tendremos que la relación entre uno cualquiera de sus radios, Oz, y el OA del círculo, es la misma que la del arco correspondiente AA_3A_5 á la circunferencia entera; así, pues, designando por ρ el radio vector, por r el del círculo, por 2π su circunferencia y por w el arco AA_3A_5, se tendrá:

$$\rho : r :: w : 2\pi,$$

de donde;

$$\rho = \frac{r}{2\pi} w;$$

y haciendo $a = \frac{r}{2\pi}$; $\rho = aw$, que es la ecuación que buscábamos.

Dando á w valores negativos se obtiene una segunda espiral, siguiendo á la primera, es decir, se acuerda con ella en el polo y simétricamente colocada con relación al eje polar.

Tangente. — La ecuación $\rho = aw$ nos da $\frac{d\rho}{dw} = a$; por consiguiente, el ángulo V que forma la tangente á esta curva con el radio polar tiene por tangente

$$\operatorname{tg}. V = \frac{\rho}{\frac{d\rho}{dw}} = \frac{a.w}{a} = w.$$

es decir, que la tangente forma con el radio vector ángulos tanto más próximos á 90°, cuanto w es mayor. La curva encuentra al eje polar en puntos para los cuales se tiene sucesivamente

$$w = 0, \quad w = \pi, \quad w = 2\pi, \quad w = 3\pi \ldots\ldots$$

Y más generalmente, que una recta, que pasa por el polo y forme con el eje polar el ángulo α, encontrará á la curva en puntos que respondan á los valores

$$w = \alpha, \quad w = \alpha + \pi, \quad w = \alpha + 2\pi, \quad w = \alpha + 3\pi \ldots\ldots$$

Estos números representan, al mismo tiempo, los valores de la tangente trigonométrica de los ángulos que las tangentes en los diversos puntos forman con el eje polar.

Sub-normal.—La sub-normal á esta curva, comprendida entre el polo y el punto de encuentro de la normal con la perpendicular al radio polar, es:

$$s_n = \rho \,.\, \cot \,.\, V = a.$$

Es, pues, constante.

Rectificación. — No puede hacerse sino aproximadamente; pues sustituyendo los valores de ρ^2 y $d\rho^2$ deducidos de la curva en el valor del arco

$$ds = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 dw^2}.$$

Se tiene:

$$ds = a \,.\, dw \sqrt{1 + w^2},$$

expresión que no se puede integrar más que por series ó logaritmos, y que depende evidentemente de la rectificación de la parábola.

Area. — Sustituyendo el valor de $d\,w$, deducido de la ecuación $\rho = a\,w$, en la expresión del área en coordenadas polares,

$$s = \frac{1}{2}\int \rho^2 dw$$

se obtiene

$$s = \frac{w^2}{24 \,.\, \pi^2}.$$

Si se hace el arco $w = 2\pi$, se tendrá $s = \frac{1}{3}\pi$. Por lo tanto, el área de la espiral es el tercio de la del círculo.

Esto es en cuanto á la primera espira. Para dos espiras, $s = \frac{7}{3}\pi$; para tres, $s = \frac{14}{3}\pi$; para cuatro, $s = \frac{37}{3}\pi$....., etc., y para m espiras, $s = \frac{m^3 - (m-1)^3}{3}\pi$.

Comparando cada una de estas áreas con las del círculo circunscrito correspondiente, que vale sucesivamente π, 4π, 9π, 16π, etcétera, se ve que el área de la segunda revolución es al círculo cir-

cunscrito como 7 : 13; que la de la tercera revolución es al círculo circunscrito como 19 : 27, etc. Todas estas relaciones fueron ya encontradas por Arquímedes.

Propiedades. — La normal en un punto de esta curva forma con el radio vector correspondiente á este punto, un ángulo cuya cotangente es igual á la del ángulo formado por este radio y el eje polar.

— La magnitud absoluta de sus radios vectores, es proporcional á la inclinación de los mismos y crecen en proporción aritmética.

— La evoluta de esta curva, es la cáustica por reflexión de la evolvente de un círculo, para los radios emanados del centro. (Mr. Rouquel, *Annales de Mathématiques*, t. II, 2.ª serie, pág. 497.)

— Las proyecciones horizontales de las curvas intersecciones de la bóveda conoide y la bóveda anular, ó sea de la conocida con el nombre de bóveda de arista en torre redonda, son espirales de Arquímedes.

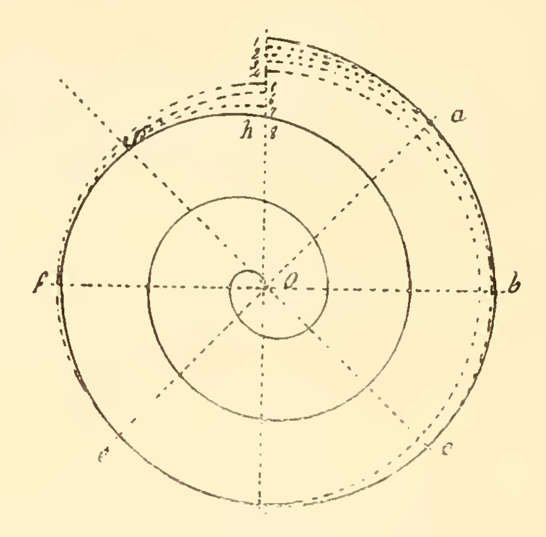


Figura 2.

— La excéntrica de corazón, con la cual se transforma uniformemente un movimiento de rotación circular en movimiento rectilíneo, está limitado por una espiral de Arquimedes.

Trazado. — Sea O el polo y Om el radio del círculo regulador á recorrer por el punto en una ó diversas revoluciones enteras (aquí tres); se dividirá esta circunferencia en partes iguales (aquí ocho), y la porción mh del radio, tercio del total om en un número de partes iguales (aquí ocho), y tomaremos sucesivamente las distancias

$ao = o1$, $ob = o2$, $oc = o3$....., y uniendo todos los puntos que así se obtienen por una línea continua, ésta será la primera vuelta de la línea que buscamos. Procediendo de una manera análoga á partir del punto h, se obtendrá la segunda vuelta, y así las demás, hasta terminar el trazado de la curva.

Para jardines, etc., Casimir Cornú indica, para trazar esta espiral, el medio de clavar una estaca, liarle una cuerda y desliar ésta señalando en el terreno. Del grueso de la estaca depende la distancia entre las espiras.

Espirales circulares, *elípticas*, *etc.* — Están estas curvas engendradas por un radio vector móvil cuya longitud es igual á la ordenada de una de estas curvas, al mismo tiempo que el valor de los ángulos que dos direcciones sucesivas de estos radios forman entre sí, es proporcional á la división de las tangentes de estas curvas tomada por abscisa.

De poca importancia estas curvas, señalaremos únicamente su trazado. Tomaremos el punto más alto B del mayor radio OB por centro de un cuarto de círculo ob descrito con este radio, se fija la distancia del origen de la primera revolución de la curva á su centro ó polo, y se la toma de O en M. Por el punto M se traza una paralela MN á XY, y en el punto N en que esta línea corta el arco del cuarto del círculo, se traza una paralela N. 12 á Bo, la cual corta á XY en el punto 12. Se divide luego Xn en tantas partes iguales cuantas quieran sean las revoluciones (aquí tres), y cada una de estas partes se subdivide en otras iguales (aquí doce), y por los puntos de división se trazan las ordenadas de la curva. Se divide parecidamente la circunferencia descrita desde el centro de la espiral en igual número de partes iguales (aquí doce), y sobre los radios que se dirijan desde el centro á estas divisiones, se llevarán las magnitudes de las ordenadas correspondientes de la curva con relación á la tangente XO, para obtener los diferentes puntos por los que pasa la espiral.

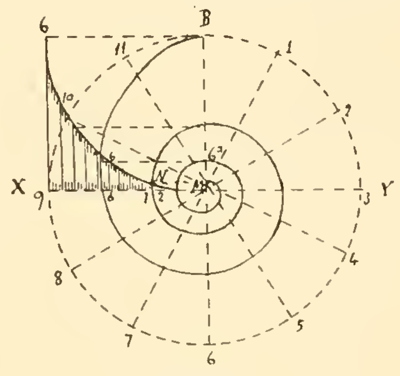


Figura 3.

La espiral circular será tanto más redonda cuanto el número de revoluciones sea mayor. Es susceptible de una porción de variedades; por ejemplo, se puede añadir una longitud constante á la que

se deja determinada sobre cada radio; se puede sustituir al cuarto de círculo un cuarto de elipse, lo cual alargará ó acortará la espiral, según que el pequeño ó el mayor de los ejes de la elipse sea paralelo á la línea de las abscisas.

Espiral hiperbólica.—Definición.—Se llama así la curva en la que las longitudes de los radios vectores están en razón inversa de sus inclinaciones.

Historia.—De las obras antiguas que más especialmente se han ocupado de esta curva con preferencia á las demás espirales, podemos citar la *De lineis logarithmicis spiralibus hiperbolices,* de P. Nicolas (1696).

Ecuación.—Si representamos por ρ el radio vector, w su inclinación y a la longitud absoluta del radio vector cuya inclinación es uno, la ecuación polar de esta curva estará expresada, teniendo en cuenta su definición, por

$$\rho = \frac{a}{w}.$$

Propiedades.—El origen es un punto asintótico de esta curva, porque ρ no puede reducirse á cero, sino para $w = \infty$.

— Es simétrica con respecto al eje imaginario, porque dando á w los valores w y $-w$ equivalentes y de signo contrario, se encontrará que los valores de los dos radios vectores correspondientes tienen la misma ordenada y las abscisas opuestas y equivalentes.

— Si hacemos

$$w = 2\pi, \quad w = 4\pi, \quad w = 6\pi, \text{ etc.},$$

tendremos para ρ los valores

$$\frac{a}{2\pi}, \quad \frac{a}{4\pi}, \quad \frac{a}{6\pi} \ldots\ldots \text{ etc.},$$

lo cual demuestra que al cabo de dos vueltas se reduce el radio vector á la mitad de lo que era al fin de la primera, á la tercera parte al de tres vueltas, y así sucesivamente.

— Las dos ramas que forman simetría corresponden, una á valores positivos y otra á valores negativos de w, y no están unidos por un elemento como en la espiral de Arquímedes. En efecto, no puede verificarse la unión si no pasa w de positivo á negativo, cuyo tránsito tiene que ser al llegar w á cero ó á infinito. Este último valor es

inasignable, y como corresponde al radio vector nulo, no podrá haber unión en el origen. Tampoco la habrá cuando $w=0$, porque entonces $\rho=\infty$, las ramas se reunirían en un punto infinitamente lejano, lo que equivale á decir que no se reúnen nunca.

—El ángulo que forma la tangente con el radio polar es dado por la fórmula $\operatorname{tg}.V=\dfrac{\rho}{\dfrac{d\rho}{dw}}=-\dfrac{a}{w\dfrac{a}{w^2}}=-w.$

— La tangente á la curva en el punto correspondiente á $w=0$ es paralela al eje, pero como este valor corresponde á dos puntos infinitamente lejanos, á la altura a, se deduce que una paralela al eje, trazada á la distancia a es asíntota de la curva.

— La subtangente

$$S_t=\rho.\operatorname{tg}.V=-\frac{a}{w}\omega=-a.$$

Es, pues, constante.

— El área de la curva comprendida entre dos radios dirigidos según los ángulos w_0 y w es:

$$A=\frac{1}{2}\int_{w_0}^{w}\rho^2dw=\frac{1}{2}a^2\left(\frac{1}{w}-\frac{1}{w_0}\right).$$

Si se hace, por ejemplo, $w=\pi$ y $\theta=\infty$, se tendrá para el área comprendida entre el eje polar prolongado á la izquierda del polo y el polo mismo, el valor $\dfrac{1}{2\pi}a^2$, que resta finito, aunque el radio polar haga una infinidad de vueltas.

Trazado.—Para construir la espiral por puntos, tomemos la longitud a por unidad, y con este radio se describe una circunferencia que tenga el centro en el origen, tendremos uno de los puntos en que corta al eje imaginario haciendo $w=\dfrac{\pi}{2}$; el radio vector correspondiente tendrá por longitud $\dfrac{a}{\dfrac{\pi}{2}}$, y será el cuarto término de la proporción

$$\frac{\pi}{2}:a::1:R,$$

el cual se construye tomando $OB = \frac{\pi}{2}$; uniendo BC y trazando DE paralela á BC. El radio vector OF, que forma con OB un ángulo doble de BOE será la mitad de OE: el OG que tiene una inclinación triple que OE será el tercio de OE, y así sucesivamente se encontrarán tantos como se quieran de los puntos en que la curva corta á los ejes. De la misma manera se pueden obtener los puntos situados en las bisetrices de los ángulos rectos que acabamos de considerar, trazando la del ángulo BOC, tomando sobre ella una longitud OH doble de OE y sobre las siguientes $\frac{1}{3}OH$, $\frac{1}{5}OH$, $\frac{1}{7}OH$, sin perjuicio de tomar sobre la misma OH, $\frac{1}{9}OH$, y así sucesivamente se tendrán puntos bastantes de la rama correspondientes á ángulos polares positivos, de la cual se podrá deducir su simétrica que corta al eje imaginario en los mismos puntos.

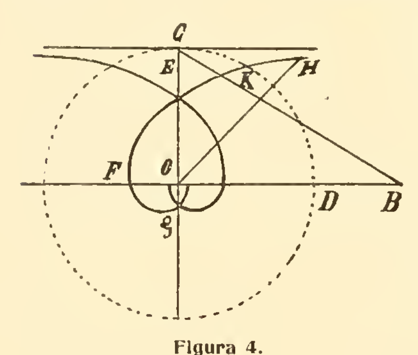


Figura 4.

Espiral logarítmica.—Curva en la cual se verifica que el logaritmo del radio vector varía proporcionalmente al ángulo polar ó bien en la que el radio vector crece en proporción geométrica.

Algunos autores le han dado el nombre de *equiangular*, partiendo, para estudiarla, de la propiedad que tiene de que los arcos intersectados entre el polo y otros cualquiera de la curva son semejantes entre sí.

Historia.— Jacobo Bernouilli fué el primero que, respondiendo al llamamiento de Leibnitz, descubre, en 1690, las principales propiedades de esta curva, dándonos su rectificación y cuadratura, *Specimen alterum calculi differentialis in dimetienda spirali logarithmica*, etc. (*Acta Eruditorum*-1691). Léese en esta Memoria «la espiral logaritmica es la curva que es cortada según un mismo ángulo por todos los radios que parten de un mismo punto; ella ha sido estudiada por Wallis y por Barrow, y yo no me ocuparé sino de sus afinidades con las loxodromias, porque ella sería una verdadera loxodromia si la tierra fuera plana».

Esta curva fué grabada sobre su tumba con esta inscripción: *Eâdem immutata resurgo*, haciendo con estas palabras alusión á esta curva,

que se reproduce sin cesar en sus evolutas, y que es tomada así como el símbolo de una vida futura.

Ecuación.— La curva que nos ocupa tiene por ecuación

$$\rho = ae^{m\theta},$$

en la cual, a es una constante lineal; e, la base del sistema de logaritmos neperianos; m, una constante numérica, y ρ y θ, las coordenadas de un punto de la curva.

Propiedades.— El polo es un punto asintótico, puesto que $\rho = 0$ para $\theta = -\infty$.

— La tangente forma un ángulo constante con el radio vector dirigido al punto de contacto. En efecto, la ecuación de la curva nos da:

$$\frac{d\rho}{d\theta} = mae^{m\theta} = m\rho, \quad \text{y por tanto,} \quad \operatorname{tg} . V = \frac{\rho}{\frac{d\rho}{d\theta}} = \frac{1}{m} = \text{const.}$$

— Las extremidades de la subtangente y de la subnormal describen

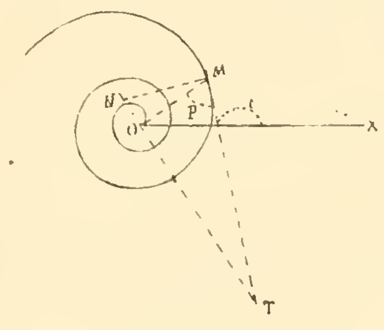


Figura 5.

dos espirales logarítmicas iguales á la primera, pero situadas diferentemente. En efecto, la subtangente OT será:

$$s_t = \rho . \operatorname{tg} . V = \frac{1}{m} ae^{m\theta},$$

y si llamamos θ' el ángulo de OT con el eje polar $\theta = \theta' + \frac{\pi}{2}$; por lo tanto el lugar de los puntos T es:

$$\rho' = \frac{1}{m} ae^{m\left(\theta' + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Si se gira al eje polar un ángulo α, esta ecuación será

$$\rho' = \frac{1}{m} a e^{m\left(\theta + \frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$$

y determinando α por la condición $\frac{1}{m} e^{m\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = 1$ que nos da

$$m\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = Lm \quad \text{ó} \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{Lm}{m},$$

se encontraría para la ecuación del lugar de los puntos T la misma ecuación de la logarítmica primitiva.

Lo propio se demostraría para la sub-normal, cuya expresión es:

$$S_n = \rho \,.\, \cot . V = m r e^{m\theta}.$$

— El valor del radio de curvatura será

$$R = \frac{ds}{d\tau} \sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + \rho^2} = a e^{m\theta} \sqrt{1 + m^2} = \rho \sqrt{1 + m^2};$$

este resultado nos dice, que si se dirige la normal del punto M y se la termina en el punto N en que encuentra la perpendicular al radio vector, el ángulo OMN será el complemento de ρ y tendrá, por consecuencia, por tangente, m; MN será, por tanto, $\rho \sqrt{1+m^2}$, de donde se deduce que en la espiral logarítmica el centro de curvatura es el extremo de la sub-normal.

— La evoluta de esta curva es otra curva igual á la propuesta, aunque diferentemente situada. En efecto, la ecuación del lugar de los puntos N es:

$$\rho'' = m\rho = m a e^{m\theta} = m a e^{m\left(\theta'' - \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Su rectificación será dada por la integración de la diferencial

$d\theta = \frac{1}{m} \sqrt{2a^2 e^{2m\theta}}$ ó de $\frac{a}{m} \sqrt{2} \,.\, e^{m\theta} d\theta$, cuya integral es $\frac{a}{m} \sqrt{2} \,.\, e^{m\theta}$;

por consecuencia, el arco de la espira, contado á partir del punto en que la coordenada θ es cero, será

$$S = \frac{a}{m}\sqrt{2}\,(e^{m\theta} - 1).$$

Si se hace en esta fórmula $\theta = -\infty$ y se cambia el signo, supuesto $d\theta$ negativo, se tendrá para el arco indefinido comprendido entre el arco origen y el punto asintótico:

$$S = \frac{a}{m}\sqrt{2}.$$

— El área es

$$A = \frac{1}{2}\int \rho^2 d\theta = \frac{a^2}{2}\int e^{2m\theta} d\theta = \frac{a^2}{4m}e^{2m\theta} + C.$$

Si se toman por limites 0 y $-\infty$, tendrá por área, comprendida entre el eje polar y el polo, $\frac{a^2}{4m}$. Resta finita aun cuando el eje polar dé una infinidad de vueltas.

— Cuando esta curva rueda sobre sobre un círculo, su polo describe una evolvente de círculo.

— Sea en una espiral logarítmica, una cuerda móvil vista desde el origen según un ángulo constante y el polo de esta cuerda con relación á la espiral, ó el punto de concurso de las tangentes á la curva, dirigidas por las extremidades de la cuerda; la evolvente de la cuerda móvil y la línea descrita por el polo son dos espirales logarítmicas. El vértice de un ángulo constante circunscrito á una espiral logarítmica describe asimismo otra espiral logarítmica. A. Mogni (*Annales Mathé.*—T-IL—2.ª serie, pág. 504).

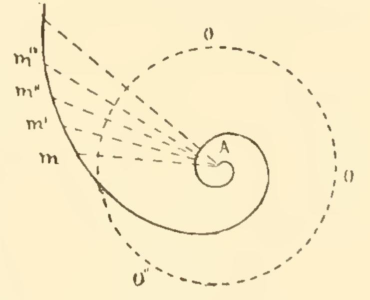


Figura 6.

Trazado. — Se puede construir por puntos, con la mayor facilidad, del modo siguiente: divídase la circunferencia $OO'\,O''$ en partes iguales y trácense radios por los puntos de división, y tomaremos sobre ellos las partes Am, Am', Am''..... que estén en progresión geométrica; los puntos m, m', m''..... pertenecerán á una espiral logarítmica.

Se construye también teniendo en cuenta la propiedad expresada más arriba, de que la tangente forma un ángulo constante con el radio vector, y las propiedades de la línea quebrada, conocida en geometría con el nombre de *polígono potencial;* se deducirá que siendo

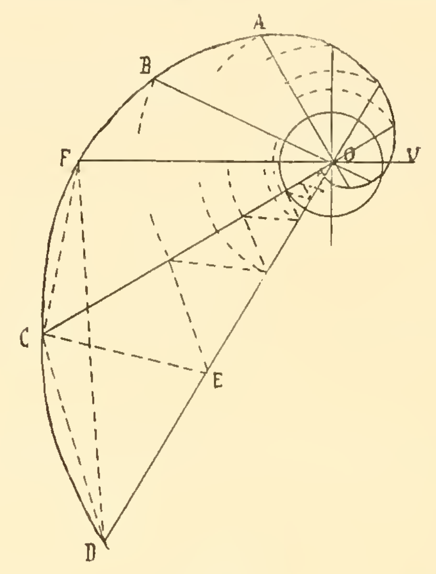


Figura 7.

el ángulo $C\,O\,D$ de dos radios vectores cualesquiera, igual al $A\,O\,B$ de otros dos, las cuerdas AB y CD forman ángulos iguales con los radios OB y OD que están de un mismo lado, y esta propiedad sirve para determinar una serie de puntos, cuando son conocidos dos de la curva y el origen. Sean C y D los dos puntos dados y O el origen; se trazará la cuerda $C\,D$ y la recta $C\,E$ que forma con $C\,O$ un ángulo igual á $O\,D\,C$; á partir del punto E se trazará la serie de paralelas alternativamente á $D\,C$ y $C\,E$ que se ven en la figura, cuya construcción se puede extender á partir de D en sentido contrario. Hecho esto se construyen los ángulos $C\,O\,F$, $F\,O\,B$..... iguales á $D\,O\,C$, y sobre las líneas de división de estos ángulos, se llevarán las longitudes de los correspondientes radios vectores, determinados por la construcción hecha en el ángulo $C\,O\,D$.

Espiral parabólica. — Definición. — Si se imagina que el eje de una parábola rueda sobre la circunferencia de un círculo, siendo B el origen, todas las ordenadas de la parábola Cm, Dn, Eo..... concurren hacia el centro A y la curva $AFonmB$ que pasa por los extremos de estas ordenadas es la *espiral* parabólica.

Esta curva se denomina también *helizoidal*.

Ecuación.—Llamando z á un radio vector Am, v al arco de círculo correspondiente BC y p al parámetro de la parábola, la naturaleza de esta curva estará expresada por la ecuación

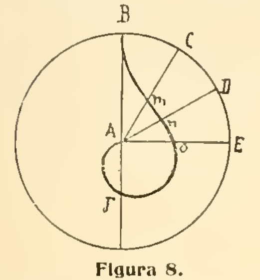


Figura 8.

$$z^2 = pv.$$

Espiral sinusoidal.— Las diferentes espirales de esta clase tienen por ecuación

$$m\rho^m = a^m \operatorname{sen} . m . w, \qquad (a)$$

igualdad que representa, para algunos valores particulares de m, curvas que nos son conocidas.

Si $m = \frac{1}{2}$, la curva es una cardioidea cuyo círculo generador tiene un radio igual á a. Si $m = 2$, se obtiene una lemniscata, cuyos focos están situados en la intersección de la primera bisetriz, y del círculo concéntrico al origen, que tiene un radio igual á a.

Las curvas que corresponden á la ecuación (a) gozan de una propiedad notable, que permite construirles muy fácilmente la tangente en un punto tomado en ellas.

En efecto; se tiene

$$m\rho^{m-1}\rho' = a^m \cos . m . w,$$

y, por consiguiente,

$$\frac{\rho}{\rho'} = \operatorname{tg} . V = \operatorname{tg} . m . w,$$

fórmula que nos da

$$V = m . w + K\pi.$$

El ángulo V, siendo el ángulo de dos semi-rectos, es siempre inferior á π, y se tiene, por último,

$$V = m . w.$$

Se deduce de aquí, entre otras consecuencias, que en la cardioidea, una cuerda que pasa por el punto doble y la tangente á los extremos de esta cuerda forman un triángulo rectángulo.

—A esta línea se la conoció con el nombre de *ortogénida.*

Espiral tractric.—Por analogía con la tractric (ver esta voz) se llama espiral tractric la curva que en coordenadas polares tiene una tangente constante, contándose esta tangente desde el punto M de contacto á la perpendicular OT al radio vector OM.

El nombre con que se distingue esta línea se debe á M. Rouquel, que lo aplicó á toda curva (*Nou. Ann.*, 1863, pág. 498), cuya ecuación es:

$$\delta = \pm \left(\frac{1}{2} \sqrt{a^2 - r^3} - \text{arc. cos} = \frac{r}{a} \right),$$

curva que habia nombrado Girard *tractric polar.* (*Nou. Ann.*, 1862, página 76).

— Respecto á la curva

$$\rho = \text{sen} . h . a . x$$

ó

$$\rho = \frac{1}{2} \left(e^{ax} - e^{-ax} \right),$$

que Aubry llamó *espiral tractric*, había recibido antes de Dittrich el nombre de *espiral de diferencia*, por cuanto el radio vector es la diferencia de los radios vectores

$$\rho = \frac{1}{2} e^{ax} \quad \text{y} \quad \rho = \frac{1}{2} e^{-ax}.$$

(*La Spirale logarithmique.*—Breslau, 1877, pág. 9.)

— Siendo r y θ las coordenadas de un punto, la ecuación de esta curva es:

$$\theta = \pm \left(\frac{1}{a} \sqrt{R^2 - a^2} - \text{arc. cos} = \frac{a}{R} \right),$$

de cuya ecuación y su diferencial

$$\frac{d\theta}{dr} = - \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r^2}$$

se deduce la forma de la curva, la cual está compuesta de dos ramas

simétricas con relación á OA teniendo en A el punto de partida, siendo $OA = a$ y admiten á OA por tangente común. El polo es un punto asintótico.

— El arco tiene por valor,

$$s = - a \,.\, \log \,.\, \text{sen} \,.\, \alpha.$$

— La expresión del área es

$$A = \frac{1}{4} r \sqrt{a^2 - r^2} - \frac{1}{4} a^2 \left(\text{arc. sen} = \frac{r}{a} \right) + \frac{1}{2} a^2 \pi.$$

— La curva presenta dos puntos de inflexión correspondientes á los valores de θ:

$$\theta = \pm \left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

— La espiral tractric es la trayectoria que sigue el polo de una espiral hiperbólica rodando sobre sí misma y partiendo de la coincidencia de los polos.

— La podar de la espiral hiperbólica es una espiral tractric.

Puede consultarse sobre esta línea el *Journal de Mathém. Speciales*, 1896, pág. 143, la *Géométriæ Analytique* de L. Painvin, etc.

Sobre otras espirales.— Existen otras curvas espirales sin denominación especial, entre las cuales es, y como ejemplo señalaremos aquí, la siguiente: Sea un disco vertical animado de un movimiento de rotación alrededor de su centro O y en el sentido de la flecha. Un punto material se mueve libremente, según el diámetro vertical AB de este disco, la curva formada por esta traza tiene por ecuación, siendo $OM' = \rho$, $AOA' = w$, $r = OA$ y g la acción de la gravedad

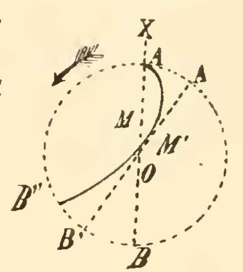


Figura 9.

$$w = \alpha \sqrt{\frac{2r}{g}},$$

curva que, prolongada por fuera de la circunferencia del disco, da una espiral de una especie particular.

Tangentoide es una espiral en que los crecimientos de la tangente trigonométrica del ángulo ω son proporcionales á los del ángulo vector. Su ecuación es

$$\rho = a \,.\, \mathrm{tg} \,.\, \omega.$$

La proyección de la intersección de la bóveda conoide de directriz plana con la bóveda anular es una espiral tangentoide.

De inflexión proporcional se llama á la línea cuya tangente gira con una velocidad angular de orientación proporcional á la del radio vector, trazada desde un polo fijo, al punto de contacto. Tiene por ecuación

$$\rho = a \,.\, \cos^p \frac{\omega}{p},$$

siendo $\frac{1}{p}$ el coeficiente debido á la inflexión. (*Nou. correspondance Mathe.*, 1880, pág. 158.)

Clotoide es una espiral cuya curvatura cambia proporcionalmente al arco, á partir de un punto fijo.

Su ecuación en coordenadas intrínsecas es $\rho s = a^2$.

— Si una clotoide rueda sobre una recta, el centro de curvatura correspondiente al punto de contacto permanece sobre una hipérbola equilátera asintótica á la recta considerada. (*Nou. Ann.*, 1886, E. Césaro.)

Cocleoide es una espiral de ecuación polar

$$\varkappa = a \,\frac{\mathrm{sen}\,.\,\theta}{\theta}.$$

Es la inversa de la cuadratriz de Dinostrato. (Ver cuadratriz.)

La estudió S. Neuberg (*Mathesis*, 1885), y la dió nombre Falkenburg y Beuthem.

— La cocleoide es la perspectiva de la hélice vista desde uno de sus puntos. (*Nouv. correspondance Mathe.*, 1878, E. Césaro.)

Espiral polar. — Si en una serie de círculos concéntricos se trazan radios que determinen sectores de área constante, esta línea es el lugar de los puntos obtenidos. Su ecuación es

$$\rho^2 \theta = a^2$$

y si $a = 1$, se tiene

$$\rho^2\theta = 1,$$

curva que Cotes, en su *Harmonia mensurarum*, 1722, llamó *lituus*.

Sacchi (*Nou. Ann.* 1860) la estudia bajo el nombre de *tromba*.

Espiral de Poinsot. — Este, en la *Théorie nouvelle de la rotation des corps*, 1852, trata de esta línea, cuya ecuación es:

$$\rho \, . \cos . \, h a \rho = c.$$

Esta curva es la *ortolamberciana* de la espiral tractric y tiene por *ortostereográfica* una espiral logarítmica. Ver *Association française pour l'avancement des Sciences*, 1886, trabajos de M. G. Fouret y los escritos de A. Aubry.

Espiral de Fermat. — Su ecuación es:

$$\rho^2 = a^2\theta.$$

Œuvres de Fermat. — T. III, pág. 277.

Espiral de Galileo. — Nombre debido á Mersenne, y que corresponde á la curva que tiene por ecuación

$$\rho = a - b\theta^2.$$

Se dice también *espiral Baliani.* (*Int. Mathe.*, 1896; 78 y 213.)

Pseudocatenaria. — Espiral cuya ecuación en coordenadas intrínsecas es

$$R = K^2 a - \frac{s^2}{a},$$

representando por s la longitud de los arcos y R el radio de curvatura en el punto en que se supone termina el arco.

Estudiada por Césaro, *Lexioni di Géometria intrinseca*, 1896, página 17.

Pseudotractric. — Teniendo s y R las mismas representaciones que en la anterior línea, la ecuación intrínseca de ésta es

$$R = Ka\sqrt{1 - e^{-\frac{2s}{a}}}.$$

Estudiada por Césaro, *Lexioni di Géometria intrinseca*, 1896, página 18.

La evoluta de esta línea es la linea anterior.

Espiral de Cotes, nombre dado por J. Sacchi en su obra *Sulla geometria analitica della linee piane*, 1854, á la curva cuya ecuación es

$$\varkappa \,.\, \cos \,.\, n\theta = \alpha.$$

Ver *Nou. Ann.*, 1860, pág. 38.

Espiral de Boullian. — Ver la obra de este autor, titulada *Ismaelis Bullialdi De lineis spiralibus demostrations novæ*, 1657.

— Además de todas estas espirales debemos á Varignon el medio de generación de espirales al infinito, y en su *Memoria* se pueden estudiar las por él denominadas *vértico-centrales*, *co-centrales*, *co-verticales*, etc.

— Ver también *Stereotomia*, de Frezier. T. I. Liv. II, pág. 201, para el trazado de estas líneas, de sus tangentes, etc.

Imitación de espirales por arcos de círculo.—En las artes del dibujo, y particularmente en la Arquitectura, se emplean curvas espirales, cuyos trazados se someten á ciertas reglas prácticas para obtenerlas por medio de la regla y el compás, á pesar de que generalmente estas especies de curvas se trazan á ojo, atendiendo más bien á la belleza de su forma que á su generación geométrica. Estas curvas pueden ser consideradas como *imitativas de espirales;* tales son la espiral compuesta de arcos de círculo y aquella que se conoce con el nombre de *voluta*, y de las cuales indicaremos sus trazados; pudiendo consultarse á estos efectos, además de las obras que particularmente se citarán más abajo, el *Traité de Stereotomia*, de Frezier; el *Cours d'Architecture*, de F. Blondel, y con especialidad la obra *Des developpements de Géométrie Descriptive*, de T. Olivier, en su capítulo II.

Espiral compuesta de arcos de círculo.—Para formar una espiral por medio de arcos de círculos, se dispondrán éstos de manera que sean sucesivamente tangentes los unos á los otros, á fin de evitar garrotes, para lo cual es necesario que cada dos arcos de círculos consecutivos tengan el punto de tangencia en la recta que pasa por los centros de dichos arcos. Convendrá también al objeto de obtener contornos más elegantes que las relaciones entre dos radios vectores consecutivos y la de sus ángulos sigan una ley uniforme.

Trazado.—Sea AB la altura fijada para la espiral; se la dividirá

en dos partes, $AC = CB$, y la superior, en $CD = DB$, con lo cual tendremos los centros C y D y los radios CA y DB de las dos semicircunferencias que componen la espira. Se pueden hacer nuevas subdivisiones en E, F etc., para obtener mayor número de arcos y, por lo tanto, mayor número de espiras.

Voluta ó espiral jónica.—Se ha dado este nombre á la espiral que decora el capitel propio del estilo jónico. Esta espiral va acompañada de otra que hace igual número de revoluciones que ella, teniendo el mismo centro y separándose á medida que se desarrolla; esta segunda espiral se denomina *espiral compañera*. La separación mayor ó menor en el trayecto que recorren ambas curvas depende de la voluntad del artista.

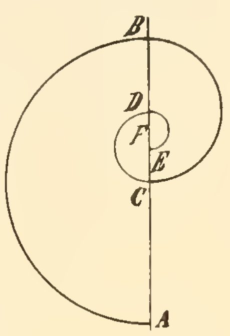


Figura 10.

Historia.—Dos medios de generación se conocen para esta espiral: el primero, debido á J. Barrozzio, apellidado Vignola, que lo expuso en su obra, *Tratado de los cinco órdenes*, á mediados del siglo XVI, y el segundo, á Goldman, que lo dió á conocer en su obra *Cours d'Architecture et de Mathématiques*, dándole el nombre de *voluta de Vitruvio recuperada*.

Trazado de Vignola. — Considera este arquitecto una unidad de medida llamada *módulo*, igual á la longitud del semi-diámetro de la columna y la divide en diez y ocho partes iguales que nombra *minutos*, y supone una recta, AX (fig. 1), vertical (que nombra *cateto*) á un módulo de distancia del eje de la columna, que pasa por el centro del *ojo* ó *polo* de la voluta, dándole de altura total diez y seis partes; luego toma nueve de estas partes, á partir de A, para obtener el punto O, centro del ojo de la voluta, cuyo diámetro es de dos partes, y marca sobre la horizontal que pasa por O ocho partes á la izquierda de O á B y seis á la derecha de O á D, para obtener el ancho total BD de la misma. Hecho esto, inscribe en el círculo del ojo un cuadrado, $mpnq$, de modo que los dos vértices m y n estén sobre el cateto y los otros, p y q, sobre la horizontal que pasa por O, divide en seis partes iguales cada una de las líneas 1,3 y 2,4 y obtiene los puntos (fig. 2) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12, los cuales le sirven de centro á los círculos, cuyo conjunto forman las tres revoluciones de la espiral de la voluta. Luego, desde el punto 1 levanta una vertical que encuentra en E la línea horizontal que pasa por el vértice A de la voluta, y desde este punto 1, con el radio $1E$ describe un arco de círculo que encuentra en B la prolongación de

la línea horizontal que pasa por los puntos 1 y 2; después, desde el punto 2 como centro y con el radio 2,*B*, describe un segundo arco de círculo que termina en *G* sobre la prolongación de la línea vertical que pasa por 2,3; y, por último, desde el punto 3 y desde los siguientes 4, 5, 6..... describe sucesivamente nuevos arcos de círculos, que tienen por radio la distancia comprendida entre el extremo del arco anterior y el centro de aquel que le sigue, con la precau-

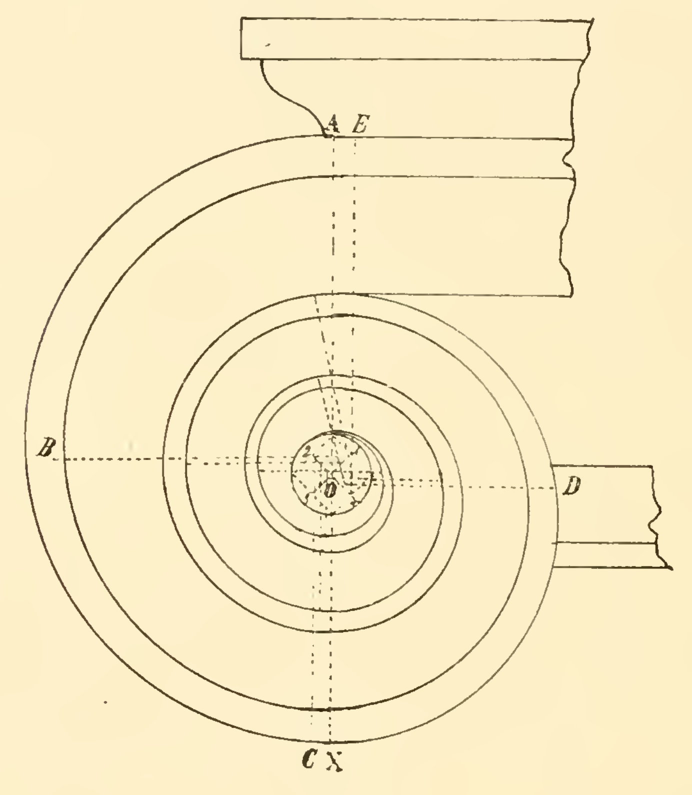


Figura 11.

ción de observar que el punto de contacto y los dos centros de los arcos consecutivos se encuentren sobre la misma recta.

El ancho del *filete*, que es el cuarto de la distancia entre la primera y la segunda espira, se encuentra asimismo, según Vignola, dividiendo en cuatro cada una de las seis partes de las líneas 1,3 y 3,4, cuyos extremos han servido de centro á la primera espiral; la primera división, ó sea la más alejada del centro del ojo en cada una de estas partes, nos dan doce nuevos puntos, 13, 14, 15, 16, 17, 18,

19, 20, 21, 22, 23 y 24, de los que se sirve de la misma manera que anteriormente para el trazado de la espiral compañera.

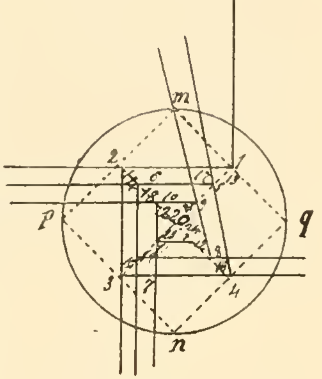


Figura 12.

Trazado de Goldman.—Este autor divide la altura *mn* del ojo en cuatro partes iguales (fig. 4), *m*1, 1,0, 0,4 y 4,*n;* desde los puntos de división 1 y 4 traza las perpendiculares 1,2 y 4,3 al eje *mn* que prolonga hasta los puntos 2,3 en que encuentra á la tangente 2,3, paralela á *mn*, y obtiene el cuadrado 1, 2, 3, 4. Une luego el punto *O* á los puntos 2 y 3 y divide el lado 1,4 en seis partes iguales, trazando por los puntos de división paralelas á los lados 1,2 y 3,4 hasta los puntos en que cortan á las líneas 0,2 y 0,3, obteniendo una serie de cuadrados como se detalla en la figura.

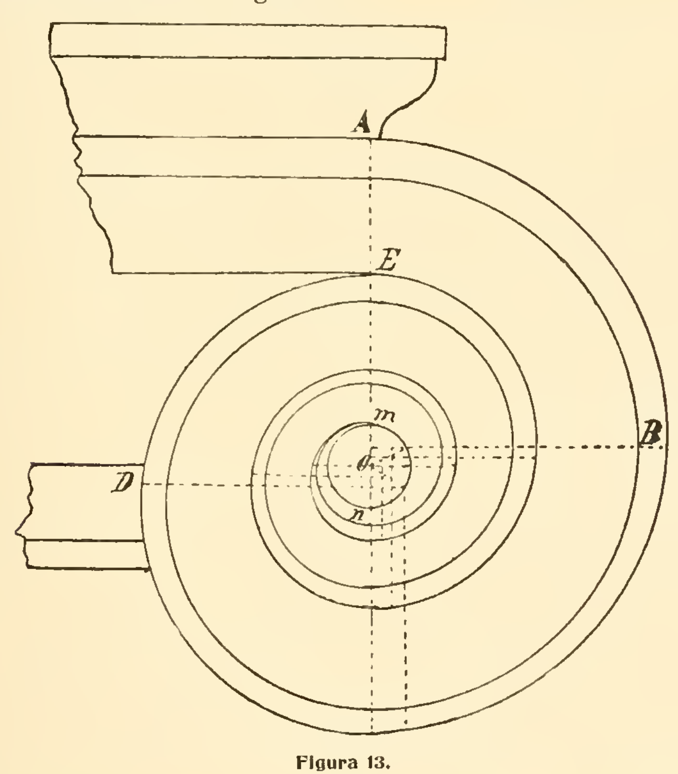


Figura 13.

Los vértices de estos diferentes cuadrados, según el orden numé-

rico 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12, son los centros de los diferentes arcos que forman la voluta. Para describirla, traza el primer arco tomando el punto 1 como centro, con la distancia $1A$ (fig. 3) por radio, hasta su encuentro con la recta 1,2 prolongada; luego desde 2, con el radio $2B$, traza el segundo arco hasta tocar la recta 2,3 prolongada, y así sucesivamente.

Para trazar la compañera, forma el borde del canal, según la longitud que en su origen quiera dársele, y busca una cuarta proporcional á la distancia mA, á la longitud del canal y á la mitad 01 del lado 1,4 del cuadrado mayor. Esta cuarta proporcional será igual á la mitad 0,13 del lado de un nuevo rectángulo que se trazará como los anteriores. Se obtendrán los otros rectángulos como se hizo antes y se operará del mismo modo, siendo los centros los puntos 13, 14, 15.....

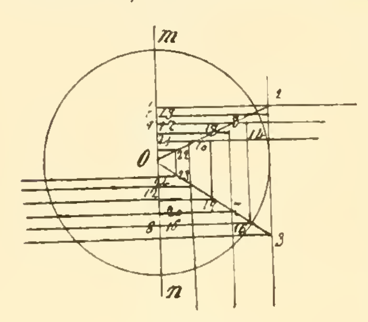


Figura 14.

Espirales alabeadas.—Espiral cónica.

Definición.—Línea trazada sobre la superficie de un cono, de manera que la tangente en cada uno de sus puntos forme un ángulo constante con el eje.

Historia.—Pascal se ocupa, en 1647, de esta curva en su obra *De l'escalier circulaire, des triangles cylindriques et de la spirale autour du cône.* Mr. Turquam ha estudiado sus propiedades y la rectificó (*N. Annales*, IV, p. 659), y diversos autores se han ocupado de ella, entre los cuales citaremos á Mr. A. Deladéréere.

Propiedades.—La proyección de la espiral cónica sobre el plano principal que pasa por el vértice perpendicularmente al eje, es una espiral logarítmica.

— La longitud de su arco, dividida por la longitud de este mismo arco proyectado, nos da una relación constante.

— El área del espacio cónico comprendido entre dos generatrices y un arco de la espiral cónica, dividido por el área de su proyección horizontal, nos da un cociente constante.

— Su plano osculador tiene una inclinación constante sobre el eje del cono é igual á la inclinación de la tangente sobre el eje.

— La normal principal es horizontal, siendo vertical el eje.

— La proyección horizontal de la normal principal es normal á la espiral logarítmica, proyección de la espiral cónica.

— Sus centros de curvatura están sobre un cono recto del mismo vértice y eje que el cono dado.

— La proyección horizontal de la curva de los centros de curvatura de la espiral cónica es una espiral logarítmica, y desarrollando el cono recto sobre un plano tangente, ella se desarrolla también según una espiral logarítmica.

— La tangente á la espiral cónica traza sobre un plano perpendicular al eje otra especial logarítmica, y el lugar de los centros de curvatura de dicha curva es otra espiral cónica.

Espiral cónica de Arquímedes.—Si se considera una espiral de Arquímedes situada sobre un plano, P, y que este plano se arrolla sobre un cono de revolución, B, de tal modo que el polo de la espiral venga á coincidir con el vértice del cono, se obtendrá una línea de doble curvatura, que es la *espiral cónica de Arquímedes.*

Espiral de Platón.—Un pasaje de Timeo (pág. 36; ver M. Th. H. Martin, t. VIII de las *Mémoires des Savants étrangers*, pág. 336) nos muestra la idea de la espiral de Platón, aplicada precisamente á las órbitas de los planetas.

Respecto á esta línea no se sabe más sino que los matemáticos de su tiempo estudiaron las propiedades de esta curva, habiendo atribuído á Conon, amigo de Arquímedes, la *invención* de la espiral.

Espiral esférica.—*Definición.*—Curva trazada por un punto que, partiendo del polo de una esfera, va recorriendo su superficie, alejándose cada vez más del punto de partida, del propio modo que la espiral de Arquímedes está engendrada sobre un plano; es decir, que un cuarto de un círculo máximo se supone gira uniformemente alrededor de su radio, mientras que un punto le recorre uniformemente y describe esta línea sobre la superficie de la esfera.

Historia.—Esta curva se conoce también con el nombre de *espiral de Pappus*, al cual se atribuye la primera idea de ella. Este matemático, en sus *Comentarios á los elementos de Euclides*, se ocupa de su generación y manifiesta la siguiente propiedad: «Si un punto móvil parte del polo de un hemisferio recorriendo con un movimiento uniforme un cuadrante perpendicular á la base, mientras que este cuadrante hace con movimiento uniforme una revolución entera alrededor del eje, el espacio comprendido entre la circunferencia de base y la espiral descrita, será igual al cuadrado del diámetro de la esfera». Esta propiedad es notable, por ser el primer ejemplo que se tiene de una superficie curva exactamente cuadrable.

Espiral hiperbólica cónica.—Si sobre un plano trazamos una espiral hiperbólica y arrollamos este plano sobre un cono de revolución de tal manera que el punto asintótico de la curva coincida con

el vértice del cono, se obtendrá una curva de doble curvatura sobre la superficie del cono, que es la *espiral hiperbólica cónica.*

Otras espirales.—Lo son la *hélice,* la *loxodromia,* la *pollodia* y la *herpollodia.* (Ver estas voces.)

Aplicaciones de estas curvas.—Además del interés evidentemente científico que el estudio de estas curvas presenta para el matemático, ellas son de una grande aplicación en las artes y se emplean tanto como medio decorativo, como también para el trazado de ciertas especies de arcos.

Espíricas.

Definición.—Curvas formadas por la intersección de un plano, con el cuerpo engendrado por la revolución de un círculo *alrededor de una de sus cuerdas, de una de sus tangentes* ó de una recta exterior á él. Este cuerpo se conoce con el nombre de superficie anular ó toro.

Historia.—Perseo, discípulo de Zénon, que vivió en el siglo III antes de J. C., y Géminus, contemporáneo de Hiparco, han tratado de las secciones del toro en obras que se han perdido, pero que han sido citadas por Proclus en sus *Comentarios sobre Euclides* (460). Perseo dió el nombre de *espire* al toro, y á sus secciones planas el de *espíricas.* Heron de Alejandría comprende estas palabras en su *Nomenclatura vocabolarum geometricorum* (traducida y publicada por Dasypodius en 1579).

Ecuación.—Si se toma por eje de las z el de la superficie toro; por el de las x la perpendicular bajada desde el centro del círculo móvil sobre el eje de las z, y por el de las y una perpendicular al plano de las xz, y llamando R al radio de dicho círculo y d la distancia de su centro al eje, la ecuación del toro será:

$$4d^2(x^2+y^2)=(x^2+y^2+z^2+d^2-R^2)^2.$$

Si se corta esta superficie por un plano

$$z=m\,(x-p)$$

y se refiere la sección á las trazas de este plano sobre los de las xz y de las xy tomadas por eje de las x y de las y, las fórmulas de transformación serán:

$$x=p+\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\,x';\quad y=y',\quad z=\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}\,x'.$$

y la ecuación de la sección:

$$4d^2\left\{\left(p + \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\,x\right)^2 + y^2\right\} = \left\{x^2 + y^2 + \frac{2p}{\sqrt{1+m^2}}\,x + p^2 + d^2 - R^2\right\}^2,$$

que será la ecuación general de las *espíricas* ó secciones tóricas.

Propiedades.—Cuando el plano secante pasa por el centro de la superficie, $p = 0$ y la ecuación se reduce á la

$$x^2 + y^2 = d^2 + R^2 \pm 2d\sqrt{R^2 - \frac{m^2}{1+m^2}\,x^2},$$

ecuación por medio de la cual se puede construir la curva por puntos, considerándola como lugar de los de encuentro de la recta

$$x = K,$$

y del círculo

$$x^2 + y^2 = d^2 + R^2 \pm 2d\sqrt{R^2 - \frac{m^2}{1+m^2}\,K^2}.$$

— Para $m = 0$, la ecuación de la sección se reduce á

$$x^2 + y^2 = (d \pm R)^2;$$

es decir, que la sección viene á ser dos circunferencias de círculo; pero los planos paralelos á las xy no son los únicos planos no meridianos que nos dan esta misma clase de sección, sino que asimismo se la obtiene por el plano bitangente al toro trazado por el eje de las y.

Las circunferencias de estos dos círculos tienen sus centros sobre el eje de las y, á una distancia de R del origen, y sus radios tienen por valor

$$\sqrt{2R^2 - d^2}.$$

— La sección de una esfera y de un toro se proyecta según una curva de segundo grado sobre el plano meridiano común á las dos superficies. Si se toma por plano de las xz el plano que pasa por el eje

del toro y por el centro de la esfera, la sección está representada por el conjunto de las ecuaciones

$$d^2 z^2 + \left(ax + cz - \frac{d^2 + R^2 + a^2 + c^2 - \rho^2}{2}\right)^2 - R^2 d^2 = 0$$

y

$$(x - a)^2 + y^2 + (z - c)^2 = \rho^2, \qquad (1)$$

siendo a y c las coordenadas del centro de la esfera y ρ su radio.

Asimismo se pueden buscar ciertas condiciones para hacer que esta sección fueran dos círculos. Estas son: que a, c y ρ estén ligadas por las relaciones

$$\begin{cases} R\rho = \pm\, ad \\ R^2 + \rho^2 = d^2 + a^2 + c^2 \end{cases}$$

ó

$$\begin{cases} (R + \rho)^2 = (d \pm a)^2 + c^2 \\ (R + \rho)^2 = (d \mp a)^2 + c^2 \end{cases}$$

y los planos de las secciones circulares determinados en el toro por las esferas convenientemente tomadas, están representados por

$$y = \pm\left(\frac{\sqrt{a^2 - R^2}}{R}\,x + \frac{a\,c}{R\sqrt{a^2 - R^2}}\,z\right),$$

y las esferas por la ecuación (1).

— El coseno del ángulo de uno de estos planos cíclicos con el de las xy valdrá:

$$\cos.\theta = \sqrt{\frac{\rho^2 - a^2}{\rho^2}};$$

el seno, sen . $\theta = \frac{a}{\rho}$, y, por tanto,

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{a}{\sqrt{\rho^2 - a^2}}.$$

Aplicación.—Estas curvas, cuya forma es muy singular, son poco

conocidas, porque hasta ahora no han presentado aplicación alguna importante.

Estabilidad.

Definición.—En el estudio de la estabilidad de los navíos se representan generalmente los resultados de los cálculos efectuados sobre los planos de sus formas por dos curvas, que se llaman curvas *de la estabilidad.*

— La primera de estas líneas ó curva de *estabilidad estática*, tiene por abcisas los ángulos θ, que el navío se inclina transversalmente, con la condición que el volumen sumergido sea constante, y por ordenadas los pares correspondientes C.

— La segunda ó curva de *estabilidad dinámica* tiene por abcisas los ángulos θ y por ordenadas el trabajo T del par de estabilidad, desde la inclinación 0 á la inclinación θ,

$$T = \int_0^\theta C \, . \, d\theta.$$

— De lo expuesto se deduce que esta segunda curva es la curva integral (ver esta voz) de primer orden de la primera.

Estereográfica.

Definición.—Curva que nos da la cantidad que desplaza un navío cuando se conoce su calado ó bien su calado en el agua para un desplazamiento dado.

— Se la suele dar también el nombre de *curva de los desplazamientos.*

Trazado.—El trazado de esta curva puede obtenerse de dos maneras distintas, según se haga uso de las coordenadas rectangulares ó de las coordenadas polares.

1.° *Empleo de las coordenadas rectangulares.*—En este supuesto se tomarán por ordenadas los calados de agua y por abcisas los desplazamientos. Así, por ejemplo, si se quiere reemplazar por una curva un cuadro de valores obtenidos, tales como el que corresponde á una fragata de vapor y que exponemos al lado de la figura 1, se encontrará adoptando para los calados de agua la escala de un centímetro por metro y para los desplazamientos la de un milímetro por 50 me-

tros cúbicos; la curva AB, que tiene, como se ve, una ligera curvatura, y cuya convexidad mira hacia arriba, nos da la curva pedida

Calados de agua.	Desplazamiento total en volumen.
m 3,05	m 853,21
3.59	1.168,02
4,13	1.514,82
4,67	1.788,01
5,21	2.283,58
5,75	2.697,58

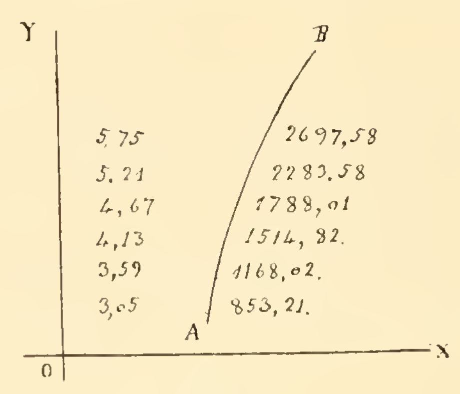


Figura 1.

que nos dice que entre los limites de calados de agua considerados, el crecimiento del desplazamiento se separa poco dè ser proporcional al crecimiento de los calados de agua.

2.° *Empleo de las coordenadas polares.*— En este caso tomaremos los ángulos polares para representar los desplazamientos: ordinariamente, el ángulo de 60° representa 1.000 metros cúbicos, de donde resulta que los 360° hacen 6.000 metros cúbicos, y por consecuencia la curva abraza rara vez más de los 360°. Se toman para radios vectores, no los calados de agua en si mismos, sino el exceso á una cierta cantidad constante sobre estos calados, es decir, después de haber trazado con un radio arbitrario una circunferencia, se toman sobre sus radios á partir de esta circunferencia hacia el centro, distancias proporcionales á los calados de agua correspondientes á los desplazamientos representados por los arcos de esta circunferencia, contados á partir de un mismo origen.

Si, por ejemplo, se quiere reemplazar por una curva polar el cuadro que hemos expresado, en coordenadas rectangulares, se encontrará fácilmente que si 1.000 metros cúbicos responden á 60°, los desplazamientos de $853^{m \cdot c},2$ — $1168^{m \cdot c},0$ — $1514^{m \cdot c},8$ — $1788^{m \cdot c},0$ — $2283^{m \cdot c},6$—$2697^{m \cdot c},6$ responderán á los arcos 51°,2—70° —90°,8 — 113°,3—137°—161°,8 que se tomarán sobre la circunferencia oc (fig. 2) á partir del punto o, y se obtendrán por este medio los puntos a, m, n, p, q, b. Se unirán estos puntos con el centro y sobre los radios correspondientes se tomarán, á partir de estos puntos, las longitudes aA, mM, nN, pP, qQ, bB proporcionales á los calados de aguas $3^m,05$

$-3^m,59$ $-4^m,13$ $-4^m,67$ $-5^m,21$ $-5^m,75$. En la figura se ha adoptado la escala de un semimilímetro por metro. Se obtendrán de esta manera los puntos A, M, N, P, Q y A, por los cuales se hará pasar una curva continua; ésta será la curva pedida.

Aplicaciones.—Fácilmente se comprenden las operaciones que son

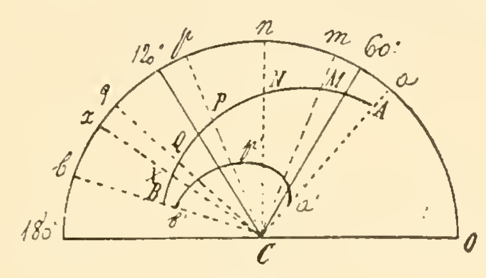


Figura 2.

necesarias ejecutar para resolver los problemas; «encontrar el calado de agua correspondiente á un desplazamiento dado», é inversamente, «determinar el desplazamiento que corresponde á un calado de agua dado», haciendo uso de las curvas encontradas referidas, ya á coordenadas rectangulares, ya á las polares.

—Se ha nombrado *antiestereográfica* á la línea de intersección de una esfera con el cono que tiene por polo un punto de dicha esfera y por base una curva trazada sobre el ecuador correspondiente al polo considerado.

Estoroides.

Nombre dado á las curvas de Lamé (ver esta voz) por Leroy (*Géométrie Descriptive*, pág. 203).

Estricción.

Definición.—Se llama línea de *estricción* de una superficie alabeada el lugar de los puntos centrales de sus generatrices.

Propiedades.—No todas las superficies alabeadas presentan aristas de retroceso (ver esta voz), puesto que en algunas sucede que las características de su envolvente no se cortan en punto alguno. Pues bien; en este caso existe en general un punto sobre cada característica, en el cual ésta se aproxima á la inmediata más que en todos los demás, puntos que se han dado en nombrar centrales de la ge-

neratriz que pasa por él, y la serie de estos puntos es la que da lugar á la línea que hemos definido.

— En el paraboloide hiperbólico el centro de cada generatriz es el punto de contacto del plano dirigido por esta generatriz perpendicularmente al plano director correspondiente.

— En el hiperboloide de una hoja el punto central es el punto de contacto del plano dirigido por la generatriz perpendicularmente al plano tangente ó cono asintótico conducido por esta misma generatriz.

Evoluta.

Del latín *evolutus*, desenvuelto.

Definición.—Se da este nombre á la curva lugar de los centros de curvatura de una curva propuesta, que es la evolvente (ver esta vez) con relación á la primera.

Historia.— Huyghens, *Horologium oscillatorium, sive de Motu pendulorum ad Horologia aptato demonstrationes Geometricæ* (París-1673), se ocupa, en la tercera parte, de la *evolución de las curvas y de su medida*, y da á estas líneas el nombre de *evoluta*, estudiando las de la elipse, hipérbola y parábola, proponiéndose la solución del problema *Datâ lineâ curvâ, invenire aliam cujus evolutione illa describatur; et ostendere quod ex unaquaque curva geometrica, alia curva itidem geometrica existat, cui recta linea æqualis dari possit*, y llegando á la determinación del centro de curvatura, considerándolo como punto de encuentro de dos normales infinitamente próximas.

Ecuación.— Llamando (x, y) las coordenadas de un punto de la curva propuesta y (X, Y) las del centro del círculo osculador á la curva en este punto, se tiene

$$X - x = -\frac{dy}{dx}\cdot\frac{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}{\dfrac{d^2y}{dx^2}},\quad Y - y = \frac{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}{\dfrac{d^2y}{dx^2}};$$

eliminando x é y entre estas dos ecuaciones y la de la curva, se tendrá la ecuación de la evoluta.

Propiedades. — Las normales á la evolvente son tangentes á la evoluta en los centros de curvatura, es decir, que la evoluta puede ser considerada como el lugar de las intersecciones sucesivas de la normal á la evolvente, y por lo tanto, como la envolvente de esta normal móvil que recibe el nombre de involuta.

— La diferencia entre dos radios de curvatura, MK y $M'K'$, es igual al arco $K'K$ de la evoluta comprendida entre los dos centros de curvatura correspondientes.

— Una misma curva no tiene más que una evoluta y á una misma evoluta corresponden infinitas evolventes.

— Si se imagina un hilo del cual una porción está enrollada sobre FK y la otra porción, extendida según la tangente $K'M'$, y se termina en M', este hilo, al desarrollarse describe su extremidad la curva AB. Para describir otra evolvente cualquiera de esta evoluta KK', bastará tomar otro cualquier punto del hilo distinto del M'.

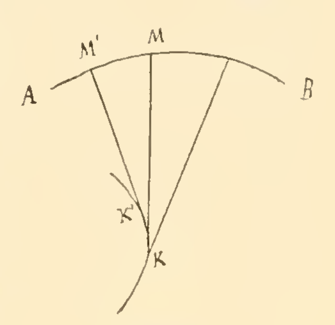


Figura 1.

— Si una curva es algebraica, los radios de sus circulos osculadores tendrán también una expresión algebraica, y por consiguiente, un arco de la evoluta, que es la diferencia de dos de estos radios, tendrán, en este caso, una expresión algebraica, y esta curva será rectificable.

Evolutas de las curvas de doble curvatura. — Se puede concebir el lugar de los centros de los círculos osculadores á una curva de doble curvatura, tan sencillamente como el lugar de los centros de curvatura de las curvas planas; pero este lugar no recibe el nombre de evoluta de la curva primitiva.

Historia.—A Monge principalmente se debe el estudio particular de estas líneas y se puede consultar su obra *Géométrie Descriptive*, y Leroy, *Traité de Géométrie Descriptive*.

Determinación. – Si se imagina una normal cualquiera á una curva de doble curvatura y el plano normal infinitamente próximo, la intersección de la recta y el plano será un punto de una de las *evolutas* de la curva propuesta. Este punto de encuentro pertenecerá á una segunda normal á la curva, normal que se podrá cortar por el plano normal siguiente, y el nuevo punto será también de la evoluta, que servirá para encontrar un tercero y así de los demás. Trazando otra normal cualquiera y repitiendo para cada una las consideraciones anteriores, se obtendrían infinitas evolutas de la curva dada, estando todas situadas en la superficie desarrollable lugar de los planos normales.

— Si la curva es esférica, todos los planos normales pasarán por el centro de la esfera y su envolvente será un cono cuyo vértice estará en el centro de la esfera. Además, todas las normales principales de

la curva dada pasarán por dicho centro, cortándose mutuamente; luego la evoluta correspondiente se reduce á un punto. Si en el cono, lugar de las evolutas, se traza una de estas curvas, con ella y el centro de la esfera se tendrán datos suficientes para trazar la curva dada.

— Si la curva, además de esférica, fuera plana, el cono, lugar de las evolutas, sería de revolución y su eje perpendicular al plano de la curva, cortándola en el centro de la misma, y ésta sería una circunferencia.

— Si la línea es una curva plana cualquiera, la superficie desarrollable, lugar de todas las evolutas, sería un cilindro de generatrices perpendiculares al plano de la curva. Las diversas evolutas serán hélices del cilindro, y siendo la curva plana, las normales principales estarán situadas en el mismo plano y se cortarán consecutivamente; por lo tanto, el lugar de los centros de curvatura será una verdadera evoluta, la cual coincidirá con la sección recta del cilindro envolvente de los planos normales, y puede considerarse como el límite de las hélices que se pueden trazar en el referido cilindro.

Evoluta de la elipse.— Aplicando la regla general, se podrá obtener la ecuación de esta curva; pero preferimos aquí exponer algunos de los métodos empleados por diferentes autores para encontrarla.

Métodos de M. M. Lignieres y Chasles de Trenquelléon: Consideran esta curva como lugar de los puntos desde los cuales no se pueden trazar más de tres normales á la elipse.

Primer método.—Los pies de las normales trazadas por el punto (α, β) están dados por la intersección de la elipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \qquad (1)$$

y de la hipérbola

$$\beta - y = \frac{a^2\,y}{b^2\,x}(\alpha - x). \qquad (2)$$

Las líneas de segundo grado que pasan por los puntos de intersección de las curvas (1) y (2) tienen por ecuación general:

$$a^2y^2 + \lambda c^2xy + b^2x^2 - \lambda a^2\alpha y + \lambda b^2\beta x - a^2b^2 = 0,$$

la cual representará dos rectas si

$$c^2\alpha\beta\lambda^3 + (a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - c^4)\lambda^2 + 4a^2b^2 = 0,$$

ó

$$4a^2b^2\left(\frac{1}{\lambda}\right)^3 + (a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - c^4)\left(\frac{1}{\lambda}\right) + c^2\alpha\beta = 0,$$

y á cada sistema de dos rectas corresponde un valor real de λ.

Si no hay más que tres normales, las curvas (1) y (2) no tienen más que tres puntos comunes, y no hay más que dos sistemas de rectas; y, por consiguiente, la ecuación en λ, como la en $\frac{1}{\lambda}$, tienen dos raíces iguales; se tiene, pues,

$$(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - c^4)^3 + 27 \,.\, a^2b^2c^4\alpha^2\beta^2 = 0.$$

de donde

$$a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + 3\,(a^2b^2\alpha^2\beta^2)^{\frac{1}{3}}(c^4)^{\frac{1}{3}} = c^4,$$

y, por tanto,

$$(a^2\alpha^2)^{\frac{1}{3}} + (b^2\beta^2)^{\frac{1}{3}} = (c^4)^{\frac{1}{3}},$$

ecuación que puede escribirse así:

$$\left(\frac{a\alpha}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b\beta}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

que es la ecuación de la evoluta de la elipse.

Segundo método.—Tomemos la ecuación de la normal á la elipse:

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

en función del coeficiente angular.

$$y = mx \pm \frac{c^2m}{\sqrt{a^2 + b^2m}},$$

que se puede escribir

$$(y - mx)^2\,(a^2 + b^2m^2) - c^4m^2 = 0 \qquad (1)$$

— En general, esta ecuación da para m cuatro valores, y como no

tiene más que tres raíces diferentes, tendrá una raiz común con la ecuación formada, igualando á cero la derivada de su primer miembro con relación á m; esta ecuación derivada es:

$$-x(y-mx)(a^2+b^2m^2)+(y-mx)^2b^2m-c^4m=0. \qquad (2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) deben tener una raiz común. Multipliquemos la ecuación (1) por x y la (2) por $y-mx$, y sumando será:

$$(y-mx)^3=\frac{c^4y}{b^2},$$

de donde

$$m=\frac{y-\sqrt[3]{\dfrac{c^4y}{b^2}}}{x}.$$

Si se cambia en este valor de m, x en y, y en x, a en b y b en a, se tendrá el valor de $\frac{1}{m}$; de donde,

$$\frac{1}{m}=\frac{x-\sqrt[3]{\dfrac{c^4x}{a^2}}}{y}.$$

Multiplicando estas dos últimas ecuaciones, miembro á miembro, resulta:

$$y\sqrt[3]{\frac{c^4x}{a^2}}+x\sqrt[3]{\frac{c^4y}{b^2}}=\sqrt{\frac{c^8xy}{a^2b^2}},$$

y dividiendo ambos miembros por

$$\sqrt[3]{\frac{c^8xy}{a^2b^2}},$$

resulta para ecuación de la evoluta á la elipse

$$\left(\frac{x}{\frac{c^2}{a}}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{\frac{c^2}{b}}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Método de M. L. Taillier: Consideremos el círculo descrito sobre el eje mayor $A\,O\,A'$ de la elipse, de centro O. Sea M un punto de este círculo, N el punto correspondiente de la elipse, $(x'\,y')$ las coordenadas de N y φ el ángulo $M\,O\,A$. Se tiene:

$$x' = a\,.\cos.\varphi \qquad y' = b\,.\operatorname{sen}.\varphi.$$

La ecuación de la normal en el punto (x', y') es.

$$b^2x'y - a^2y'x + c^2x'y' = 0,$$

y reemplazando x' é y' por sus valores,

$$by\cos.\varphi - ax\,.\operatorname{sen}.\varphi + c^2\operatorname{sen}.\varphi\,.\cos.\varphi = 0. \qquad (1)$$

Para obtener el lugar de las intersecciones sucesivas, se eliminará x entre la ecuación (1) y su derivada. Dividiendo esta ecuación por *cos.* φ, se tendrá:

$$by - ax\operatorname{tg}.\varphi + c^2\operatorname{sen}.\varphi = 0,$$

y su derivada nos da

$$-\frac{ax}{\cos^2\varphi} + c^2\cos.\varphi = 0,$$

de donde

$$\cos\varphi = \left(\frac{ax}{c^2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Dividiendo la ecuación (1) por *sen.* φ, se tiene:

$$by\,.\cot.\varphi - ax + c^2\cos.\varphi = 0$$

y de la derivada se obtiene:

$$\operatorname{sen}.\varphi = -\left(\frac{by}{c^2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Sustituyendo por $\cos.\varphi$ y $\operatorname{sen}.\varphi$ estos valores en $\operatorname{sen}.^2\varphi + \cos.^2\varphi = 1$, se tendrá:

$$\left(\frac{ax}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{by}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1, \qquad (a)$$

ecuación de la evoluta de la elipse.

Forma de esta curva.— Si se cambia en (a) x en $-x$ ó y en $-y$, la ecuación no se altera, lo cual nos dice que la evoluta de la elipse es simétrica con respecto á ambos ejes coordenados.

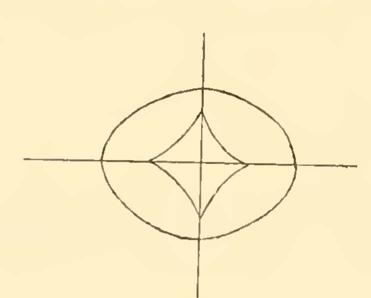


Figura 2.

— Si se buscan los puntos en que la evoluta corta al eje de las x, se obtienen los dos puntos

$$x = \pm \frac{c^2}{a},$$

y como $\frac{c^2}{a} < c$, se deduce que estos puntos están más próximos al centro que los focos.

Los puntos en que corta al eje de las y están dados por los valores de y,

$$y = \pm \frac{c^2}{b},$$

y como $\frac{c^2}{b^2}$ puede ser mayor, igual ó menor que b, resulta que estos puntos pueden estar fuera de la elipse, en la elipse ó en un punto del eje interior á esta curva.

Observaremos también que la evoluta en los puntos en que encuentra á los ejes, viene á ser tangente á estas líneas, por ser ellas normales á la evolvente.

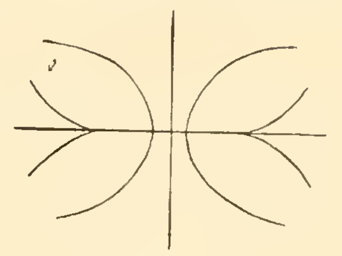
De todas estas consideraciones resulta que la evoluta á la elipse tiene la forma expresada en la figura 2.

Evoluta de la hipérbola.—Cambiando el signo de b^2 en la ecuación

de la evoluta de la elipse, se tendrá la de la hipérbola, que será, por consiguiente,

$$\left(\frac{ax}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{by}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

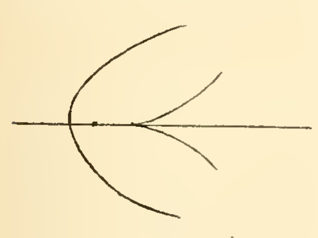
y razonando para obtener su forma, como en aquélla se hizo, se deducirá sin dificultad ninguna que la forma de esta curva es la expresada en la figura 3.


Figura 3.

Evoluta de la parábola. — Aplicando el método, se encuentra para ecuación de esta curva:

$$y^2 = \frac{8}{27 \cdot p}(x - p)^3,$$

de la cual se deduce que la curva es simétrica con respecto al eje de las x; que encuentra al eje de las x en un punto cuya abscisa es igual á p; que á toda abscisa menor que p corresponde una ordenada imaginaria, y que á medida que crece x desde $x = p$ hacia $x = \infty$, la ordenada y varia desde $y = 0$ á $y = \infty$.


Figura 4.

Es además la evoluta á la parábola tangente al eje de las x en el punto en que le toca, por ser este eje normal á la curva y que afecta, atendiendo á todas estas circunstancias, la forma indicada en la figura 4.

Huygens la estudia considerándola como una *curva paraboloide*.
— Estos ejemplos son aquí suficientes y dejamos la exposición de otros muchos, puesto que al hablar de cada curva en particular hacemos referencia á sus evolutas cuando estas líneas merecen ser consignadas.

Evolutas equiláteras.— La ecuación

$$x^{\frac{2}{3}} \pm y^{\frac{2}{3}} = \gamma^{\frac{2}{3}},$$

en la que λ es una longitud constante, representan curvas que

Mr. Breton nombra *evolutas equiláteras* (cuando los ejes forman un ángulo recto) de la elipse y de la hipérbola.

— La evoluta equilátera de la hipérbola es siempre la evoluta de una hipérbola equilátera.

— De la elipse se puede decir considerando la evoluta equilátera de esta curva como la evoluta de una circunferencia de círculo ó *elipse equilátera* cuyo radio sea infinitamente grande. (*Nouvelles Annales.*— T. II, pág. 227.)

Evolutoides.

Definición.—Curva formada por las intersecciones sucesivas de las rectas que cortan á una curva dada cualquiera, según un ángulo constante.

Historia.— Lancret, *Mémoires des Savants étrangers* (t. II), estudia estas curvas exponiendo sus propiedades, determinando sus ecuaciones y demostrando que para obtenerlas en forma finita basta integrar una ecuación diferencial de primer orden con dos variables, la cual, en general, no es integrable; pero si las tangentes á la evolutoide (developpoide) cortan á la curva dada en ángulos rectos, estas curvas vienen á ser las evolutas.

Caso de una evolutoide.— En las escaleras de compensación, las aristas salientes de los escalones (trazada la compensación) están situadas en el espacio sobre una superficie alabeada engendrada por una horizontal, que se mueve apoyándose sobre una hélice de la línea de paso ó huella y sobre la línea del ojo de la escalera, ó también se puede considerar esta superficie engendrada prolongando las proyecciones horizontales de las aristas salientes de los escalones, las cuales determinan sobre el plano horizontal de proyección por sus puntos de encuentro consecutivos una línea quebrada, en la cual se puede inscribir una curva que se le ha dado el nombre de *evolutoide* y considerar esta curva como la base de una superficie cilíndrica vertical, á la cual las generatrices de la superficie alabeada, definida más arriba, será constantemente tangente.

Evolvente.

Definición.— Toda curva plana toma el nombre de *evolvente* con relación á su evoluta.

Historia.—Huyghens, en la obra citada, en *evoluta* (ver esta voz), estudia estas líneas dándolas el nombre de *ex evolutione descripta*,

siendo por medio de ellas como pretende verificar la rectificación de las curvas.

Ecuación.— Si se traza á una curva dada una tangente indefinida cualquiera; si se señala un punto sobre esta tangente y se la hace rodar sin resbalamiento á la tangente sobre la curva, el punto marcado describe una de las evolventes de la curva propuesta.

Sea

$$y = f(x) \qquad (a)$$

la ecuación de una curva, la de su tangente en el punto (x, y) será:

$$Y - y = f'(x)(X - x) \qquad (b)$$

Sean (x_0, y_0) las coordenadas de un punto cualquiera de la curva propuesta y r_0 la longitud tomada á partir de este punto sobre la tangente á propósito para definir el punto de la evolvente correspondiente al punto (x_0, y_0); la distancia llevada á partir del punto (x, y) sobre la tangente en este punto será r_0 más el arco de la curva propuesto comprendido entre los dos puntos (x_0, y_0) y (x, y); se tendrá, pues, para la determinación del punto $X\,Y$ de la evolvente.

$$\sqrt{(X - x)^2 + (Y - y)^2} = r_0 + \int_{x_0}^{x} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \qquad (c)$$

y eliminando x é y entre las tres ecuaciones (a), (b) y (c) se tendrá la ecuación de la evolvente pedida.

Propiedades.—A una evoluta corresponden una infinidad de evolventes.

— Las evolventes de una curva son todas paralelas.

— Los radios de curvatura en los puntos correspondientes de dos evolventes difieren por una constante, ésta es la distancia de los dos puntos marcados sobre la primera tangente y que engendran separadamente las dos evolventes.

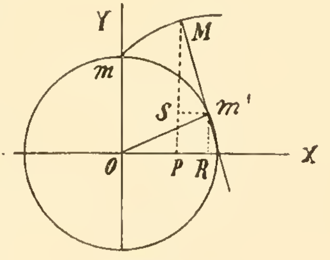


Figura 1.

Evolvente de círculo. — *Definición.* —Se llama así la curva descrita por un punto de una recta que rueda sin resbalar sobre un círculo fijo.

Ecuación.—Sea O (fig. 1) el centro del círculo fijo, que tomaremos

por origen de coordenadas, m el punto de contacto de la recta y el circulo en el origen del movimiento.

Para encontrar la ecuación de la curva descrita por este punto, consideremos una posición Mm_1 de la recta y M un punto de la curva. Se tendrá:

$$x = OR - Sm_1, \qquad y = m_1R + SM;$$

si llamamos φ al ángulo m_1Om y r_0 al radio del círculo, se tendrá:

$$m_1M = \text{arc} . mm_1 = r_0\varphi,$$

y, por tanto,

$$x = r_0 \operatorname{sen} \varphi . - r_0 \varphi . \cos\varphi, \qquad y = r_0 \cos . \varphi + r_0\varphi \operatorname{sen} . \varphi,$$

fórmulas que servirán para calcular las coordenadas (x, y) de un punto cualquiera de la curva.

— La distancia de un punto de la curva al centro O será:

$$d^2 = r_0^2 + r_0^2\varphi^2,$$

distancia que aumentará á medida que aumente φ. La curva será, pues, una espiral indefinida cuyo origen será el punto m.

— La ecuación de esta curva en coordenadas polares, será:

$$d\theta = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{ar} dr.$$

Propiedades. — Esta curva pertenece á la familia de las trocoides (ver esta voz), y goza, por tanto, de la propiedad de que la normal, en un punto cualquiera, pasa por el punto de contacto correspondiente de la recta móvil con la circunferencia fija. Es, en este caso, la misma recta móvil.

— También se la puede considerar engendrada por el extremo de un hilo flexible é inextensible que, arrollado sobre una circunferencia de círculo, se desarrolla permaneciendo tirante. Dos puntos cualesquiera de este hilo describirán evolventes iguales y equidistantes.

— La evolvente de círculo se obtiene también considerándola como el camino que sigue el polo de una espiral logarítmica al rodar sobre otro círculo. En efecto; hagamos rodar una espiral logarítmica sobre

un círculo de radio arbitrario OB, y propongámonos determinar la curva que describe su polo P (fig. 2).

Sea B el punto de contacto de las dos curvas, P la posición correspondiente del polo, BC la tangente común. Según una propiedad conocida de la espiral, el ángulo $\widehat{DBC}$ es constante. Lo será asimismo el ángulo $\widehat{OBD}$, y, por consiguiente, la distancia OD.

Por otra parte, BP es normal á la trayectoria del punto P, y se acaba de ver que esta línea BP se encuentra á una distancia constante del punto O, es decir, que es siempre tangente al círculo descrito desde el punto O como centro con OD por radio. El camino recorrido por el punto P es, pues, la evolvente del círculo OD. (Mr. Rouquel).

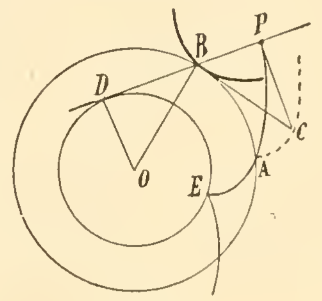


Figura 2.

Trazado.— Para el trazado de esta línea, se dividirá la circunferencia de círculo en un número de partes iguales, tanto mayor cuanto mayor sea el grado de exactitud que queramos obtener, y por los puntos de división 1, 2, 3..... (fig. 3), se trazarán las tangentes $1.t_1$, $2.t_2$, $3.t_3$..... que representarán otras tantas posiciones de la recta móvil mt, faltando sólo señalar en cada una la posición del punto generador m, lo cual se consigue tomando sobre la tangente $1.t_1$, y á partir del punto 1, la distancia $1.a$ igual á la longitud del arco $1.m$; en la tangente $2.t_2$, la distancia $2.b$ igual á la longitud del arco $2m$ que será doble de la distancia anterior, y del mismo modo determinaríamos los puntos c, d, e..... que forman la línea buscada.

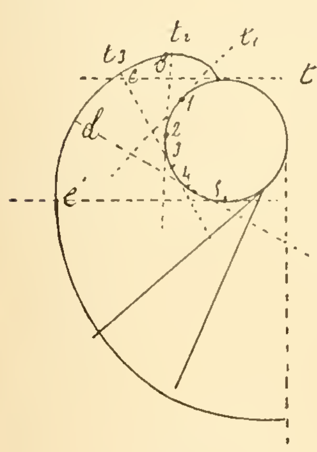


Figura 3.

Se puede construir otra curva partiendo del propio punto m hacia la derecha simétrica de la anterior.

Aplicaciones.—En la construcción de los dientes de los engranajes.

Evoluta esférica.—Definición.—Recibe este nombre la curva engendrada por un punto de la superficie de un cono recto de base circular, cuando esta superficie se desarrolla según un plano constantemente tangente al cono.

— Como el punto que engendra esta curva permanece á una distancia constante del vértice del cono, se encontrará sobre una esfera: de aquí su denominación de evoluta esférica.

Construcción.— Para construir las proyecciones de esta línea, supongamos que el eje del cono sea vertical, y que tomamos por plano horizontal de proyección aquél que contiene el punto situado sobre el cono que describe la curva, y por plano vertical uno paralelo á la sección meridiana que contiene dicho punto en su posición inicial. Sea, bajo estos supuestos, $L\ T$ la línea de tierra (fig. 4), $S — S'$ las proyecciones del vértice del cono y OA el radio de su base paralelo á la línea de tierra. El punto AA' será el que describe la curva.

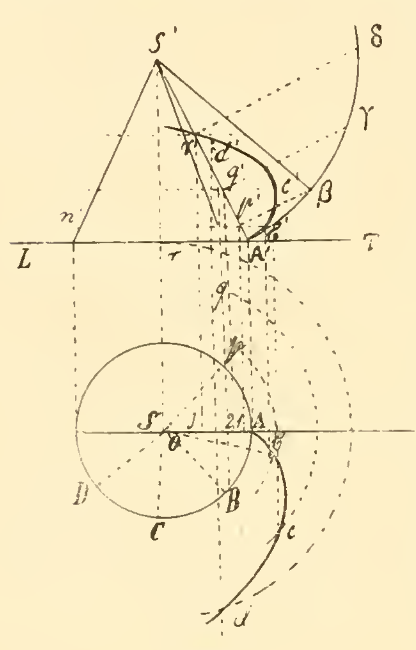


Figura 4.

Consideremos ahora que en el desarrollo del cono sobre su plano tangente, SA ha venido á ocupar la posición SB y busquemos el lugar del punto AA'; para ello hagamos girar todo el sistema hasta que la generatriz SB se coloque paralela al plano vertical, y teniendo en cuenta que el punto A se movería sobre el arco Ab de centro S' una cantidad Ab igual al arco AB, el punto b, después del giro, vendrá á estar sobre $S'A$ en p', cuya proyección horizontal es p; deshaciendo el giro este punto pp' vendrá á ocupar la posición bb' siendo el ángulo $psb = ASB$ y el punto bb' será un punto de la curva buscada. Iguales construcciones nos determinarán los puntos cc' dd'..... y la evoluta esférica tendrá para proyecciones sobre los planos considerados las líneas $Abcd$ y $A'b'c'd'$.

Para trazar la tangente á esta curva en un punto cualquiera, bb', basta considerar que dicha línea deberá estar situada en el plano trazado por este punto perpendicular á la recta $SB — S'B'$ y en el plano tangente á la esfera en $b — b'$, es decir, en el plano trazado por $b — b'$ perpendicular á la recta $Sb — S'b'$. Por consiguiente, la tangente buscada será la intersección de estos dos planos.

Propiedades.—Se puede considerar esta curva como descrita por

un punto de un plano que rueda sin resbalar sobre un cono de revolución.

— Si se supone un hilo arrollado sobre un círculo no máximo de una esfera y se le desarrolla colocándole sobre un arco de círculo máximo tangente al anterior, su extremo describe en este movimiento sobre la esfera la evoluta esférica del círculo menor.

Aplicaciones.—La tiene en mecánica para la construcción rigurosa de ciertos engranajes cónicos, si bien se suelen reemplazar estas construcciones, que son largas y penosas, por otros medios aproximados debidos á Tredgold, que son suficientes en la práctica y desde luego más expeditivos.

Excéntrica.

Del latino *excentricus*.

Definición. — En Geometría se dice que dos circunferencias son *excéntricas*, cuando encerrada la una en la otra no tienen el centro común y como oposición á concéntricas. (Ver esta voz.)

También se dice de aquellas curvas cuyos focos no coinciden en uno solo, como sucede en el círculo. Así, pues, la elipse es una curva excéntrica, y tanto más, cuanto la diferencia de sus ejes es mayor.

— En Mecánica, las excéntricas son dos curvas enlazadas girando alrededor de un punto que no está en el centro de figura; estos órganos tienen por objeto el transformar los movimientos de rotación en otros de ida y vuelta, siendo de un uso frecuente. (Ver curva de *Marcha.)*

Excéntrica en forma de corazón. — Como esta excéntrica es llamada por muchos autores *curva de corazón ó cordiforme*, entramos aquí en su descripción y en la del medio de verificar su trazado.

Definición. — La curva en corazón ó excéntrica de movimiento uniforme tiene por objeto el transformar un movimiento circular continuo en movimiento rectilíneo alternativo. Su continuidad permite que con dos ángulos iguales descritos por el árbol giratorio la pieza avance ó retroceda cantidades iguales.

Trazado y propiedades. — Sea O (fig. 1) la proyección del eje de rotación sobre el plano de la figura, y $X\ Y$ una recta que pasa por este punto, perpendicular al eje, y según la cual el movimiento rectilíneo debe tener lugar. Imaginemos, por ejemplo, que el punto B sea el extremo de una pieza que se trata de hacer mover uniformemente de B hacia A y después de A hacia B, y así sucesivamente, sin interrupción, por medio de un movimiento de rotación uniforme

alrededor del eje O. Desde el punto O como centro, con $O B$ por radio se describe una semi-circunferencia; se la divide en un cierto número de partes iguales, 6 por ejemplo, y, por los puntos de división, se dirigen radios que se prolongan indefinidamente. Se divide asimismo la recta $A B$ en igual número de partes iguales y se numeran, como se ha hecho en la figura, los puntos de división. Los encuentros de los círculos trazados con los radios 01, 02, 03..... y los radios 01, 02, 03..... nos determinan, haciendo pasar por ellos un trazado continuo, una curva, la cual es una espiral de Arquímedes, y se la repite simétricamente por bajo de la línea $X Y$ quedando trazada la curva de corazón.

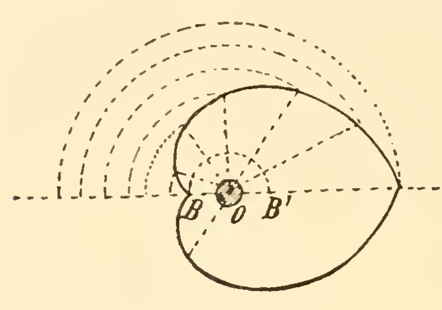
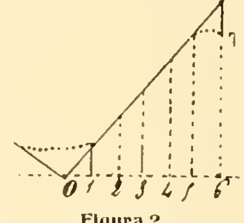


Figura 1.

— Las distancias de los puntos de la curva al centro del eje de rotación se llaman *radios vectores* y crecen proporcionalmente á los arcos descritos.

— Si por el punto O se traza una recta cualquiera, terminada á un lado y otro en la curva de corazón, esta recta tiene una longitud precisamente igual á la longitud $B C$.

— Si se quiere determinar la relación que existe entre los espacios y los caminos recorridos por la varilla para un punto de la excéntrica, cuando el árbol está animado de un movimiento uniforme, se pueden construir las coordenadas rectangulares tomando por eje de abscisas el desarrollo de la circunferencia del nacimiento de la curva, que se divide en 6 partes iguales, como para el trazado; y por ordenadas, en cada uno de sus puntos, los cursos ó caminos recorridos correspondientes; sean los puntos 1, 1 — 1, 2, 2 — 2..... (fig. 2). Siendo uniforme el movimiento, la línea inclinada 0 — 7 representa las velocidades, y para determinar el espacio recorrido durante un período, basta servirse de la relación del movimiento uniforme entre el espacio, la velocidad y el tiempo.


Figura 2.

— Los acuerdos en forma curva que reemplazan á los ángulos salientes y entrantes modifican algo la ley del movimiento. Para obtener la relación del movimiento de la varilla con relación al del ár-

bol se dirige una tangente común á estos dos arcos de círculo. Esta curva tiene el inconveniente de causar un paso muy brusco del reposo al movimiento, lo que contribuye á alterar las partes en contacto. Se hace el trazado continuo y se redondean las partes entrantes ó salientes.

— Para el caso en que el movimiento uniforme no sea una de las condiciones del problema, se puede imponer como condición más preferible, que el movimiento se acelere uniformemente después de comenzado el curso hasta su mitad y que se retarde uniformemente también durante la otra mitad. M. Morin ha propuesto el medio de verificar el trazado de la curva que satisface á estas condiciones y que en este caso reemplaza á la curva en corazón, y es el siguiente:

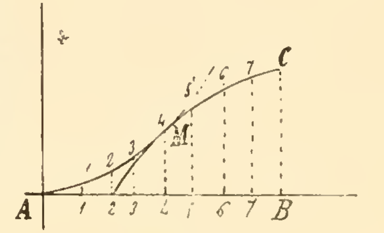
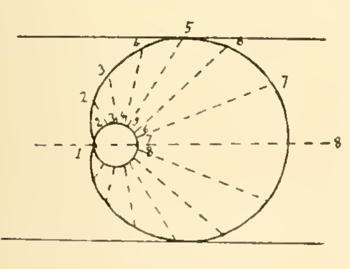


Figura 3.

Sea $A B$ (fig. 3) una recta que representa la semi-circunferencia, y BC perpendicular á $A B$ é igual al curso que se trata de producir. Dividamos $A B$ en 8 partes iguales y tomemos $4 M$ igual á la mitad de $B C$. Tracemos un arco de parábola, $A M$, tangente en A á la recta $A B$ que pasa por el punto M, y tenga el punto A por vértice. Tracemos invertido el arco $M C$ igual al $A M$ y tangente ambos en M. La curva $A M C$, considerada como curva de los espacios (ver esta voz) representa un movimiento que es uniformemente acelerado de A á M y uniformemente retardado de M á C. Hecho esto, se dividirá la linea de las abscisas en partes iguales y por cada uno de los puntos de división obtenidos, se levantan perpendiculares, limitadas en las parábolas, que serán las ordenadas correspondientes á cada porción del curso. Sea ahora O la proyección del eje de rotación (fig. 4) y OA la distancia inicial de la pieza que deba ser girada á este eje de rotación, se describirá desde O como centro una circunferencia con OA por radio, que será el círculo de nacimiento de la excéntrica, sobre el que se llevan las divisiones de su desarrollo, y por O se dirigen los radios que pasan por estos puntos 1, 2, 3..... Se dan á estas líneas, á partir de la circunferencia, las longitudes de las ordenadas correspon-


Figura 4.

dientes que determinan los puntos de paso de la curva y que, reunidos por un trazo continuo, nos darán ésta. Simétricamente, por bajo de *A8*, se trazará su otra mitad y quedará así conocida la forma de la excéntrica

El ojo del círculo de nacimiento es arbitrario, siendo conveniente sea algo grande con relación al curso, para hacer su acción sobre la varilla menos oblicua y alargando la curva.

Otras excéntricas. — Las excéntricas anteriores no producen más que una ida y una vuelta en una de sus revoluciones completas; pero entendido el principio de su construcción, es sencillo el obtenerlas para el caso de un número cualquiera de idas y vueltas durante una sola revolución de la curva.

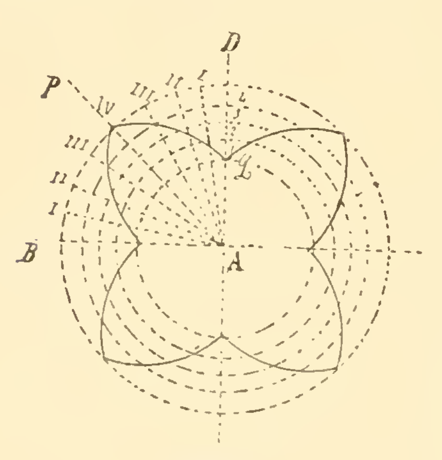


Figura 5.

Sea, por ejemplo, el caso de una excéntrica capaz de producir cuatro idas y otras tantas vueltas de la varilla, iguales entre sí y de un movimiento uniforme. Después de tomar (fig. 5) las rectas *AD* y *AQ*, respectivamente iguales á la mayor y más pequeña distancia del extremo de la varilla al centro *A* del movimiento, se describe una circunferencia con el radio *AD* y se la divide en cuatro partes iguales, pudiéndola dividir en seis ú ocho ó más; se divide *DQ* en un número cualquiera de partes iguales, que se numerarán 1, 2, 3..... á partir de *Q*, y desde el centro *A* se describen las circunferencias de radios *AQ*, *A*1, *A*2..... Hecho esto, se divide cada cuarto de círculo en el número de partes iguales doble de aquel de partes en que se ha dividido *DQ*, que, en este caso, serán ocho, por estar *DQ* dividido en cuatro, y se numeran los puntos de división *I*, *II*, *III*, *IV*.... á partir de cada extremo del arco, como se ha hecho en la figura con el cuarto de círculo *BPD*, de modo que el número *IV* corresponda al medio del arco; desde el centro *A* se trazan radios á los puntos de división, y sus intersecciones con las circunferencias del mismo número serán los puntos de la curva, que, por construcciones simétricas, nos dará, por último, la forma indicada en la figura.

— Una excéntrica de movimiento uniforme, puede producir al mis-

mo tiempo intermitencia; es decir, que la ida y la vuelta puedan ser separadas por puntos de parada. Si se quiere, por ejemplo, que los puntos de parada correspondan cada uno á un cuarto de revolución, se trazará la excéntrica como indica la figura 6. *BD* es un arco de espiral de Arquimedes, obtenido, como para la excéntrica, en corazón. El arco *EC* es la reproducción simétrica con relación á la bisetriz del ángulo *DOC*, y los arcos *DC* y *EB* son arcos de círculo trazados desde el punto *O* como centro.

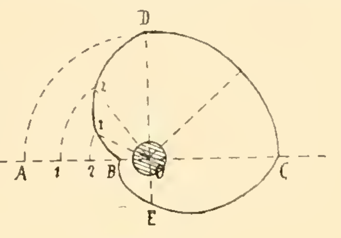


Figura 6.

— Si se quiere producir en cada revolución entera cuatro cursos y otras tantas intermitencias, y se impone la condición que el movimiento sea acelerado durante la primera mitad del curso y retardado durante la segunda, será necesario dar á la excéntrica la forma (figura 7) en la cual los arcos *AB* y *EF*, *CD* y *GH* son arcos de círculos descritos desde el punto *O* como centro, y responden á los tiempos de parada de la excéntrica. Las curvas *BC*, *DE*, *FG* y *HA*, se trazarán según el procedimiento indicado de M. Morin y se acuerdan con los arcos *A B*, *CD*, etc. Esta excéntrica se emplea en las máquinas de vapor de Maudslay.

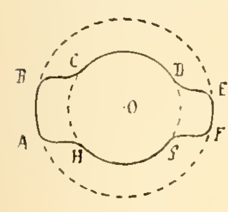


Figura 7.

— La excéntrica de ondas (fig. 8), se emplea para reglar el movimiento de los tiradores de distribución de una máquina de vapor de detención constante. Consideremos cuatro circunferencias concéntricas, separadas las unas de las otras por un intervalo igual al espesor de una de las aberturas. Dividamos estas circunferencias por dos diámetros, *AC* y *BD*, que no sean perpendiculares entre sí; los arcos contenidos en los ángulos marcados sobre la mayor y la más pequeña de las circunferencias, forman una parte del contorno de la excéntrica; los arcos contenidos en los ángulos agudos sobre las dos circunferencias medias forman el resto del contorno; los cuatro arcos se unen por

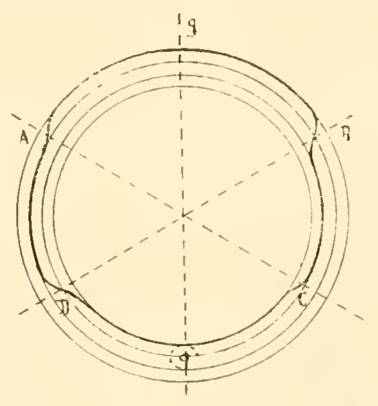


Figura 8.

pequeñas curvas de acuerdo. Por consecuencia de la construcción, todos los diámetros de la excéntrica son iguales.

— Se tiene también la excéntrica triangular formada por un triángulo equilátero curvilíneo, la cual se usa para hacer mover los tiradores de las máquinas de vapor de Edwards del sistema Woolff; la excéntrica circular ó excéntrica propiamente dicha, que no describimos por no ser como las anteriores curvas especiales; la de vírgulas, etc., y, en general, tantas cuantas se quieran construir, por lo menos teóricamente, según la ley del movimiento alternativo que se quiera obtener.

Historia. — Uno de los geómetras que se han ocupado de las curvas excéntricas, es Deparcieux, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1747, donde da á conocer métodos sencillos para su trazado en todos los casos. Pueden ser consultadas las diferentes obras, debidas á Haton de la Goupillière, Poncelet, Prony, Morin, Pambour, etcétera, sobre las aplicaciones de la Mecánica á las máquinas.

En Astronomía se ha dado antiguamente el nombre de círculo *excéntrico* á la tierra, á un círculo imaginado para explicar la desigualdad de los radios de las órbitas planetarias, suponiendo que la tierra era el centro.

Exponencial.

Del latino *exponens*, exponente.

Definición.—Se denomina así á toda curva expresada por una ecuación exponencial.

Historia.— Huyghens propuso dar á estas curvas el nombre de *hypertrascendentes*, y J. Bernouilli, primero que se ocupa de estas clases de curvas, discute porque deba ser *hiper* y no *hipo* (*Op. Omnia*, T. I, pág. 180). Se puede ver, entre otros estudios de esta clase de curvas, la Memoria de M. Vincent, *Considerations nouvelles sur la nature des courbes éxponentielles et logarithmiques* (1824). *Annales de Gergonne.*

Ejemplos.—Como ejemplo de curva exponencial tenemos la $y=a^x$ ó sea $x=lg.\ y$, curva que es la llamada *logaritmica* (ver esta voz). También se puede ver la voz *trascendentes.*

Sea á considerar la representada por la ecuación

$$y = e^{-x^2},$$

para la cual se tendrá:

$$\frac{dy}{dx} = -2xe^{-x^2} \quad \text{y} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}.$$

Esta curva se compondrá de dos ramas iguales, situadas á distinto lado del eje de las y, y el valor de la ordenada OB, punto en que corta al eje de las y, será igual á la unidad.

— Los puntos M, para los cuales la abscisa $OP = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y el coeficiente diferencial de segundo orden se hace nulo y cambia de signo, son puntos de inflexión.

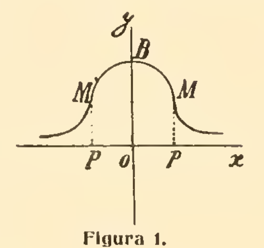


Figura 1.

— La curva presenta su concavidad hacia el eje de las x en el intervalo MBM, pasado el cual se hace convexa.

— El eje de las x es una asíntota en el sentido positivo y en el negativo. Así, pues, la forma de esta curva es la que nos muestra la figura.

Expósita.

Denominación dada por Jacobo Bernouilli en su obra *Lineæ cycloidales, evolutæ, antevolutæ, causticæ, anticausticæ, pericausticæ. Earum usus et simplex relatio ad se invicem* á la curva fija con respecto á la cual estableció las reglas que se habían de seguir para encontrar su evoluta, antevoluta, cáustica, anticáustica y pericáustica (ver estas voces).



Figuras de Lissajous.

En Física se da este nombre á familias de curvas que representan la composición óptica de dos movimientos vibratorios rectangulares, producidos por dos diapasones.

—Lissajous *(Ann. de Physique et de Chimie.*—1837) estudia las ecuaciones y trazados de estas líneas, y Broux las denomina *Stimmgabelcurven.*

Figurativa.

Definición.— Nombre con que se designa algunas veces á la curva gráfica que representa las distintas circunstancias de un fenómeno observado.

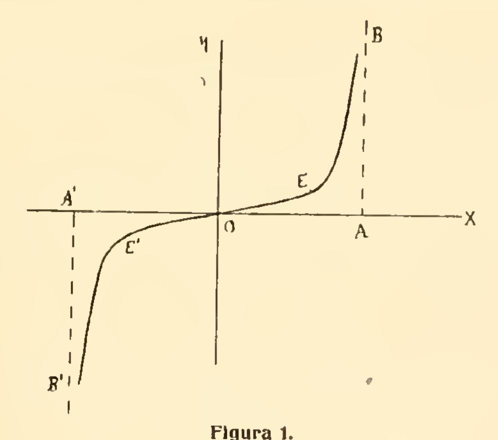


Figura 1.

Ejemplo.— Sirva como tal la línea figurativa de los fenómenos de extensión en una barra originados por un esfuerzo en el sentido de su longitud.

Sobre una horizontal ó eje OX de las abscisas (fig. 1) se tomarán

los esfuerzos $\frac{N}{w}$; por unidad de superficie, á los que se ha sometido la barra durante las experiencias y según el eje vertical OY de las ordenadas, se tomarán los alargamientos proporcionales $\frac{dl}{l}$, relaciones entre el alargamiento dl de la barra y su longitud l; reuniendo los puntos así obtenidos y trazando una línea OEB, ésta *figurará* gráficamente los fenómenos observados.

Según la naturaleza del material observado, se tendrán diferentes especies de líneas figurativas, cuyo uso es de gran utilidad en la construcción.

Flexión.

Definición.— Cuando una viga reposa sobre uno ó varios puntos de apoyo y está sujeta á la acción de fuerzas verticales, ella se flecha en virtud de la elasticidad de la materia. De este hecho resulta que el eje de la viga, ó en otros términos, la línea sobre la que se encuentran los centros de gravedad de todas sus secciones, cambia de forma, adquiriendo la de una curva, á la que se da el nombre de *curva de flexión.*

— También se da á esta línea el nombre de *elástica;* pero parece mejor conservar esta denominación para la curva de Bernouilli (ver elastica).

Historia.— De las deformaciones de prismas sujetos á esfuerzos de flexión, se han verificado numerosas experiencias por MM. Dupin, Duhamel, Duleau, Eaton, Hodgkison, Fairbaren, E. Clark, Tom Richard, Morin y otros sabios.

Galileo fué el primero que se ocupa de explicar el modo con que los cuerpos resisten á los esfuerzos á los cuales están sujetos, suponiendo que todas las fibras se extendían en igual cantidad, para lo cual era preciso que las secciones paralelas antes de la flexión lo fueran también después.

Hooke consideraba que todas las fibras se extendían; pero siendo las extensiones proporciónales á sus distancias á la capa exterior, *An attempt to prove the motion of the earth* (Londres, 1674). Esta misma hipótesis fué admitida por Mariotte: *Traité de la Percussion* (Leyde, 1717). Leibnitz, *Go. Gal. Leibnitri opera omnia* (Génova, 1763), se basa sobre la hipótesis de Hooke, suponiendo que la rotación producida por la flexión se verifica alrededor de un eje situado en la parte inferior de los cuerpos.

Barlow rechazó todas estas hipótesis—*Traité sur les materiaux de construction*—y sentó el hecho de que habia fibras que se extendian y otras que se comprimían; pero con el error de suponer iguales todas las extensiones y compresiones.

Los hechos en que hoy se funda la teoría de la flexión son dos:

1.° Las secciones planas normales al eje del prisma antes de la deformación, continúan siendo planas y normales al eje después de flechado. Dupín comprobó este hecho en un prisma de madera, y Dulcau en una barra de hierro encorvada en forma circular. Duguet encontró también igual resultado en una barra de acero dulce flexada, no circularmente, sino según una curva de curvatura variable de uno á otro punto de su eje, que es el caso general en la práctica, y otros muchos experimentadores han llegado á la misma conclusión señalada ya por Bernouilli.

2.° Unas fibras del prisma se comprimen por consecuencia de la flexión y otras se extienden. Duhamel de Momeaux habia demostrado ya, en 1767, que no todas las fibras del prisma trabajan por extensión; Navier y Eitelwein admitieron ya estos hechos, comprobados por muchos experimentadores, que ya hemos citado al principio, y hoy demostrados por los recientes estudios teórico-prácticos de Mr. Considére.

Añadiremos, para terminar este punto, que todas las experiencias citadas prueban la existencia de una capa de fibras que no sufren extensiones ni compresiones, es decir, de una capa de *fibras neutras* que experimenta, como las demás, variaciones de figura, pues que el prisma toma una cierta curvatura, pero no variaciones de dimensión longitudinal.

— Respecto al particular estudio del equilibrio interior y de la flexión de una pieza curva colocada como las piezas rectas, tiene también su historia. Euler nos da, en 1744, en un suplemento á su célebre obra *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive pro propietate gaudentes,* una clasificación de las curvas elásticas planas, examinando también algunos casos de flexión de láminas primitivamente curvas. Lagrange—*Mémoires de Berlin*, 1769—se ocupa de la fuerza de los resortes doblados, y Navier, en su *Cours de Mécanique*, hace estudios analíticos sobre la cuestión, tratada más tarde por Bress.

Teoría general y ecuaciones.— De ordinario se funda la teoria de las piezas de fibra media plana en una fórmula muy sencilla, que vamos á establecer.

Supongamos que las figuras 1 y 2 representan una pieza en su es-

tado natural y en su estado final, y que las secciones AB, $A'B'$ hayan venido respectivamente á ab, $a'b'$.

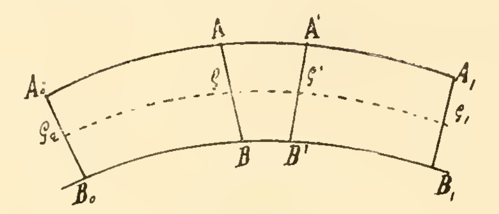


Figura 1.

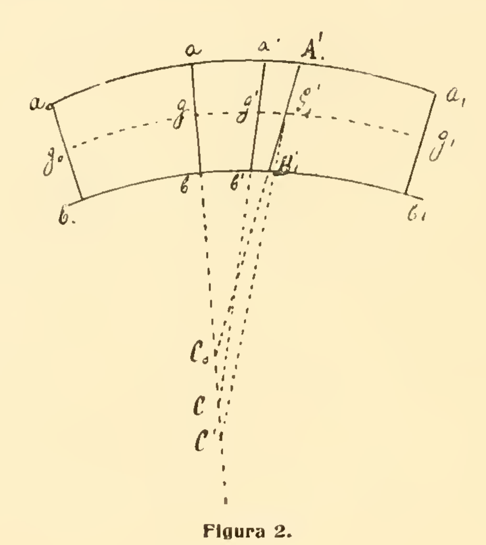


Figura 2.

Si la porción $ABA'B'$ de cuerpo se transporta sin cambiar de forma, la sección AB viene á ab y $A'B'$ á $A'_1B'_1$, de manera que

$$abA_1'B_1' = ABA'B',$$

de donde resulta que si se prolonga la normal $A_1'B_1'$ hasta su encuentro en c_0 con la normal infinitamente próxima ab, la longitud gc_0 representa el radio de curvatura en G de la fibra media en su estado natural; este radio en cada punto G así obtenido, le representaremos por la letra ρ_0, de manera que ρ_0 es una función del arco G_0G ó s.

Si se prolonga del mismo modo $a'b'$ hasta su encuentro en c con la normal infinitamente próxima ab, la longitud gc representa el ra-

dio de curvatura en el punto g después de la deformación. Este radio incógnito le llamaremos ρ.

Por el punto G_1' en que la línea $A_1'B_1'$ corta á la fibra media, tracemos G_1c paralela á $a'b'$. El ángulo $c'G_1'c_0$ es el ángulo w que ha girado la sección $A_1'B_1'$, para venir á $a'b'$, cambiada de signo. Si, pues, se designa, para abreviar, por c' y c_0 los ángulos $gc'G_1'$ y gc_0G_1', el ángulo c_0 exterior al triángulo $c'c_0G_1'$ nos da

$$c_0 - c' - w \quad \text{ó} \quad c' - c_0 = w,$$

y como

$$gG_1' = GG' = ds, \qquad gc_0 = \rho_0,$$

$$ds\left(\frac{1}{gc'} - \frac{1}{\rho_0}\right) = w;$$

pero los triángulos semejantes $gG_1'c'$ y $gg'c$ nos dan:

$$\frac{gc'}{gc} = \frac{gG_1'}{gg'} = \frac{ds}{ds - \lambda_0} \quad \text{ó} \quad \frac{1}{gc'} = \frac{1}{\rho}\,\frac{ds - \lambda_0}{ds},$$

de donde:

$$\frac{1}{\rho}(ds - \lambda_0) - \frac{ds}{\rho_0} = w$$

ó dividiendo por ds y reemplazando λ_0 y w por sus valores

$$\lambda_0 = \frac{Nds}{ES} \quad \text{y} \quad w = -\frac{Mds}{EI},$$

siendo N la suma de todos los esfuerzos que obran sobre la sección, M la suma de los momentos de dichos esfuerzos, S el área de la sección, I el momento de inercia de esta área y E el coeficiente de elasticidad, se tiene:

$$\frac{1}{\rho}\left(1 - \frac{N}{ES}\right) - \frac{1}{\rho_0} = -\frac{M}{EI},$$

no existiendo compresión en la fibra media será $N=0$, y la fórmula será:

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = -\frac{M}{EI}. \qquad (1)$$

—Para que esta fórmula sea general se deberá tomar el radio de curvatura ρ positivo ó negativo, según se encuentre ó no en el sentido positivo tomado para la normal $g\,Y$.

— Si la fibra primitiva es circular, ρ_0 es constante.

— Si la fibra primitiva es recta, es decir, en el caso de una viga recta, $\rho_0 = \infty$; y si además las cargas son normales á la fibra media, se tiene $N=0$ y la fórmula (1) será

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{M}{EI},$$

que sirve generalmente de fundamento á la *Teoría de las vigas rectas* y que es aplicable cualquiera que sea la deformación.

Curva de flexión en las vigas rectas.—Supongamos una viga horizontal cuya fibra media AB se tome por eje de las x, el eje Ay descendente sea el eje de las y (fig. 3).

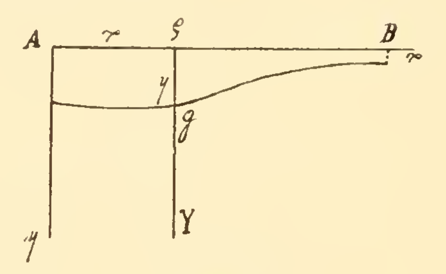


Figura 3.

Si (x, y) son las coordenadas de un punto g de la fibra media, después de la deformación se tendrá:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\pm\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}},$$

contándose $\frac{1}{\rho}$ positivamente en el sentido de las y positivas; es decir, si el centro de curvatura se encuentra hacia abajo. Pero se sabe que $\frac{d^2y}{dx^2}$ es positivo en este caso; luego se tendrá

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2 y}{d x^2}}{+\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \quad \text{y} \quad \frac{\frac{d^2 y}{d x^2}}{+\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = -\frac{M}{EI},$$

en el caso en que la deformación es muy pequeña; la ordenada y de la fibra media y su derivada $\frac{dy}{dx}$, es decir, la inclinación de una cualquiera de sus tangentes, es muy pequeña y se puede desechar el cuadrado de $\frac{dy}{dx}$. Se tiene, por consiguiente, para fórmula fundamental á la teoría de las vigas rectas, en el caso de deformaciones muy pequeñas

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}.$$

La curva representada por esta ecuación es la *curva de flexión.*

— La mayor de las ordenadas de esta curva recibe el nombre de *flecha de curvatura* ó simplemente *flecha.*

— Si representamos por s la longitud del eje de la pieza y consideramos dos secciones AB y CD infinitamente próximas, de modo que $NH = ds$ (fig. 4).

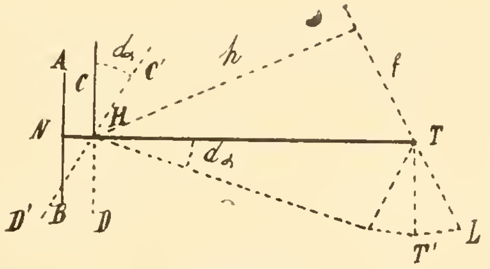


Figura 4.

Supongamos primero que la sección AB es invariable de posición; en este caso CD ocupará la posición $C'D'$ y T la T' siendo $THT' = CHC'$ y $tg.\ T'HT = d\alpha$.

La perpendicular $T'T$ á HT puede sustituir al arco descrito por el punto T de la fibra neutra desde el centro H, y por tanto la sección T habrá sufrido un movimiento vertical TL y otro horizontal $T'L$.

Si h es la distancia que separa á la sección CD de la T, contada

paralelamente al eje de las x, y f la contada paralelamente al eje de las y, se tendrá:

$$T'L = f \,.\, d\alpha = f \frac{Mds}{EI}$$

y

$$TL = h \,.\, d\alpha = h \frac{M \,.\, ds}{EI};$$

si s_0 y s_1 son las longitudes de fibra media contadas desde el extremo izquierdo del prisma hasta los puntos N y T respectivamente, y si en vez de considerar únicamente la rotación de la sección CD, se tienen en cuenta la de todas las secciones comprendidas entre N y T, resultará, para valor de la traslación horizontal y para la de la vertical, las relaciones:

$$H' = \int_{s_0}^{s_1} f \frac{Mds}{EI} \quad \text{y} \quad F' = \int_{s_0}^{s_1} h \frac{Mds}{EI}, \qquad (1)$$

y para el de la tangente de la variación angular de las secciones AB y T,

$$A = \int_{s_0}^{s_1} \frac{Mds}{EI}. \qquad (1)$$

Supongamos en segundo lugar que la sección AB es variable de posición y verifica un cierto giro de ángulo δ; repitiendo las consideraciones del caso anterior y llamando f' á la distancia, medida paralelamente al eje de las y, de las secciones T y N antes de la rotación de N; h' la distancia, medida paralelamente al eje de las x, de las secciones T y N antes de la rotación de N y $a = \text{tg}.\delta$; teniendo además en cuenta los movimientos de T, originados por la rotación de la sección AB, lo cual hace que las traslaciones semejantes á las $T'L$ y TL estén expresadas por $\mp af'$ y $\pm ah'$, se encontrará:

$$\left.\begin{aligned} H &= m \mp af' + \int_{s_0}^{s_1} f \frac{Mds}{EI} \\ F &= n \pm ah' + \int_{s_0}^{s_1} h \frac{Mds}{EI} \\ A &= \int_{s_0}^{s_1} \frac{Mds}{EI} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) cuando las piezas son de forma prismática y se toma como eje de las x el del prisma antes de la deformación y como origen uno de sus extremos (el de la izquierda), serán llamando x_0 y x_1 á las abscisas particulares de N y T, y teniendo presente las relaciones:

$$ds = dx,\ h = x_1 - x,\ f = y = o,\ h' = x_1 - x_0,\ s_1 = x_1 \text{ y } s_0 = x_0,$$

las siguientes:

$$F = \int_{x_0}^{x_1} \frac{M}{EI}(x_1 - x)\,dx; \quad A = \int_{x_0}^{x_1} \frac{Mdx}{EI}$$

para cuando la sección N está fija; y

$$(3) \qquad F = n + a(x_1 - x_0) + \int_{x_0}^{x_1} \frac{M}{EI}(x_1 - x)\,dx; \ A = \int_{0}^{x_1} \frac{Mdx}{EI}$$

para cuando la sección N gira un ángulo de tangente a.

En el caso de que la sección N sea la O del origen y T la del otro extremo de una viga de longitud l, será $x_0 = 0$, $x_1 = l$, y las ecuaciones anteriores serán, para cuando la sección O sea fija,

$$F = \frac{1}{EI}\int_0^l M(l - x)\,dx \quad \text{y} \quad A = \frac{1}{EI}\int_0^l Mdx,$$

y para cuando la sección O gire un ángulo de tangente a, las

$$F = n + al + \frac{1}{EI}\int_0^l M(l - x)\,dx \quad \text{y} \quad A = \frac{1}{EI}\int_0^l Mdx.$$

— La ecuación general de la curva de flexión será sustituyendo en la ecuación (3), en vez de x_1 la abscisa general x, y llamando y al valor general de F,

$$y = n + a(x - x_0) + \frac{1}{EI}\int_{x_0}^{x} M(x_1 - x)\,dx.$$

— Si M varía de forma de una á otra parte del sólido, á cada una corresponderá ecuación diferente y la curva de flexión total se com-

pondrá de dos ó más trozos distintos que se unen tangencialmente. —Cuando la sección sea fija habrá que hacer $n=0$, $a=0$ y la ecuación anterior será para este supuesto

$$y=\frac{1}{EI}\int_{x_0}^{x_1=x} M(x_1-x)\,dx,$$

y si la sección extrema es la de origen O, será $x_0=0$.

Casos particulares.— Si la fuerza P obra en el punto medio de la viga, la curva de flexión tiene por ecuación:

$$y=\frac{Pl^3}{16EI}\left(\frac{4x^3}{3l^3}-\frac{x}{l}\right)$$

y el valor de la flecha

$$f=-\frac{1}{48}\frac{Pl^3}{EI}.$$

— Para carga repartida uniformemente á razón de p por unidad lineal:

$$y=-\frac{pl^4}{24EI}\left(\frac{x^4}{l^4}-\frac{2x^3}{l^3}+\frac{x}{l}\right)$$

$$f=-\frac{5}{384}\frac{pl^4}{EI}.$$

— Para carga p por unidad lineal en la mitad de la viga,

$$y=\frac{pl^4}{48EI}\left(\frac{x^3}{l^3}-\frac{7}{8}\frac{x}{l}\right).$$

— Para carga total P' repartida de modo variable, pero ocupando toda la longitud l de la viga,

$$y=\frac{-P'l^3}{EI}\left(\frac{2x}{45\,.\,l}-\frac{x^3}{9l^3}+\frac{x^4}{12\,.\,l^4}-\frac{x^5}{60\,.\,l^5}\right).$$

— Para pieza empotrada en un extremo y cargada en el otro con un peso P,

$$y = -\frac{Pl^3}{2EI}\left(\frac{x}{l} - \frac{x^3}{3l^3}\right)$$

$$f = -\frac{1}{3}\frac{Pl^3}{EI}.$$

— Para pieza empotrada en un extremo y cargada en toda su longitud con un peso p por unidad lineal:

$$y = -\frac{pl^4}{24EI}\left(\frac{6x^2}{l^2} - \frac{4x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4}\right)$$

$$f = -\frac{1}{8}\frac{pl^4}{EI}.$$

— Para pieza empotrada en los dos extremos y cargada con un peso p por unidad de longitud:

$$y = -\frac{Pl^4}{24EI}\left(\frac{x^4}{l^4} - \frac{2x^3}{l^3} + \frac{x^2}{l^2}\right)$$

$$f = -\frac{1}{384}\frac{pl^4}{EI}.$$

— Para pieza empotrada en un extremo y apoyada en el otro, cargada con un peso p por unidad de longitud;

$$y = \frac{pl^4}{48EI}\left(\frac{2x^4}{l^4} - \frac{5x^3}{l^3} \quad \frac{3x^2}{l^2}\right)$$

$$f = -\frac{1}{185}\frac{pl^4}{EI}.$$

— Para piezas apoyadas en más de dos puntos, problema que Clapeyron fué el primero que estudió en toda su generalidad, se pueden seguir diferentes caminos, siendo el método de cálculo más elegante el debido á Mr. Bresse, que aquí no desarrollamos por su extensión, y que puede verse en su obra *Cours de Mécanique appliquée.* Manifestaremos tan sólo que Mr. Belanger, *Théorie de la resistance des solides*, ha demostrado que en el caso de un apoyo intermedio, es ventajoso que éste sea más bajo que los apoyos extremos.

— En el caso de que las fuerzas que actúan sobre la viga no sean perpendiculares á su eje, sino tales como F, F'..... que forman con aquél los ángulos α, α'..... se podrá descomponer cada una de ellas en dos, una, $F \cos. \alpha$, paralela á la viga (fig. 5) MN, y la otra, $F. sen. \alpha$ perpendicular.

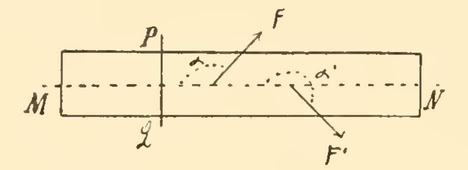


Figura 5.

La suma $F. \cos. \alpha + F' \cos. \alpha + ... = P$ será el esfuerzo de extensión ó de compresión sobre la sección PQ.

La suma $F. sen. \alpha + F' sen. \alpha' + ... = A$ será el esfuerzo cortante de la viga en esta sección.

La suma de los momentos, $F. sen\, \alpha \times f + F' sen. \alpha \times f' + ... = M$ de las componentes normales con relación á un punto de la sección PQ, es el momento flexible de la viga.

Cada uno de estos tres esfuerzos produce sobre la viga la misma deformación que si actuasen por separado, y el problema de la flexión queda reducido á la composición de estos esfuerzos; porque se sabe que las deformaciones producidas por fuerzas diferentes, obrando simultáneamente, son iguales á la suma de las deformaciones parciales que producirían las fuerzas si obrasen aisladamente.

Así, pues, se calcularán para las diversas secciones los esfuerzos normales por unidad de superficie, por la expresión

$$R = \frac{P}{\Omega} + \frac{Mv}{I},$$

y la forma de la curva de flexión estará dada por la ecuación

$$\frac{EI}{\rho} = M,$$

fórmula idéntica á la establecida para el caso de fuerzas normales.

Como aplicación de este supuesto, podemos considerar el de una pieza AB, (fig. 6), inclinada á modo del par de una armadura. Sea α

el ángulo BAE que este par forma con la horizontal AE y $l = AB$, la longitud de la viga, siendo a la de su proyección AE.

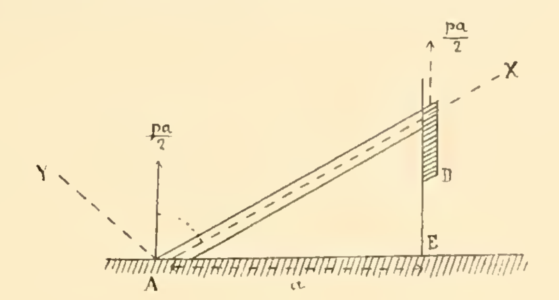


Figura 6.

La ecuación de la curva de flexión será

$$EI(y - x\,\mathrm{tg}\,\varphi) = \frac{pa \cos . \alpha}{12}\,x^3 - \frac{1}{24}\,p \,.\, \cos^2\alpha\, x^4,$$

siendo

$$\mathrm{tg}\,.\,\varphi = -\frac{1}{24}\,\frac{p\,a^3}{EI \cos . \alpha};$$

y el valor de la flecha:

$$f = \frac{p\,a^4}{EI \,.\, \cos^2\alpha} \times \frac{5}{384}.$$

— Bresse ha generalizado la teoría de la resistencia á la flexión plana, examinando el caso en que la elasticidad no sea la misma en todos los puntos de las fibras que componen el prisma; cuestión que es de un interés puramente teórico, atendiendo á que la ley según la cual la elasticidad pueda variar de un punto á otro es desconocida. — Mr. Jourawski, en una memoria inserta en los *Annales des ponts et chaussées*, 1856), y después, Mr. Bresse y M. Belanger, en sus obras ya citadas, han introducido en la determinación de las dimensiones transversales de las piezas, la consideración de la resistencia al *esfuerzo rasante* ó de *desgarramiento longitudinal* de las fibras.

Por último, Mr. Bresse, en una Memoria que forma el tercer volumen de su obra *Cours de Mécanique appliquée*, ha presentado bajo una nueva forma el estudio de las vigas apoyadas sobre diferentes puntos. Después de generalizar la fórmula de Clapeyron, supone la

carga repartida de una manera cualquiera, y examina todos los casos de sub-carga parcial ó total que pueden presentarse, y da para el cálculo de los momentos flexibles fórmulas generales que las reduce á tablas numéricas. Este trabajo es más bien teórico que realmente práctico.

Curva de flexión en las vigas curvas.—Las piezas curvas de que se hace uso en las construcciones, tienen en general un plano de simetría, en el cual obran las fuerzas exteriores que se las aplican y su deformación tiene, por tanto, lugar en dicho plano de simetría.

En este supuesto, el problema del equilibrio interior y de la flexión de una pieza curva en estas condiciones, no se diferencia notablemente de aquel de las vigas rectas, resultando tan sólo más complicado, pues como hemos visto al principio, será necesario aplicar la expresión (1):

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = -\frac{M}{EI},$$

la cual nos dice que, á la curvatura $\frac{1}{\rho}$ tomada por la viga recta, bastará, para pasar á la ecuación de la pieza curva, sustituir el *aumento de curvatura* $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}$, tomado por la pieza curva; regla indicada por primera vez por Euler.

Así, por consiguiente, la ecuación:

$$EI\left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho}\right) = M$$

representa, en un sistema particular de coordenadas, la forma de la fibra *neutra* ó *curva de flexión*.

— Para referir esta ecuación á una relación entre las coordenadas rectangulares x é y, se observará que, entrando en la ecuación anterior el radio de curvatura, la relación general entre x é y que se deduzca, deberá contener dos constantes arbitrarias. El momento M está expresado en función de x y de y, y admitiremos que no se altera sensiblemente por las deformaciones que se produzcan. Llamemos (x, y) las coordenadas de un punto de la fibra neutra en el estado natural; (x', y') las coordenadas del mismo punto, después de la deformación.

Las diferenciales dx, dy, ds tomadas en el estado natural, se cambiarán en dx', dy', ds', después de la flexión.

Llamemos θ el ángulo que forma el plano PQ (fig. 7), normal á la curva en el punto (x, y) con el eje fijo YO; ángulo medido en el estado primitivo de la pieza; θ' el ángulo de la nueva posición tomada por el plano PQ, por causa de la flexión, con el mismo eje YO.

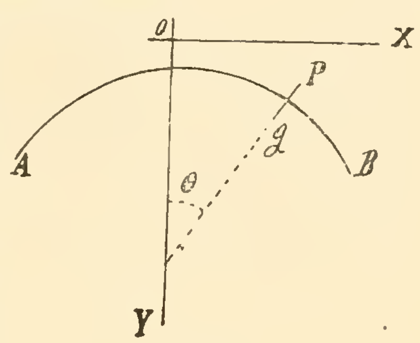


Figura 7.

Resulta, hechas estas notaciones, que el radio de curvatura ρ antes de la flexión, es igual á la relación $\frac{ds}{d\theta}$, y después de aquélla, á $\frac{ds'}{d\theta'}$.

La simplificación admitida por Navier, consiste en considerar ds y ds' como iguales entre sí, lo que equivale á desechar la contracción producida sobre la fibra media por los esfuerzos P, normales á las secciones transversales.

Se tendrá, en consecuencia:

$$EI\frac{d\theta' - d\theta}{ds} = M,$$

de donde resulta, integrando la expresión,

$$\theta' - \theta = \int_{s_0}^{s} \frac{M}{EI}\, ds + (\theta_0' - \theta_0) = \int \frac{\mu \,.\, ds}{\varepsilon}$$

y

$$\frac{ds}{\rho} = \frac{\mu \,.\, ds}{\varepsilon}.$$

Integral cuyo sentido queda perfectamente precisado.

— Es también de interés el conocimiento de la variación ó crecimiento positivo ó negativo que experimentan las coordenadas de cada uno de los puntos de la fibra media, para lo cual puede consultarse, entre otros trabajos, los de Mallet-Bachelier, *Recherches ana-*

lytiques sur la flexion et la resistance des pieces courbes, 1851; de L. Vigreux, *Traité théorique et pratique de la Resistance des materiaux* (t. I, pág. 115); de Dwelshanvers, *Mécanique appliquée*, etc.

Momentos flexibles y esfuerzos cortantes.—El valor de M en las fórmulas generales que anteceden y que son los llamados *momentos de flexión*, pueden ser representados por las ordenadas de una línea recta entre dos puntos contiguos de aplicación de fuerzas sobre la viga considerada, y en toda ella por las de una línea quebrada, cuyos vértices están situados en las ordenadas de los diferentes puntos de aplicación de las fuerzas exteriores, que puede á veces llegar á ser una línea curva que se nombra *curva de los momentos flexibles.*

Esta línea pasará por los apoyos, ó en otros términos, esto significa que el momento de flexión es cero para estos puntos, lo cual se deduce de las ecuaciones de equilibrio.

— El esfuerzo cortante para las secciones comprendidas entre dos puntos de aplicación de fuerzas cualesquiera, es constante y puede representarse por las ordenadas de una recta paralela al eje OX. Los valores serán positivos ó negativos según el signo que resulte á la suma algebraica de las fuerzas.

Los máximos valores, tanto de los momentos flexibles como de los esfuerzos cortantes, se deducirán de la comparación de los correspondientes á los puntos de aplicación de las fuerzas.

— Si se comparan el valor de los esfuerzos cortantes con el de los momentos flexibles, se verá *que en una sección cualquiera de abscisa* x, *el esfuerzo cortante es igual á la derivada del momento de flexión en aquel punto con relacion á* x *ó al coeficiente diferencial de primer orden de* M *con relación á* x.

Trazado gráfico.—Las curvas de flexión y la determinación de los momentos flexibles y esfuerzos cortantes que dejamos estudiados analíticamente, pueden ser obtenidos de una manera gráfica, aplicando los procedimientos de la *Estática gráfica*, para lo cual se pueden ver, entre otros, los tratados de Kæchlin, Muller-Breslau, Maure, A. Thire, etc.

Por lo que se refiere al particular trazado de la línea elástica y momentos de flexión de una manera gráfica, se puede consultar, entre otras obras, *Pratique de la Mécanique appliquée á la resistance des materiaux*, P. Planat; *Mecánica aplicada á las construcciones*, de Marvá y Mayer (páginas 356 y 1033); *Construcción gráfica de los momentos flexibles de las vigas*, *Annales des ponts* (131, 1879, 1.°); *La ligne elastique*, W. Ritter; *La statique graphique et ses applications aux constructions*, Lévy, etc.

Flotación.

Definición.—Se llama *línea de flotación* á la que en un cuerpo flotante, y particularmente en un navío, resulta de la intersección de la superficie exterior de su casco, con el plano de la superficie libre del agua.

Clasificación.—Entre las diferentes líneas de esta clase se distinguen: la llamada de *agua en rosca*, ó sea la que marca hasta donde se sumerge un buque cuando se bota al agua con sólo el peso de las maderas y herrajes de su casco, y la de flotación en carga que recibe los nombres de *línea de ciencia*, *de calado* ó *de agua*.

También se dice *líneas de agua* á cada una de las horizontales que se trazan en los planos de los buques á iguales distancias entre sí y empezando desde la flotación para abajo ó repartidas entre éstas y el canto inferior del alefriz de la quilla; estas líneas tienen por único objeto calcular el desplazamiento de la parte sumergida.

Historia.—Arquímedes, en su obra *De incidentibus in fluido*, se ocupó ya de la determinación de las líneas de flotación de los cuerpos de figuras diversas supuestos más ligeros que el agua, y más tarde esta clase de líneas han sido estudiadas principalmente por M. Dupin. *Mémoire sur la Stabilité des corps flottants*, 1814.

Propiedades.—Las diferentes líneas de flotaciones de un sólido se distinguen las unas de las otras por el grado de estabilidad del equilibrio que se establece sobre cada una de ellas. Este equilibrio puede ser completamente estable, completamente inestable ó estable solamente, para movimientos más ó menos limitados.

— A la condición de equilibrio que reposa sobre el volumen de agua desalojado según el principio de Arquímedes, se debe unir también que el centro de gravedad del cuerpo considerado en su conjunto y el del volumen separado por debajo del plano de la línea de flotación estén en una misma perpendicular á este plano. Teniendo en cuenta ambas condiciones, no se encuentran en la superficie de los cuerpos sino un cierto número de líneas de flotación.

— Los sólidos de revolución alrededor de un eje forman una excepción, porque si el eje es paralelo á la superficie libre del líquido, todas las secciones hechas por dos planos equidistantes de este eje se encuentran exactamente en las mismas condiciones.

— Si consideramos las trazas que sobre una sección transversal de un navío forman los diferentes planos de flotación que éste viene á tomar cuando se inclina ó bambolea alrededor de su eje horizontal,

se obtendrá una curva envolvente que se llama *curva de las flotaciones.*

Esta curva ha sido estudiada por M. Dupin en la Memoria antes citada, y particularmenie por M. Leclert, ingeniero de la Marina francesa, en su obra *On certain theorems respecting the geometry of ships*, que señaló alguna de sus particularidades, pudiéndose ver también los trabajos de MM. H. White y W. John, que han tratado de buscar la forma que esta curva afecta en toda su extensión, manifestando que puede presentar dos puntos de retroceso.

Focal y focoique.

— Con el nombre de *focal* fué estudiada por Quetelet cierta curva de tercer grado situada en el cono recto y que hoy se llama *Strofoide oblicua* (ver esta voz).

— Del propio modo, bajo la denominación de *focales*, dió á conocer M. Dandelin diferentes propiedades de estas líneas, *Acad. de Bruxelles* (T. II, pág. 169), y M. Rees, profesor de Lieja, generalizó los resultados y transportó al cono oblicuo, *Correspondance Mathém.* (T. V, pág. 361). M. Le François las hizo objeto de su tesis, *Dissertatio inauguralis mathematica de quibusdam curvis geometricis* (Gand., 1830, en 4.°); siendo M. Chasles el geómetra que ha dado mayor extensión á la doctrina de las focales, indicando esta ingeniosa construcción. «Si desde un punto fijo se trazan dos tangentes á dos círculos situados en un mismo plano y se les sujeta á tener un eje radical fijo y á permanecer sus centros sobre una recta fija, el lugar geométrico de los puntos de contacto es una *focal.*» *Corresp. Math.* (T. VI, pág. 207).

— Para evitar las confusiones que nacen de usar un mismo nombre para curvas distintas, como son las *cónicas focales*, llamó á éstas Chasles *cónicas excéntricas* y propuso nombrar á la focal de Quetelet (como se dice en Strofoide), amén de otras razones, curva *focoique;* pero ya hoy no existe confusión, habiendo dado á esta curva el nombre de strofoide, con el que se la sigue distinguiendo.

Fólium.

Definición.—Nombre dado á un género de curvas de tercer orden que presentan formas semejantes á las de las hojas de los árboles. (Picatoste, *Vocab. Matemático.*)

Naturaleza y clases principales.—Estas curvas son de la naturaleza de las unicursales (ver esta voz), siendo la más nombrada la conocida con el nombre de *fólium de Descartes*, llevando también el particular nombre de *fólium* otra curva estudiada por Casimiro Cornú. De ambas nos ocuparemos según su relativa importancia.

Folium de Descartes. —Definición.—Curva de tercer orden, de primera especie de Euler, y que tiene una asíntota rectilínea del género hiperbólico ordinario.

Historia.—Se atribuye á Descartes el descubrimiento de esta curva, pero éste no la indica en su *Geometría*, y sólo construye una curva de tercer grado, cuya ecuación, si bien tiene alguna analogía con la del folium, no es ella. La curva de que Descartes se ocupa es la engendrada por una parábola que se mueve paralelamente á su eje; desde un punto sobre este eje se dirigen radios á un punto fijo situado en el plano de la parábola; el lugar de intersección de estos radios con la curva es la línea de tercer grado de que Descartes se sirve para construir las raíces de la ecuación de sexto grado, combinando esta curva con un círculo.

Robérval creyó que esta curva tenía la forma de una rosa regular de cuatro foliolos y le dió el nombre de *galand* ó *flor de jazmín.*

Euler la estudia *(Introd. in Analys*, L. II, cap. IX) y M. Waunson encuentra su asíntota aplicando el método de Euler á la ecuación de la curva *(Ann. Mathém.*, T. II, pág. 398). El marqués del Hospital construye la porción infinita y traza la asíntota *(Analyse des inf petits*, sec. I, pág. 15 y sec. X, pág. 166, 2.ª edic., 1715).

Juan Bernouilli determina su área *(Opera Omnia.* T. III, pág. 405) y Newton indica, presenta esta curva el caso excepcional de ser su área cerrada cuadrable.

Nicole, en una Memoria *(Acad. des Sciences*, 1729), determina los casos en que una ecuación general de tercer grado representa un fólium, y Mr Marie estudia esta curva á propósito de la convergencia de la Serie de Taylor *(Journal de M. Liouville*, 1861).

Ecuación.— Esta curva tiene por ecuación en coordenadas cartesianas, siendo a una cantidad real cualquiera:

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0,$$

siendo su ecuación polar

$$\rho = \frac{3a \,.\, \text{sen} \,.\, w \,.\, \cos \,.\, w}{\text{sen}^3 w + \cos^3 w}.$$

Forma.— Si suponemos el sistema rectangular, se ve desde luego que el origen es un punto doble. Se ve también que x é y no pueden ser ambos negativos, porque entonces serían del mismo signo los tres términos de su ecuación; luego no puede tener ningún punto en el ángulo opuesto al $y\ o\ x$.

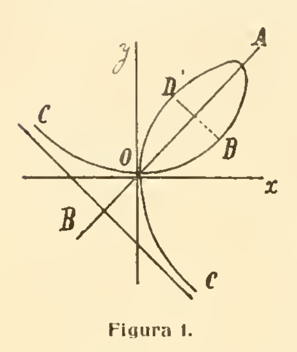


Figura 1.

Siendo su ecuación simétrica en x é y, es decir, que no cambia cuando se reemplaza x por y é y por x, se deduce que la bisectriz del ángulo $y\ o\ x$ es *eje del fólium*, y las coordenadas del vértice A son iguales entre si y á $\frac{3a}{2}$.

Haciendo $y = tx$, las coordenadas x é y se expresarán por las fórmulas:

$$x = \frac{3at}{t^3+1}; \quad y = tx = \frac{3at^2}{t^3+1}.$$

Cuando t varía de $-\infty$ á $-1-\varepsilon$, x crece de o á ∞ é y decrece de o á $-\infty$, se obtiene el arco oC que toca en el origen al eje de las y. Cuando t varía de $-1+\varepsilon$ á o, se obtiene un nuevo arco ilimitado, oC', que toca en el origen al eje de las x; los dos arcos son simétricos con relación á la primera bisectriz oA.

La dirección asintótica tiene por coeficiente angular $c = -1$; además se tiene

$$y + x = \frac{3at(t+1)}{t^3+1} = \frac{3at}{t^2-t+1},$$

haciendo $t = -1$, se encuentra para ordenada en el origen de la asintota $d = -a$; esta recta tienc por ecuación

$$x + y + a = 0.$$

Cuando t varía de o á 1, x é y varían de o á $\frac{3a}{2}$, se obtiene el arco oD que toca, en el origen, la recta ox y corta normalmente en el punto A á la recta oA; cuando t varía de 1 á $+\infty$, se obtiene el arco $AD'o$ simétrico del anterior con relación á oA.

La curva está, pues, formada, como indica la figura, por una hoja $ADOD'$ y dos ramas infinitas OC y OC', que tienen por asintota la

recta cuya ecuación es $x + y + a = 0$. El valor de la distancia OB es $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Propiedades.— La tangente paralela al eje de las y tiene por abs cisa $x = a\sqrt[3]{4}$ y la paralela al eje de las x tiene por ordenada

$$y = a\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

— El valor de la semi-área asintótica es equivalente á $\frac{1}{6}a^2$ y, por tanto, el cuadrado de la ordenada máxima es equivalente al área total del fólium ó bien al área total asintótica.

— Todos los foliums contruídos en el mismo ángulo de los ejes son semejantes.

— Esta curva presenta cuatro puntos críticos y en los cuales se encuentra sucesivamente limitada la convergencia de la serie de Taylor, según los valores atribuidos á las coordenadas del punto á partir del cual se hace el desarrollo. Dos de estos puntos son imaginarios. (Marié.)

— Si se consideran dos rectas perpendiculares entre sí, Ox y Oy, y un punto fijo, A, en la primera, y se imagina una recta, Δ, paralela á la segunda bisectriz y que corta á Ox en P y á Oy en Q. Si se hace pasar por A y Q un círculo, Δ', tangente á la recta Δ; Δ' encuentra á XX' en un punto B y se toma $PR = \frac{PB}{3}$; construyendo un círculo que pase por los puntos O y R y que tenga su centro en la primera bisectriz, los puntos de encuentro de este círculo con la recta Δ pertenece á un *fólium de Descartes*. Puede, por tanto, ser construída esta curva por medio de dos rectas y dos círculos.

Fólium de Casimiro Cornú.—Este matemático ha unido su nombre á una curva que tiene por ecuación:

$$x = y\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}$$

cuya forma y propiedades ha dado á conocer, sin que su estudio ofrezca interés alguno para la ciencia.

Fólium doble ó bifólium.— Definición.— Curva que admite las di-

recciones isótropas como direcciones asintóticas dobles y que posee un punto triple que tiene la particularidad de un retroceso para los dos brazos que pasan por este punto.

El nombre fué dado por Longchamps en *Journal de Mathématiques Spéciales*, 1886.

Ecuación.— Tomando por origen el punto triple, la tangente de

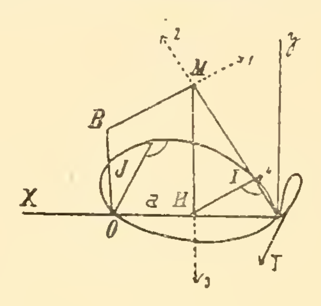


Figura 2.

retroceso por eje de las y y una perpendicular á ésta, por el de las x, su ecuación es:

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 (ax + by). \qquad (1)$$

Construcción.— Sea AOB (fig. 2) un ángulo recto y sea (1.2.3.4) una construcción que nos dé el punto I, haciendo:

$$OA = a, \quad OB = b, \quad AI = \rho \quad \text{y} \quad MAO = w,$$

se tendrá

$$AM = a \,.\, \cos.\, w + b \,.\, \text{sen}\,.\, w,$$

y como

$$\rho = AH \,.\, \cos.\, w = AM \cos^2 w,$$

podremos escribir

$$\rho = a \,.\, \cos^3 w + b \,.\, \text{sen}\,.\, w \,.\, \cos^2 w,$$

que es la ecuación polar del lugar descrito por el punto I y cuya ecuación cartesiana es

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 (ax + by),$$

es decir, la (1). Luego este lugar es el *fólium doble*.

Casos particulares.— Se distinguen dos especies de fólium dobles: el recto y el oblicuo (fig. 3), según que la tangente de retroceso es ó no un eje de simetría.

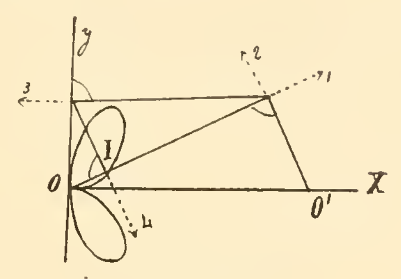


Figura 3.

—Las cuárticas estudiadas por Ruiz Castizo en *Estudio analítico de un lugar geométrico de cuarto orden,* Madrid, 1889, pueden incluirse en esta clase de líneas, así como las curvas comprendidas en la ecuación

$$y = \pm \sqrt{x}\left(\sqrt{p - ax} \pm \sqrt{r - bx}\right)$$

entre las que se tiene la de ecuación

$$y = \pm \sqrt{2ax} \pm \sqrt{2ax - x^2}$$

y en coordenadas polares

$$r = 4a \cdot \cos\theta \cdot \mathrm{sen}^2\theta,$$

cuya discusión fué propuesta por Montucci *(Nou. Ann.,* 1857, página 390) y estudiada por Cramer en *Introduction á l'Analyse des lignes courbes,* pág. 239.

Fólium esférico.—Ver *(Nou. Ann.,* 1858, pág. 212), estudio hecho por M. Vannson.

Fólium parabólico.—Esta curva pertenece á la clase de las cúbicas unicursales y se distinguen el fólium parabólico recto y el oblicuo.

— El fólium parabólico recto (fig. 4) admite una dirección asintótica rectilínea única y las tangentes en su nudo son perpendiculares. Si se considera un ángulo recto, yox, y una recta, Δ, paralela á Oy, si hacemos $OA = h$ y efectuamos la construcción (1.2.3.4) se obten-

drá un punto I, cuyo lugar es una curva que corresponde á la ecuación

$$x^3 = h\,(x^2 - y^2),$$

y que es la llamada fólium parabólico recto.

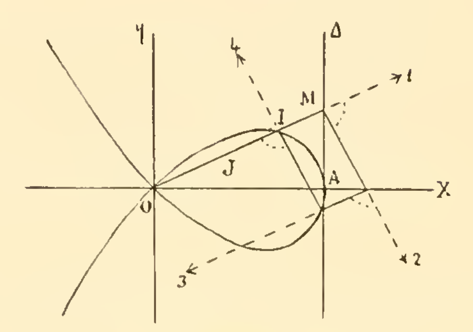


Figura 4.

Si se tomara $OJ = IM$, el lugar del punto I pertenecería á una curva que tendría por ecuación

$$x^3 = h\,y^2,$$

ó sea la parábola de Neil (ver esta voz).

— El fólium parabólico oblicuo admite, como el anterior, una direc-

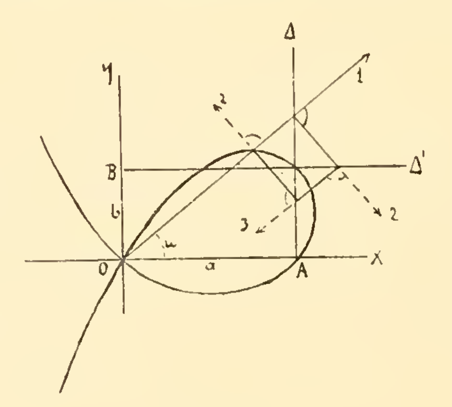


Figura 5.

ción asintótica y un nodo recto, pero carece de eje de simetría. Haciendo $OA = a$ y $OB = b$ (fig. 5) y expresando las diferentes líneas

de la figura en función del ángulo w, se obtiene para ecuación polar del lugar descrito por el punto I

$$\rho = \frac{a}{\cos . w} - \operatorname{tg} . w \frac{a . \operatorname{tg} . w - b}{\cos . w},$$

y su ecuación cartesiana será:

$$x^3 = a(x^2 - y^2) + bxy,$$

ecuaciones del fólium parabólico oblicuo.

Fólium simple ú ovoide.—Definición.— Curva cuyas direcciones

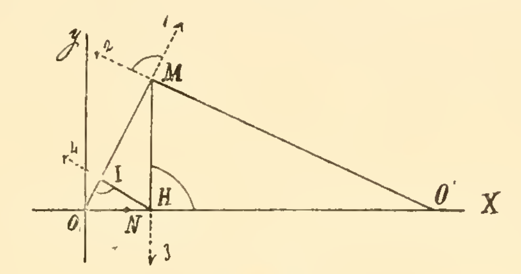


Figura 6.

isótropas son sus solas direcciones asintóticas y que tiene un punto triple en el cual las tangentes coinciden.

Ecuación.— Sea OO' (fig. 6) un segmento dado; efectuemos la construcción (1.2.3.4) y obtendremos un punto I, y si hacemos

$$OO' = d, \quad OI = \rho, \quad MOO' = w,$$

se tendrá

$$OM = d . \cos . w, \quad MI = d . \operatorname{sen}^2 w . \cos . w,$$

y por consiguiente,

$$\rho = d . \cos^3 w, \tag{1}$$

ecuación que será la de la curva propuesta en coordenadas polares.

En coordenadas cartesianas ella será

$$(x^2 + y^2)^2 = dx^3.$$

Trazado de la tangente.—Si se quiere trazar la tangente en un punto I, basta trazar la cuerda OI y su perpendicular IH, y tomando $ON = \frac{3}{4} OH$, el punto N es un punto de la normal á la curva en I, y, por tanto, la tangente queda determinada.

Esta propiedad corresponde, no tan sólo á la curva representada

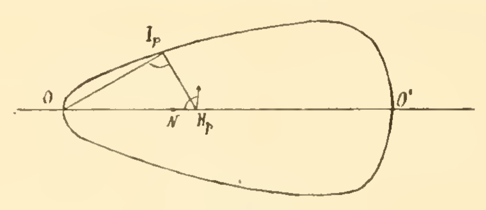


Figura 7.

por la ecuación (1), sino al grupo más general de todas las que puede representar la expresión

$$\rho = d \,.\, \cos^{2p+1} w,$$

en la que p designe un número entero y positivo (Ver cuárticas especiales).

—*Fólium tríplex ó trifólium.*—(Ver trifólium.)

Fondo.

Definición.—En los canales se da el nombre de *línea de fondo* á la intersección del lecho del canal con el cilindro vertical, cuyas generatrices pasan por el centro de gravedad de las secciones.

Ecuación.—Si consideramos una porción de corriente cuya longitud se encuentra proyectada sobre una horizontal $AB = l$ y representamos por H' la pendiente absoluta del fondo, por ΔH^0, $\Delta H'$, $\Delta H''$..., la serie de pendientes del fondo comprendidas entre dos verticales consecutivas, y por i^0, i', i''... las pendientes relativas que corresponden á los puntos de intersección de la línea de fondo con las verticales supuestas equidistantes, se tendrá, si la línea de fondo es una curva continua, su ecuación será:

$$dH' = i \,.\, dl.$$

— La pendiente absoluta de una porción de esta línea comprendida

entre dos verticales equidistantes se encontrará, como la del *eje hidráulico* (ver esta voz).

Fuerza (Líneas de).

Definición.—Líneas de fuerza se llaman en Física á las trayectorias octogonales de las superficies equipotenciales. (Ver *equipotencial.*)

Historia.—El nombre con que estas líneas se conocen se debe á Faraday, *Experimental researches in Electricity* (t. I, pág. 383), á las que fué conducido por sus experiencias sobre la influencia eléctrica é independientemente de toda teoría matemática. Como estas líneas se separan en general bastante de la forma rectilínea, esto le llevó á decir que la fuerza eléctrica se propaga en línea curva.

Propiedades.—Las líneas de fuerza son tangentes en cada punto á la dirección de la fuerza.

— Una línea de fuerza no puede ser jamás una línea cerrada, ni puede reunir dos puntos de la superficie de un conductor en equilibrio.

— Cuando la fuerza es nula en los conductores, las líneas de fuerza se detienen en dirección normal á su superficie.

— Cuando las líneas de fuerza son rectas paralelas, las superficies equipotenciales son planas; la superficie es constante en magnitud y en dirección, y el campo es uniforme.

— Una línea de fuerza comienza siempre en un punto donde se tiene electricidad positiva y concluye en otro en que la electricidad es negativa.

Aplicaciones.—En la voz *equipotencial* se da á conocer el uso de estas líneas, y se señalan, juntamente con algún ejemplo, los autores que para su mejor estudio pueden ser consultados.

Fundamental.

Definición.—Se da este nombre, en construcción, á la curva ó arco de curva que sirve de guía en la montea de una bóveda, para todas las demás líneas.

— En la teoría de polares recíprocas (ver esta voz), en Geometría, algunos autores (A. Imber y M. Weill, *Cours de Geométrie Analitique*, página 849), llaman curva *fundamental* á la cónica que les sirve de

intermedia á dos curvas de esta especie que pertenecen á un mismo sistema, á la cual Poncelet dió el nombre de *directriz*.

— En la teoría de la transformación racional (ver esta voz) ó transformación Cremona, se determina que á todo punto llamado allí fundamental, del orden K sobre E_x corresponde sobre E_y una curva del orden K y del género cero, y también que á los K puntos de una curva del sistema $\Sigma v_i f_1$ reunidos en a, corresponden, según esto, K puntos individuales de la recta $v_y = 0$, que serán los puntos de intersección de esta recta con la curva del orden K que corresponde á a.

Estas curvas se llaman *curvas fundamentales*.

Historia.—Sobre este punto puede verse lo que se expresa en *Transformada racional.*

Propiedades.—La $K^{ésima}$ curva fundamental de E_x, pasa por el $i^{éximo}$, punto fundamental de E_x, el mismo número de veces que la $i^{éxima}$, curva fundamental de E_y, pasa por el $K^{éximo}$, punto fundamental de E_y.

— Las curvas fundamentales de E_x tienen sus puntos múltiplos en los puntos fundamentales de E_x.

— Las curvas fundamentales no se cortan más que en puntos fundamentales.

— Las curvas imágenes de rectas, sólo son cortadas por las curvas fundamentales en los puntos fundamentales.

— El número total de las ramas de curvas fundamentales que pasan por un punto fundamental, es igual al triple del orden de esta última, disminuido en una unidad.

— Las curvas fundamentales del plano E_y forman, por su conjunto, la jacobiana del haz $\Sigma u_i \varphi_i = 0$, y del mismo modo las curvas fundamentales de E_x forman la jacobiana del haz $\Sigma v_i f_i = 0$.

— Se puede ver, para la demostración de estas propiedades, Clebsch, *Courbes algebriques en général et courbes du troisième ordre.*

Funicular.

Del latín *(funiculus).*

Definición.—Es la figura de equilibrio de un hilo sometido á una serie de fuerzas continuas.

Historia.—Viene á ser la de la catenaria (ver esta voz), pues esta curva es la funicular más particularmente estudiada.

Tensión en un punto del hilo.—Considerando el hilo como el límite de un polígono funicular cuyos lados sean infinitamente pequeños,

cada uno de sus elementos está sometido, en el sentido de su longitud, á dos fuerzas iguales y contrarias, cada una de las cuales es la tensión del hilo en el punto considerado. Esta tensión será una función continua del arco de la curva contado desde un punto fijo al punto considerado.

Si se corta el hilo en M (fig. 1), la parte AM perderá el equilibrio, y se necesitará aplicar una fuerza, MT, que reemplace la acción de MB; del propio modo habrá necesidad de aplicar á MB una fuerza MT_1. Cada una de estas fuerzas es finita, porque MT reemplaza todas las pequeñas fuerzas de primer orden repartidas en número infinito y aplicadas en los diferentes puntos de MB.

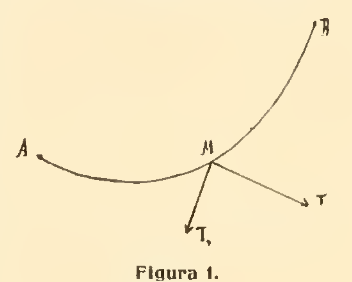


Figura 1.

La dirección común de las fuerzas T y T_1, es la de la tangente en M á la curva funicular, es decir, que la tensión se ejerce según la tangente en el punto M de la curva que toma el hilo.

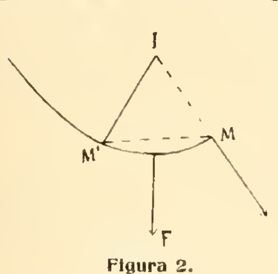


Figura 2.

Ecuación del equilibrio del hilo.— El elemento MM' (fig. 2) deberá estar en equilibrio bajo la acción de las tres fuerzas T, T' y

$$mF = Pds.$$

Ahora bien, la condición de que la suma de las proyecciones de estas tres fuerzas sobre tres ejes rectangulares sea nula, estará expresada por la ecuación de condición

$$-\left(T\frac{dx}{ds}\right) + \left(T\frac{dx}{ds} + dT\frac{dx}{ds}\right) + Xds = 0;$$

por tanto

$$\left.\begin{aligned} d\left(T\frac{dx}{ds}\right) + Xds &= 0 \\ d\left(T\frac{dy}{ds}\right) + Yds &= 0 \\ d\left(T\frac{dz}{ds}\right) + Zds &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

integrando la primera de estas ecuaciones con relación á s, entre los

límites que corresponden á los extremos del hilo, cuya longitud es l, se tendrá

$$\int_0^l d\left(T\frac{dx}{ds}\right)+\int_0^l X ds=0;$$

y si llamamos e, f, g; e', f', g', los ángulos que las tangentes á la curva en los puntos A y B (fig. 1) forman con los ejes, esta ecuación será

$$K\cos e+K' \,.\, \cos e'+\int_0^l X ds=0,$$

lo que nos dice; que la suma algebraica de las componentes paralelas al eje Ox, de todas las fuerzas que actúan sobre el hilo, es nula.

Curva formada por el hilo.—Para obtener la curva formada por el hilo bastará eliminar T entre las ecuaciones (1) y se obtendrán las fórmulas:

$$T=\left(X\frac{dy}{dx}-Y\right)\frac{1+\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \qquad (2)$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}-\frac{Y}{Z}}{\frac{dz}{dx}-\frac{Z}{X}}=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{d^2z}{dx^2}} \qquad (3)$$

$$X+Y\frac{dy}{dx}+Z\frac{dz}{dx}+\frac{d}{dx}\left\{\left(X\frac{dy}{dx}-Y\right)\frac{1+\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right\}=0 \qquad (4)$$

(3) y (4) serán las ecuaciones propias para determinar y y z en función de x, es decir, la figura del hilo.

La ecuación (2) hará conocer la tensión.

— En el caso de que la curva funicular sea plana, lo que tiene lugar si las fuerzas que solicitan cada uno de los puntos del hilo son paralelas á un plano ó á una recta, tomando este plano por plano de las $x\,y$, se tendrá

$$Z=0, \quad z=0;$$

y por consiguiente, el problema quedará resuelto por las ecuaciones:

$$X + Y\frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx}\left\{\left(X\frac{dy}{dx} - Y\right)\frac{1+\frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right\} = 0$$

$$T = \left(X\frac{dy}{dx} - Y\right)\frac{1+\frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Propiedades.—Las ecuaciones de los momentos se obtienen fácilmente; bastará multiplicar las dos primeras ecuaciones (1) por y y x y restar la primera de la segunda. Se tendrá

$$xd\left(\frac{T.dy}{ds}\right) - yd\left(T\frac{dx}{ds}\right) + (Yx - Xy)\,ds = 0$$

ó

$$xd\left(T\frac{dy}{ds}\right) - yd\left(T\frac{dx}{ds}\right) = d\left(xT\frac{dy}{ds} - yT\frac{dx}{ds}\right);$$

por consiguiente, integrando entre o y l, se tendrá:

$$K(a.\cos.f - b.\cos.e) + K'(a'\cos.f' - b'.\cos.e') + \int_0^l (Yx - Xy)\,ds = 0,$$

lo que nos dice que la suma de los momentos de todas las fuerzas que actúan sobre el hilo con relación al eje $0z$, es nula. Del mismo modo se obtendrán las ecuaciones de los momentos con relación á los otros dos ejes.

— Señalaremos que si λ, μ y ν representan los ángulos que forma con dos ejes coordenados el radio de curvatura ρ y α, β y γ los que la tangente forma con los mismos ejes, se tendrá:

$$\frac{dx}{ds} = \cos.\alpha, \quad d\frac{dx}{ds} = \frac{ds.\cos\lambda}{\rho},$$

y las ecuaciones (1) se podrán escribir como sigue:

$$\left.\begin{aligned} dT.\cos\alpha + \frac{T.ds}{\rho}\cos\lambda + Xds = 0 \\ dT.\cos\beta + \frac{T.ds}{\rho}\cos\mu + Yds = 0 \\ dT.\cos\gamma + \frac{T.ds}{\rho}\cos\nu + Zds = 0 \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

lo que nos dice que existe el equilibrio entre la fuerza dT dirigida según la tangente, la fuerza $\frac{T.ds}{\rho}$ que lo es según el radio de curvatura y la fuerza motriz $P.ds$ del elemento de masa.

Caso en que las fuerzas son normales al hilo.— Se tendrá en este caso:

$$\frac{X}{F}\frac{dx}{ds} + \frac{Y}{F}\frac{dy}{ds} + \frac{Z}{F}\frac{dz}{ds} = 0$$

ó

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0,$$

y por tanto,

$$dT = 0 \quad \text{y} \quad T = C.$$

Así, pues, la tensión es constante en toda la longitud del hilo. — Las ecuaciones (5) nos darán ahora

$$X = -\frac{T}{\rho}\cos\lambda, \quad Y = -\frac{T}{\rho}\cos\mu, \quad Z = -\frac{T}{\rho}\cos\nu,$$

y haciendo

$$X = P.\cos A, \quad Y = P.\cos B, \quad Z = P.\cos C,$$

será

$$P\cos.A = -\frac{T}{\rho}\cos.\lambda, \quad P.\cos.B = -\frac{T}{\rho}\cos.\mu,$$

$$P\cos.C = -\frac{T}{\rho}\cos.\nu,$$

de donde

$$P^2 = \frac{T^2}{\rho^2} = \frac{C^2}{\rho^2}; \quad P = \frac{C}{\rho}$$

y

$$\cos A' = -\cos\lambda, \quad \cos B = -\cos\mu \quad \text{y} \quad \cos C = -\cos.\nu.$$

De donde se deduce que la fuerza motriz P está en razón inversa del radio de curvatura y dirigida según la prolongación de este mismo radio.

Esto tiene lugar cuando un hilo esté extendido sobre una superficie S por dos fuerzas que le tiran por sus extremos; así la reacción de la superficie, siendo normal á la superficie, es normal al hilo. La tensión es constante, y por lo tanto, las fuerzas que tiran de él, en sus extremos deberán ser iguales entre sí y á esta tensión, de donde resulta que la curva funicular es una línea geodésica de la superficie. Por último, la reacción de la superficie en cada punto se encuentra en razón inversa del radio de curvatura.

— En las *aplicaciones* la curva funicular es generalmente plana. Tomando este plano por plano de las xy, se tendrá para determinar la curva las ecuaciones

$$dT\frac{dx}{ds}+Xds=0$$

$$dT\frac{dy}{ds}+Y.ds=0.$$

Si se tiene

$$Xdx+Ydy=d\varphi(x,\ y),$$

y por consecuencia,

$$T=T_0+\varphi(x_0,\ y_0)-\varphi(x,\ y),$$

sustituyendo este valor de T en las ecuaciones antes encontradas, se tendrá la ecuación diferencial de la curva buscada.

G

Gabarit.

Definición.—Se da este nombre á la curva perfil de la sección transversal de un rail.

Forma y trazado.—Muchas son las formas que se han adoptado para el perfil que nos ocupa, pudiéndose consultar al efecto la obra de M. Perdonnet, *Traité élémentaire des chemins de fer;* pero la más generalmente aceptada es la que expresa la figura adjunta, resultado del estudio que se ha hecho á fin de conseguir una forma que reúna á la mayor economía posible la mayor resistencia.

El contorno se compone casi todo él, excepto las dos porciones *ab* y *cd* que son rectas, de arcos de círculos unidos entre sí, y su trazado es sencillísimo y nos lo indican las líneas de trazos hechas en la figura, por lo cual no le describimos.

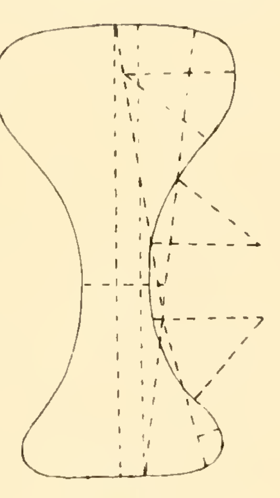


Figura 1.

La determinación de la resistencia del rail y demás circunstancias que á éste afectan no encajan en la índole de este artículo, pero se puede ver en todo caso en la obra antes citada.

Gamma.

Curva representativa de la función del mismo nombre, estudiada por Godefroy.

Garbo.

Definición.—Se denomina así á la curva ó contorno de los fustes de las columnas en Arquitectura y que forma la generatriz de su superficie, curva que sirve para darles mayor gracia y elegancia que no siendo rectas sencillamente.

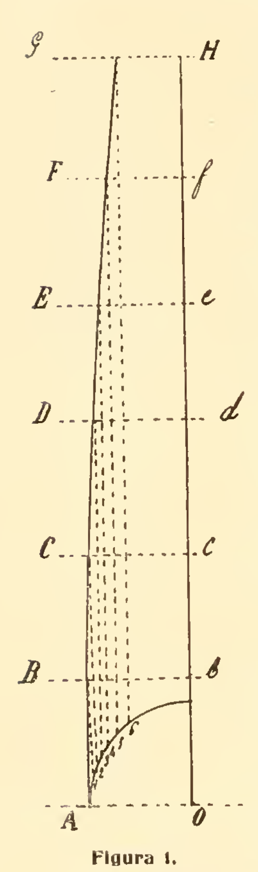


Figura 1.

Historia.— J. Barrozzio (Vignola) señaló en su *Tratado de los cinco órdenes* las reglas á que había de someterse el trazado del garbo de las columnas, según el orden á que pertenecían, trazados que abajo se detallan; y á M. Lagrange se debe una Memoria, titulada *Sur la figure des colonnes (Miscellanea Taurinensia*, T. V, 1770-1773), en la que se propone determinar la meridiana de la columna que, teniendo una altura y un volumen dado, pueda soportar la mayor carga; encuentra que «la figura cilíndrica es la que nos da el *maximum maximorum* de la fuerza». Esta Memoria, que contiene una porción de yerros, ha sido corregida por M. Serret. Asimismo pueden consultarse, entre otras obras, para este particular, *L'Architecture*, de F. Blondel, y aquélla de D'Aviler, como también la traducción de Vitrubio hecha por M. Perrault.

Trazado.—La construcción propuesta por Vignola difiere, según sea, para las columnas de los órdenes toscano y dórico, ó bien para los de los órdenes jónico, corintio y compuesto.

Para la construcción del garbo en columnas de los dos primeros órdenes, propone la marcha siguiente: Sea AO (fig. 1) el radio de la columna, al tercio de su altura, á partir de la base; CH su eje, de tal suerte que la longitud OH represente los dos tercios superiores de su altura, ó sean ocho radios. Se divide esta recta en seis partes iguales, y por los puntos de división se elevan las perpendiculares bB, cC..... Sobre la última se toma una longitud GH igual al radio menor que la columna deba tener, es decir, igual á AO, disminuida en un sexto ó en un octavo, según la proporción que deba ser. Desde el punto O como centro y con OA por radio se describe un cuarto de círculo y por el punto G se dirige á OH una

paralela que encuentre al cuarto de círculo en el punto 6. Se divide el arco $A6$ en seis partes iguales y por los puntos de división 1, 2, 3, 4, 5, se dirigen paralelas al eje, que por su encuentro con las perpendiculares Ff, Ee, Dd, Cc y Bb determinan los puntos F, E, D, C y B que pertenecen á la generatriz buscada.

Ecuacion de esta curva.—Si se toma OA por eje de las y y OH por el de las x, llamando α una de las divisiones del arco $A6$, h una de las divisiones de OH y r el radio OA, se tendrá para un punto cualquiera correspondiente á n divisiones

$$y = r \, . \cos n\alpha, \qquad x = nh;$$

por consiguiente,

$$y = r \, . \cos \frac{\alpha}{h} x;$$

es decir, que la curva es una sinusoide particular.

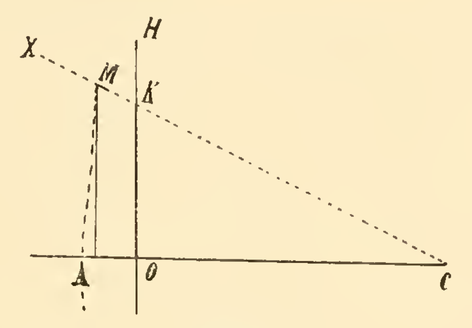


Figura 2.

— Para la construcción del garbo en columna perteneciente á los tres segundos órdenes arriba citados, indica Vignola el procedimiento siguiente:

Sea OA (fig. 2) el radio de la columna á la altura de su mayor grueso, y que aquí es igual á un módulo y una y un tercio de parte; y sea OH el eje de la columna. Se toma sobre la prolongación de OA una longitud AC igual á siete módulos. Hecho esto, para obtener un punto cualquiera de la generatriz buscada, se dirige por el punto C una recta cualquiera, CX, que encuentre al eje en un punto K; sobre esta recta, á partir del punto K, se toma una longitud $KM = OA$, y el punto M así obtenido es un punto de la generatriz. Se ve que esta curva es una concoide.

— Las columnas salomónicas tienen las mismas secciones horizontales que las columnas ordinarias, de suerte que, para su trazado, se las garba como las columnas rectas, sólo que los centros de las secciones, en lugar de encontrarse sobre una vertical, están situados sobre una hélice. Los puntos del contorno estarán asimismo sobre otra hélice del mismo paso que la anterior, aunque de mayor radio.

Gastos.

Definición.—Se da en Hidráulica el nombre de curva de los *gastos* á las que tienen por ordenadas los gastos correspondientes á los diferentes valores de la carga tomada por abscisa.

Historia.—El empleo de estas líneas se hizo por primera vez con

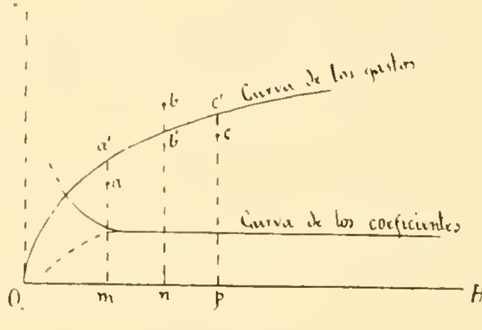


Figura 1.

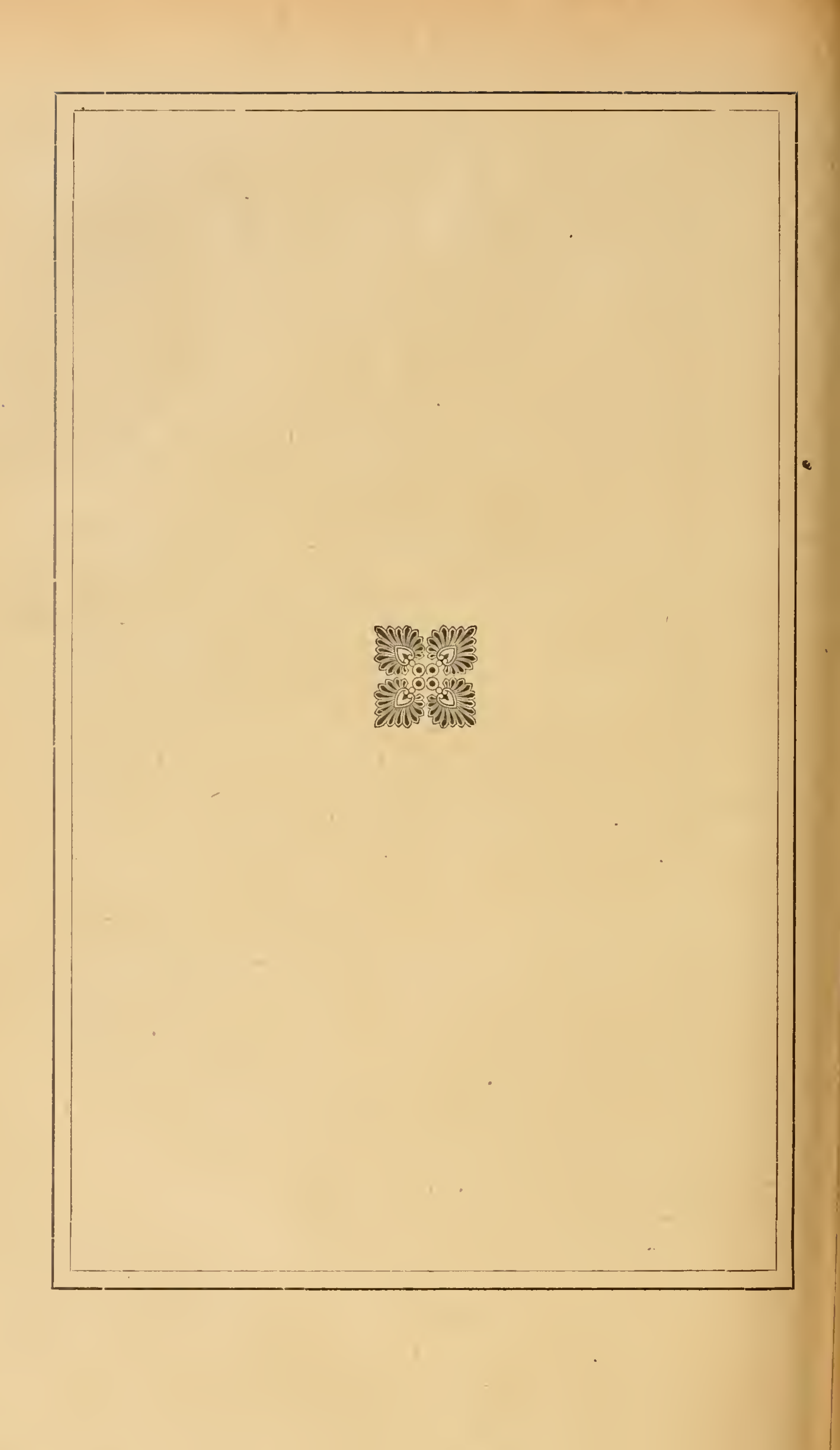
motivo de las experiencias hechas sobre el depósito de Furens, por M. A. Graëff, *Recueil des Savants étrangers,* t. XXVIII.

Determinación.—Sean *om*, *on*, *op* (fig. 1) tres valores diferentes de H, sobre los cuales se opera, teniendo en cuenta la fórmula de Buat:

$$q = \mu\, w_1 \sqrt{2gH},$$

en la que μ designa el coeficiente propio al orificio de salida de que se trata; w, el área de este orificio, y H, la carga correspondiente. Obtendremos los tres valores ma', nb', pc', correspondientes de q, los cuales determinarán puntos de la curva de gastos y así se conseguirá el trazado de dicha línea.

— Si en lugar de la fórmula de Buat se determinan los valores de q por medio de la experiencia, en este caso, á los *om*, *on* y *op* de H



182

MEMORIAS

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

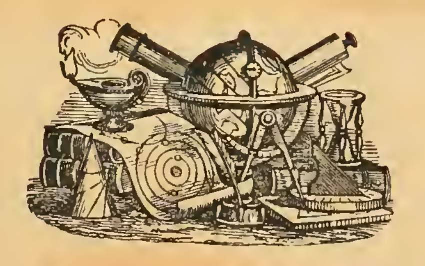
DE

MADRID

TOMO XXVI

J. DE VARGAS Y AGUIRRE.—CATALOGO GENERAL DE CURVAS

SEGUNDO FASCÍCULO



MADRID
IMPRENTA DE LA GACETA DE MADRID
Calle de Pontejos, núm. 8.

1908

corresponderán los ma, nb, pc, para ordenada de la línea de gastos, los que en general se encontrarán, no precisamente sobre la curva que antes obtuvimos, pero sí sobre un polígono que á esta curva se aproximará de tal modo, que ella puede ser considerada como el lugar de sus vértices.

—Conocida esta línea, se puede determinar la de los coeficientes (ver esta voz), así como de ésta se puede deducir la primera, porque, en efecto, se puede, para cada valor de H y de w, calcular el número $w_1 \sqrt{2gH} = q_1$, y el valor del coeficiente μ será:

$$\mu = \frac{q}{q_1},$$

que nos dará las ordenadas de la línea de los coeficientes.

— Así, pues, por la consideración de estas dos líneas, se ve un medio de comprobar la exactitud de las experiencias, sacándose hoy gran partido de su empleo, como puede verse en *Recueil des Savants étrangers*, t. XXI.

Clases diversas.—Entre la curva de los gastos de un orificio con carga sobre el vértice y la de una vertiente existe una diferencia característica necesaria tener en cuenta.

El gasto de un orificio con carga sobre el vértice, es dado por la ecuación

$$q = m \,.\, w_1 \sqrt{2gH},$$

y si se hace

$$M = m \,.\, w_1 \sqrt{2g}$$

será

$$q = MH^{\frac{1}{2}}, \qquad (1)$$

ecuación de la curva de los gastos del orificio en función de la carga H sobre el medio de la altura de dicho orificio.

El gasto de un vertiente es dado por la ecuación

$$q = m\,l\,H \sqrt{2gH},$$

y si se hace

$$M_1 = m \,.\, l \sqrt{2g}$$

será

$$q = M_1 H^{\frac{3}{2}}, \qquad (2)$$

ecuación de la curva de gastos del vertiente dada en función de las cargas totales H sobre su umbral.

Diferenciando dos veces cada una de las dos ecuaciones (1) y (2) con relación á H sin variar M y M_1, se tendrá respectivamente:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq}{dH} &= +\frac{1}{2} M H^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{d^2q}{dH^2} &= -\frac{1}{4} M H^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}\right\} (3) \quad \text{y} \quad \left\{\begin{aligned} \frac{dq}{dH} &= +\frac{3}{2} M_1 H^{\frac{1}{2}} \\ \frac{d^2q}{dH^2} &= +\frac{3}{4} M_1 H^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}\right. (4)$$

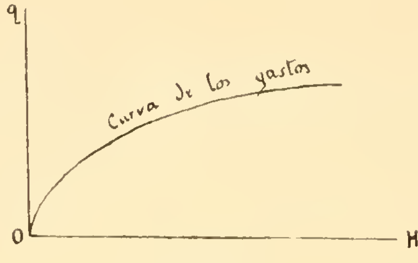


Figura 2.

En el primer caso (3) $\frac{dq}{dH}$ es positivo y $\frac{d^2q}{dH^2}$, negativo; la curva de los gastos (fig. 2) presenta su concavidad hacia el eje de las H.

En el segundo (4) $\frac{dq}{dH}$ es positivo y lo mismo $\frac{d^2q}{dH^2}$; así, pues, la

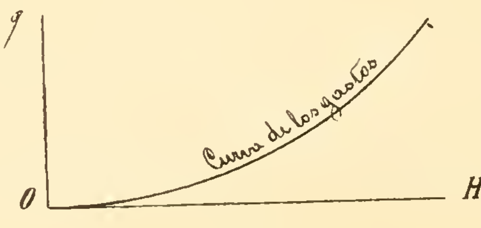


Figura 3.

curva presenta la forma indicada en la figura 3, ó sea teniendo su convexidad hacia el eje de las H.

Así, pues, «la curva de los gastos correspondientes á un orificio con carga sobre el vértice, se diferencía de la que coresponde á un vertiente por sus curvaturas inversas, que en el primer caso es cóncava con respecto al eje de las H y en el segundo, convexa».

Aplicaciones.—El trazado de estas líneas por la experiencia directa, es el mejor de los medios de que dispone la Hidráulica para el cálculo de los coeficientes de gastos, puesto que, en general, en las fórmulas que para esta cuestión se conocen, tales como la francesa, la inglesa, la de Mr. Boileau, *Traité de la mesure des eaux courantes;* la de Mr. Clarinval, *Annales des mines* (t. XII, 3.ª serie), y *Journal de l'Ecole polytechnique* (t. XXVIII, 1879); la de Mr. de Saint-Venant *(Comptes rendus,* t. LXXXVII, pág. 720), por Mr. Popoff, la de Bidone, etcétera, no se puede tener confianza suficiente.

— *Curva de los gastos en función de las alturas.*—Conociendo la curva de las velocidades (ver velocidades), sabemos son conocidos los valores de los gastos q_1, q_2, q_3....., y para trazar esta línea bastará to-

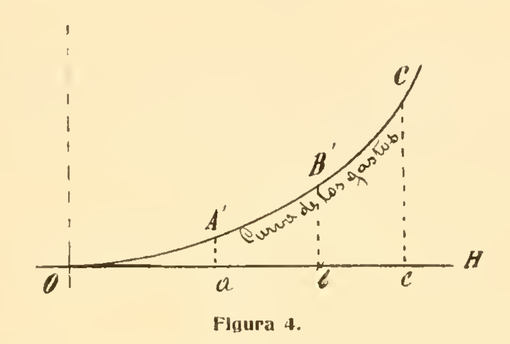


Figura 4.

mar sobre el eje de las abscisas, magnitudes Oa, Ob, Od..... (fig. 4) iguales á las alturas de agua H_1, H_2, H_3....., y sobre las ordenadas correspondientes á los puntos a, b, d....., obtenidos, tomar los valores de q_1, q_2, q_3..... con lo que se obtendrá una curva OA' $B'D'$, que presenta una curvatura continua, regular y convexa hacia el eje de las H, y que si al unir los puntos A, B, D..... forma algún garrote, se les rectifica y corrige como se indica con la de las velocidades.

— Esta línea es la verdadera fórmula práctica del movimiento del agua sobre un punto dado de una ribera y no adolece del defecto de las fórmulas empíricas, las cuales tienen ciertos límites para su aplicación.

Curvas de los gastos en función del tiempo.—Cuando un depósito está alimentado por una toma de agua regular, el gasto de las compuertas de toma de agua puede ser considerado como constante ó compuesto por una serie de valores constantes; si se representan los gastos por segundo de la toma de agua por las ordenadas de una curva, cuyas abscisas sean los tiempos al cabo de los cuales el estado del consumo cambia, la curva obtenida tendrá la forma indicada por

la figura 5, es decir, estará compuesta de porciones AB, $B'C'$, $C'D$..... paralelas al eje de los tiempos, transcurridos entre ellas por los re-

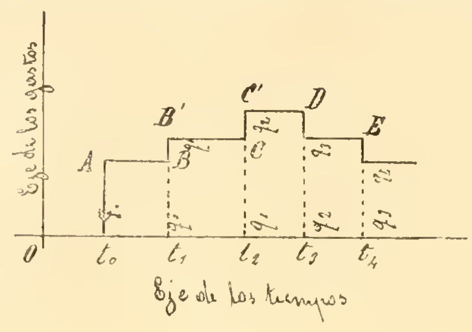


Figura 5.

saltos debidos á los diferentes cambios bruscos de alimentación originados por las tomas de agua.

— Cuando el depósito está alimentado por una corriente sin toma de



Figura 6.

agua especial, es decir, que éste debe recibir indistintamente los gastos de estiaje ó de crecidas, el gasto afluente deberá ser eminentemente variable y la curva de gastos en función del tiempo toma la forma ondulada de la figura 6.

Determinación.— Para determinar la curva de los gastos en función del tiempo, se procede de la manera siguiente:

Figura 7.

Se construye la curva de las alturas en función del tiempo (ver *alturas*) (fig. 7); las alturas obtenidas se toman sobre el eje de abscisas de la curva de los gastos en función de las alturas de agua, deducida como antes se ha dicho (fig. 8), y

las ordenadas de esta curva, llevadas sobre el eje de los tiempos, nos dará el punto correspondiente de la curva de gasto (fig. 9) en función del tiempo.

De lo expuesto se deduce que la curva de los gastos en función de las alturas de agua, siendo conocida una vez para siempre para un punto determinado, la curva de los gastos en función del tiempo, se deduce por medio de las alturas observadas para los diferentes estados de los ríos.

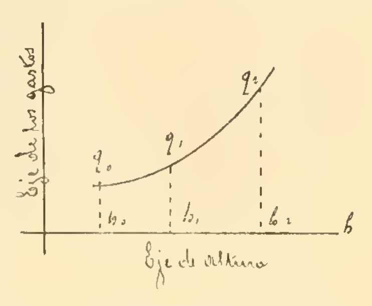


Figura 8.

Propiedades.—Esta curva de que nos ocupamos goza de la importante propiedad, que nos da, por el área comprendida entre dos valores t_n, t_m del tiempo, expresada en segundos, el cubo total gastado por el río en el tiempo $t_m - t_n$.

— El área de esta curva, calculada para todo un año y dividida por el número de segundos que el año tiene, nos dará el *módulo* ó gasto medio por segundo del curso de agua.



Figura 9.

Aplicaciones.— Esta curva, que como se ve goza de propiedades importantes, es aplicable además para la resolución de un gran número de cuestiones relativas al régimen de los depósitos y á los trabajos en los ríos, pudiéndose decir que ella constituye la base de toda la hidráulica práctica del régimen no permanente.

Geminal ó duplicada.

Definición.— Si se considera la proyección central de una curva algebraica plana sobre una esfera dada, á cada rama esférica corresponde, en general, una rama simétrica igual y no superponible. Estas ramas se llaman *geminales* ó *duplicadas* cuando se confunden y resulta una sola.

En el caso de no confundirse, se llama *simple.*

Historia.— Mr. Möbius, en su obra *Uber die grandformen der linien der Dritten ordnung*, al clasificar las curvas algebraicas planas, según su proyección central sobre una esfera dada, proyecciones á que

da el nombre de «curvas esféricas del mismo grado que la curva plana proyectada», suponiendo que el centro de la esfera no está sobre la curva plana, distingue con el nombre de *geminales* á las curvas de que nos ocupamos.

Propiedades.— Un circulo máximo corta á un sistema de dos curvas geminales en un número *cero* ó *par* de puntos.

— Un sistema de curvas geminales tiene un número *cero* ó *par* de pares de inflexión.

— Un sistema de curvas geminales es cortado por un círculo máximo en un número par de pares de puntos.

Generatriz.

Del latin, *generatrix*.

Definición.— Toda superficie puede considerarse engendrada de una infinidad de maneras diferentes por el movimiento de una curva (variando ó no de forma), según leyes determinadas; esta curva es la *generatriz* de la superficie.

— Cuando se trata de una superficie reglada, se entiende más particularmente por *generatriz* la recta móvil que la engendra.

— Se determina mejor la ley que rige el movimiento de la generatriz que engendra una superficie, haciéndola girar sobre otras líneas fijas, que son las directrices. (Ver *directriz.)*

Aplicaciones.— Las ecuaciones de la línea generatriz y su movimiento, que vendrá expresado por la indeterminación de algunos parámetros que á ella se refieren, son necesarios para hallar en general la ecuación de una superficie.

Así, pues, siendo n el número de parámetros, se empezará por escribir las dos ecuaciones de la curva generatriz y las que dirigen su movimiento, que serán las ecuaciones de las curvas directrices, las cuales, en esta hipótesis, serán $n - 1$; porque si hubiese n, al eliminar x, y, z entre las dos ecuaciones de la generatriz y las dos de cada curva directriz, se obtendrían n ecuaciones de condición entre los n parámetros arbitrarios, que quedarían de una vez completamente determinados; por tanto, la generatriz quedaría inmóvil y no existiría la superficie. Luego bastará eliminar las variables x y, z entre los grupos de las ecuaciones de la generatriz y las directrices.

Así, por ejemplo, si se trata de una superficie de revolución considerándola engendrada por una circunferencia cuyo centro recorre una recta fija y cuyo plano permanece constantemente perpendicular á dicho eje, variando el radio de la circunferencia de modo que

se apoye constantemente sobre una curva directriz, se determinará su ecuación de la siguiente manera:

Sean las ecuaciones del eje de la superficie

$$\left.\begin{aligned} x &= az + p \\ y &= bz + q \end{aligned}\right\}$$

y tratemos de representar la circunferencia generatriz. Esta puede ser considerada como procedente de la intersección de un plano perpendicular al eje con una esfera de radio variable que tenga por centro un punto fijo del eje, y, por consiguiente, las ecuaciones de la generatriz serán:

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} &ax + by + z = d \\ &(x-p)^2 + (y-q)^2 + z^2 = R^2. \end{aligned}\right.$$

Sea, por último,

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, z) &= 0 \\ \varphi(x, y, z) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

las ecuaciones de la curva directriz.

Los parámetros variables sólo son aquí d y R^2, cuyos valores determinan en cada instante la posición de la generatriz. Cualquiera que sea la naturaleza de la curva directriz se podrán eliminar las variables x, y, z, entre los grupos de las ecuaciones (1) y (2). Se hallará de este modo entre los parámetros arbitrarios d y R^2 la relación

$$F(d, R^2) = 0, \qquad (3)$$

la cual expresa la relación que liga á d y R^2 cuando sus valores simultáneos corresponden á una generatriz de la superficie propuesta.

Eliminando d y R^2 entre las ecuaciones (1) y (3), se tendrá la ecuación general de las superficies de revolución, cuyo tipo general es:

$$F[ax + by + z, (x-p)^2 + (y-q)^2 + z^2] = 0. \qquad (4)$$

Si de la ecuación (3) se deduce $R^2 = \Phi(d)$, se puede poner la ecuación (4) bajo la forma

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 + z^2 = \Phi(ax + by + z).$$

— Cuando el eje de la superficie se confunde con el de las z, la ecuación de la superficie de revolución toma la forma

$$F(z, x^2 + y^2) = 0 \quad ó \quad x^2 + y^2 = \Phi(z).$$

Género (Curva del).

Definición.—Cuando se discute la ecuación de una cónica $f(x, y) = 0$ cuyos coeficientes son numéricos, se puede proponer sencillamente conocer si la curva que corresponde á la ecuación dada es una verdadera cónica y determinar en este caso el género á que pertenece, para lo cual se trazará la curva del *género*, ó buscar también la variedad que representa y se construirá en este caso la curva de la *variedad.*

Historia.—Las denominaciones de *género* y *variedad* dadas á estas curvas se debe á M. Longchamps, *Géométrie Analytique á deux dimensions*, de la cual tomamos las consideraciones que aquí se exponen. Otros autores, entre ellos Rémond, dan á la curva del género el nombre de *característica.*

Ecuación.—Para hallar la naturaleza de la cónica $f(x, y) = 0$, bastaría calcular los valores de Δ y δ (ver cónicas) y referirnos al cuadro de sus valores; pero la discusión de la ecuación propuesta es más delicada, considerando que las coordenadas α y β, de un cierto punto P, entran en los coeficientes de la ecuación de la cónica, y suponer que se hacen variar α y β arbitrariamente. El punto P se mueve en el plano y se puede pedir el determinar, ora el género, ora la variedad de la cónica según la situación de P. A este efecto, consideremos las dos ecuaciones;

$$A\Delta = 0 \quad y \quad \delta = 0,$$

y supongamos que α y β sean dos coordenadas cualesquiera. La primera ecuación representa una curva, U, que es la llamada de la *variedad*, y la segunda otra curva, V, que es la nombrada del género ó *característica.*

Propiedades.—Trazadas las curvas U y V, se puede decir, según la posición que ocupa el punto P, relativamente á ellas, lo que representa la ecuación dada.

— En general, estas dos curvas son mutuamente tangentes en todos los puntos que le son comunes. En efecto, las relaciones

(1) $\Delta = A\,(CAF + 2BDE - AE^2 - CD^2 - FB^2) = 0$

(2) $\delta = AC - B^2 = 0$

nos dan por su combinación, poniendo Δ bajo la forma

$$\Delta = (BE - CD)^2 - (AC - B^2)\,(CF - E^2) = 0$$

(3) $(BE - CD)^2 = 0;$

por tanto, buscando los puntos comunes á las curvas (1) y (2) se puede asociar una de estas ecuaciones con la ecuación (3), cuyo primer miembro es un cuadrado perfecto, razón por la que estos puntos comunes son dos á dos, coincidentes, y por tanto, las dos curvas en general, son mutuamente tangentes.

— Si se construye la curva que corresponde á la ecuación $A\Delta = 0$, se puede hacer abstracción de la curva $A = 0$, y, por consiguiente, la curva de la variedad se puede decir que es la que corresponde á la ecuación $\Delta = 0$.

Aplicación.—Consideremos la cónica cuya ecuación es:

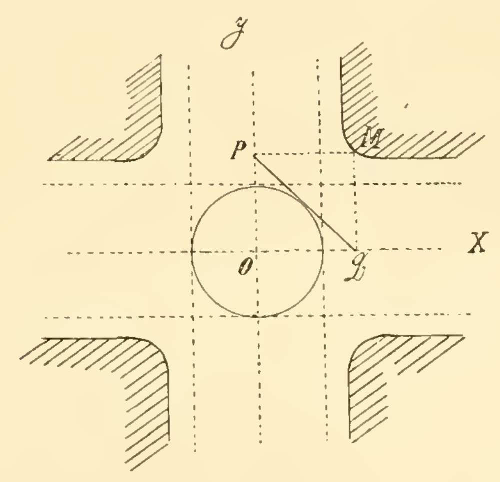


Figura 1.

$$x^2\beta\,(\alpha - h) - 2\alpha hxy + y^2\beta\,(\alpha + h) + 2h^2\alpha y - 2\alpha\beta hx = 0$$

tendremos, en este caso,

$$\delta = \beta^2\alpha^2 - \beta^2 h^2 - \alpha^2 h^2$$

$$\Delta = h^2\alpha^2\beta\,(\alpha + h)\,(h - \beta)\,(h + \beta).$$

La curva de género tiene la forma que indica la figura anterior; ésta se puede construir punto por punto como se indica en la misma figura; la recta PQ se supone movible y constantemente tangente á un círculo que tiene por centro el origen y cuyo radio es igual á h. La curva de la variedad está formada por las líneas de puntos; cuando el punto (α, β) está situado en las regiones rayadas, la cónica correspondiente es una elipse real; la cónica es una parábola, si el punto está colocado sobre la curva, y es una hipérbola en todos los demás casos. Por último, será un sistema de rectas concurrentes cuando el punto esté colocado sobre una de las líneas de puntos.

Geodésicas.

Definición. — Las líneas más cortas trazadas sobre una superficie cualquiera, entre dos de sus puntos, se llaman *líneas geodésicas* de esta superficie.

— Aun cuando la denominación de *geodésicas* se aplicó á las distancias que se miden en la superficie de la tierra, como éstas son siempre las más cortas entre las dos extremidades, de aquí el uso de designar con este nombre en Matemáticas á las líneas que con estas condiciones se trazan sobre una superficie cualquiera.

Historia. —En el *Journal des Savants* correspondiente al mes de Agosto de 1697, Juan Bernouilli propuso á su hermano Jacobo, entre otros problemas, la importante cuestión de determinar la línea mínimum entre dos puntos situados sobre una superficie cualquiera, aunque fijándose más particularmente en el supuesto de que esta superficie fuera el conoide parabólico; y Jacobo, en *Acta Eruditorum*, 1698, determina la solución de este problema, *Solutio sex problematum fraternorum in Ephem. Gallic, 26 Aug. 1697 propositorum,* ateniéndose al caso del conoide parabólico y obteniendo la ecuación diferencial de la curva pedida, siendo luego su hermano Juan el que, en 1728, da la solución general de este problema y enuncia la condición que deberá cumplir la curva pedida, de que en cada uno de sus puntos su plano osculador sea normal á la superficie sobre la cual está colocada.

Euler, en 1729, se ocupa de estas especies de curvas; pero en sus estudios se separa poco de los métodos seguidos por los hermanos Bernouilli, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimi ve propietate gaudentes.*

— El nombre de *líneas geodésicas* con que estas curvas son conocidas

se debe á Legendre, el cual las denomina de esta manera por primera vez en la *Mémoire sur les operations trigonométriques dont les résultats dipendet de la figure de la terre*, presentada á la Academia de Ciencias con motivo de las operaciones geodésicas que debían enlazar el Observatorio de París con el de Greenwich, en el año 1787.—Más tarde vuelve Legendre á ocuparse del estudio de estas líneas, y particularmente en la Memoria leída por él en el Instituto en 1806 y titulada *Sur les triangles tracés á la surface d'un Spheroïde* y en la *Construction de la ligne la plus courte sur la surface du Spheroïde.* En la primera de estas Memorias, demuestra que esta curva, prolongada indefinidamente, está compuesta de una infinidad de espiras iguales y semejantes, comprendida entre dos paralelos iguales alejados del ecuador, y en la segunda expone el medio de determinar los diferentes puntos de la curva sirviéndose de las funciones elípticas.

— En cuanto á las líneas geodésicas consideradas sobre la superficie terrestre y la consideración de los triángulos esferoides, ha dado lugar á estudios particulares, entre ellos los de Lagrange, *Journal de l'Ecole politécnique* (primeros cuadernos); de Ivory, *Philosophical Magazine* (t. VIII, pág. 31); Orioni, *Elementi di Trigonometria spheroïdique*; Puissant. *Nouvel essai de trigonometrie spheroïdique*, publicada en las *Mémoires de l'Institut* (t. XIV), etc.

— Citaremos, por último, como trabajos particulares referentes á esta clase de líneas, la Memoria sobre las mismas publicada por Mr. Charles en 1840, en las que estudia el caso de las superficies de segundo orden, la obra, *Sur quelques propietés de lignes géodésiques*, de Bonnet, publicada en 1855, y X. Automari, *Sur une propieté caracteristique des lignes geodesicas d'un cone.*

Ecuación.—Sea $f(x, y, z) = 0$ la ecuación de una superficie y supongamos que se trata de encontrar sobre ella la más corta distancia entre dos de sus puntos, ó sea la línea geodésica que los une; el cálculo de variaciones nos dará inmediatamente, para determinarla, la ecuación

$$d\frac{dx}{ds}dx + d\,.\,\frac{dy}{ds}dy + d\,.\,\frac{dz}{ds}dz = 0$$

que deberá ser satisfecha cualquiera que sean dx, dy y dz; siempre que estas variaciones llenen la condición

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{dz}dz = 0.$$

La condición se descompondrá en:

$$d\frac{dx}{ds} - \frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dz}}\, d\frac{dz}{ds} = 0 \quad \text{y} \quad d\frac{dy}{ds} - \frac{\frac{dF}{dy}}{\frac{dF}{dz}}\, d\frac{dz}{ds} = 0,$$

y una de estas dos últimas, unidas á $F(x, y, z) = 0$, que es una consecuencia, determinará la curva buscada.

Propiedades.—El plano osculador, en cada punto de una línea geodésica, es normal á la superficie en dicho punto. En efecto; el radio de curvatura principal de una curva de doble curvatura forma, con los ejes, ángulos cuyos cosenos son proporcionales á

$$d\frac{dx}{ds}, \quad d\frac{dy}{ds} \quad \text{y} \quad d\frac{dz}{ds}.$$

Por otra parte, la normal á la superficie en el punto x, y, z, forman, con los ejes, ángulos cuyos cosenos son proporcionales á

$$\frac{dF}{dx}, \quad \frac{dF}{dy} \quad \text{y} \quad \frac{dF}{dz}$$

y según las ecuaciones (1)

$$\frac{d\frac{dx}{ds}}{\frac{dF}{dx}} = \frac{d\frac{dy}{ds}}{\frac{dF}{dy}} = \frac{d\frac{dz}{ds}}{\frac{dF}{dz}}.$$

Serán las direcciones de la normal principal á la línea geodésica y de la normal á la superficie una misma.

— En la esfera, las líneas geodésicas son arcos de círculos máximos.

— En las superficies desarrollables, las líneas geodésicas son aquéllas que en la transformación son líneas rectas. Así, en un cilindro de revolución, las líneas geodésicas son las hélices.

— En las superficies de revolución, la propiedad característica de las líneas geodésicas es la de que en cada uno de sus puntos, *el producto de su distancia al eje de la superficie, por el coseno del ángulo que forma en este punto la línea geodésica con el paralelo, es constante.*

— En el elipsoide, la ecuación diferencial de primer orden de las líneas geodésicas, es

$$\left(\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2} + \frac{dz^2}{c^2}\right) \times \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right) = K \,.\, ds^2,$$

designando K una constante arbitraria.

— Esta ecuación ha sido interpretada geométricamente por Joachimsthal de una manera elegante. La distancia P del centro del elipsoide al plano tangente en el punto x, y, z, tiene por expresión:

$$P = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}},$$

y el diámetro D, paralelo á la tangente á la línea geodésica, tiene por magnitud

$$D = \frac{ds}{\sqrt{\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2} + \frac{dz^2}{c^2}}}$$

y, por consecuencia, la ecuación (a) se traduce por la relación geométrica:

$$PD = \text{constante};$$

es decir, si en un punto M, situado sobre una línea geodésica, trazada sobre una superficie de segundo grado con centro, se traza la tangente á la curva y el plano tangente á la superficie, la perpendicular bajada desde el centro sobre el plano tangente, multiplicada por el diámetro paralelo á la tangente, nos da un producto constante.

— Gauss ha demostrado (*Nouvelles Annales*, T. XVIII, pág. 16) que todas las líneas geodésicas de igual longitud que parten de un mismo punto de una superficie son perpendiculares á la curva formada por las extremidades de estas líneas, y si desde todos los puntos de una línea cualquiera trazada sobre una superficie se dirigen octogonalmente y hacia un mismo lado líneas geodésicas de la misma longitud, éstas cortan según un ángulo recto la línea que reúne sus extremos.

En Geodesia, cuando se jalona una distancia en la superficie del globo, los pies de los jalones determinan una línea geodésica.

— Si la superficie de la tierra pudiera ser considerada como una esfera, las líneas geodésicas serían arcos de círculos máximos; pero en realidad, una línea geodésica es una línea de doble curvatura, trazada sobre la superficie de un elipsoide de revolución, la cual tiene la propiedad de que *el seno del ángulo que forma con un meridiano está en razón inversa del radio del paralelo sobre el que se encuentra.* *(Traité de Géodésie*, Puissant, T. II, pág. 303).

— Existe siempre un meridiano al cual una línea geodésica dada encuentra en ángulo recto, y la propiedad anterior nos dará el radio del paralelo sobre el que tiene lugar el encuentro con este meridiano. Por tanto, una línea geodésica puede ser considerada en todos los casos como una perpendicular á un meridiano.

— Legendre ha integrado, para el caso del elipsoide de revolución, las ecuaciones diferenciales de la línea geodésica y por desenvolvimientos en series *(Mémoires de l'Institut,* 1806), ha llegado á determinar fórmulas que son de uso frecuente en la Trigonometría esferóidica y por medio de las cuales se puede verificar si las observaciones de longitud y azimut, hechas sobre diferentes puntos de una perpendicular á la meridiana, se acuerdan con las hipótesis admitidas respecto de la forma del globo terrestre. Asimismo sirven para resolver un triángulo esferóidico formado por dos meridianos y por una línea geodésica perpendicular á uno de ellos.

— Mr. Jacobi, para encontrar la línea geodésica *(Journal de Mr. Crelle,* t. XIX, pág. 309) del elipsoide y teniendo en cuenta que la superficie de la tierra es de revolución, considera un elipsoide osculador de tres ejes desiguales en las triangulaciones hechas en su superficie, y la línea geodésica queda determinada por la ecuación:

$$\alpha = \int \frac{\sqrt{a \cdot \cos^2 \varphi + b \operatorname{sen}^2 \varphi}\, d\varphi}{\sqrt{c - a\cos^2\varphi - b\operatorname{sen}^2\varphi}\sqrt{(b-a)\cos^2\varphi - \beta}}$$

$$\int \frac{\sqrt{b\cos^2\psi + c \cdot \operatorname{sen}^2\psi} \cdot d\psi}{\sqrt{b\cos^2\psi + c \cdot \operatorname{sen}^2\psi - a\sqrt{(c-b)\operatorname{sen}^2\psi + \beta}}},$$

en la cual ρ y ψ son dos integrales abelianas y de la forma en que se presentan inmediatamente según las funciones elípticas.

Siendo la ecuación del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 .$$

$$a < b < c,$$

y siendo

$$x = \sqrt{\frac{a}{c-a}} \,.\, \text{sen} \,.\, \varphi \sqrt{b \cos^2 \psi - c \,.\, \text{sen}^2 \psi - a}$$

$$y = \sqrt{b} \,.\, \cos \,.\, \varphi \,.\, \text{sen} \,.\, \psi$$

$$z = \sqrt{\frac{c}{c-a}} \,.\, \cos\psi \sqrt{c - a \cos^2\varphi - b\,\text{sen}^2\varphi}.$$

— Por último, indicaremos que en *Journal de Liouville*, t. IX, puede verse una Memoria sobre estas líneas debida á Mr. Liouville.

— En general, puede decirse que todos estos trabajos, si útiles como ejercicios de análisis, no son lo mismo para la Geodesia, por la complicación de las fórmulas á emplear y porque mil accidentes de localidad hacen de ordinario aumentar la ruta á seguir en estas operaciones.

Gola.

Definición.—Curva formada por dos arcos de circulo, que son tangentes exteriormente, siendo el cóncavo el que más vuela. Es la inversa del talón (ver esta voz).

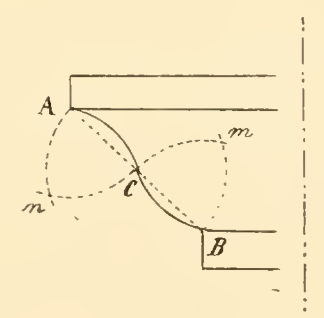


Figura 1.

Historia. — A la gola recta se la ha dado también el nombre de *cimacio* (Villaamil, *Arqueología Sagrada*, pág. 65), si bien con este

nombre la distinguió Vitruvio (lib. IV, cap. III), aunque con la denominación de *dórico* al caveto de la cornisa de dicho orden.

Clasificación.— Se distingue la *gola recta* é *inversa:* la primera es aquella que tiene vuelto el vuelo hacia arriba (fig. 1), y la segunda, la que tiene el vuelo hacia abajo (fig. 2).

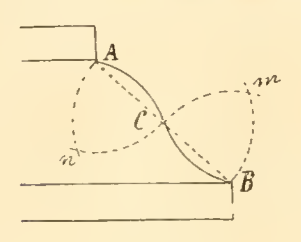


Figura 2.

Trazado.— Se unen los puntos A y B por una recta que se divide en dos partes iguales $BC = CA$; haciendo centro en A, con el radio AC se traza el arco Cn, y con el mismo radio, haciendo centro en C, se trazan los arcos An y Bm, y haciendo centro en B, el Cm, y por las intersecciones de estos arcos se encontrarán los puntos m y n, desde los cuales, como centro y con radio igual á los anteriores, se trazan los arcos de círculo CB y CA, cuya curva BCA es la pedida.

Se puede proceder también por el método que se expone en *talón* dada la semejanza de esta curva con las *golas*.

Gráficas.

Definición.—Se da este nombre á toda curva en que el movimiento de su punto generador no está sujeto á ley ninguna determinada, ó que esta ley no puede definirse geométrica ni analíticamente.

Propiedad general.—En estas líneas no existe, como en las geométricas, la continuidad de la línea, sino que se pueden limitar de una manera arbitraria y brusca, sin que presenten nunca puntos en el infinito ni ramas infinitamente largas.

Clases diversas.—A la clase de estas líneas pertenecen todas aquellas que sirven para darnos á conocer la marcha de un fenómeno que no responde á ley determinada; así, por ejemplo, tomando el eje de las x como eje de los días y el de las y como el de temperaturas, se podrá referir á este sistema de coordenadas las diferentes temperaturas de un mes, por ejemplo, y obtener la curva de las temperaturas concernientes á dicho mes; del propio modo se podrán trazar curvas que nos den á conocer la mortalidad en una población, tomando el eje de las x como eje de días y el de las y para número de defunciones, y así, cuantos fenómenos ó circunstancias quieran gráficamente determinarse, de donde se deduce que sus clases son en número indeterminado.

Tangentes.— Tres problemas principalmente se pueden presentar

respecto al trazado de tangentes á estas líneas, y son: 1.° Trazarles la tangente en un punto. 2.° Encontrar el punto de contacto de una tangente dirigida á esta curva por un punto exterior; y 3.° Trazarle las tangentes posibles paralelas á una recta dada. La solución de estos problemas requieren el empleo de las curvas de error. (Ver esta voz.)

Primer caso.— Sean CC' la curva propuesta y M el punto de contacto de la tangente pedida (fig. 1). Desde el punto M se describe con un radio arbitrario una circunferencia DD_1, y se trazan las soluciones aproximadas, es decir, las secantes que pasan por M, y veamos de buscar la secante para la cual el error es nulo, que será la

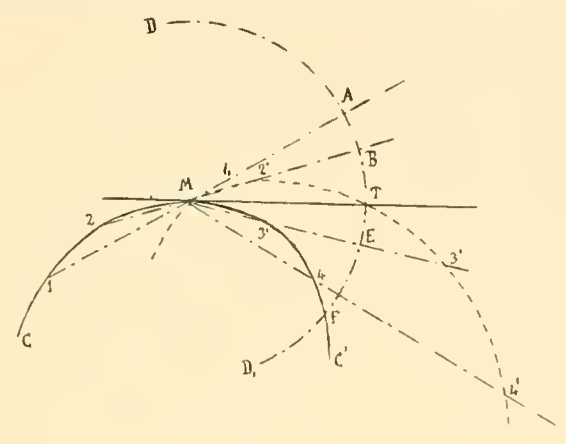


Figura 1.

tangente buscada y estará colocada en el interior del haz de las secantes consideradas.

Estas secantes cortan la curva en los puntos 1,2,3,4, y al círculo en los A, B, E, F; tomemos los segmentos $M1$, $M2$, $M3$, $M4$ sobre las divergentes correspondientes á partir del círculo, conservando el sentido de cada una de ellas, y se encontrarán los puntos 1', 2', 3', 4', cuya posición con respecto á la circunferencia auxiliar es función del error cometido; ahora bien, á medida que el punto se aleja de la circunferencia, más el segundo punto de la secante se aleja del primero M, y el error será mayor; de consiguiente, cuando el punto esté en el círculo, el error será nulo y la secante correspondiente será la tangente á la curva.

La curva de error será, pues, la que reune los puntos 1', 2', 3', 4'; se trazará, y el punto T en que corte á la circunferencia unido con M nos dará la tangente pedida.

Segundo caso.—Sea CC' (fig. 2) la curva y M el punto exterior; tracemos las soluciones aproximadas, dirigiendo varias secantes desde el punto M; por los puntos de encuentro con CC' se trazan paralelas á una dirección cualquiera, y sobre estas paralelas á un lado y otro de las secantes respectivas, se toman longitudes iguales á los errores correspondientes. Así, por la primera secante $M1$ tomamos las longitudes $1A$ y $1'E$ iguales al error $11'$; luego, por la segunda $M2$ las $2B$ y $2'F$ iguales al error $22'$, etc. Uniendo los puntos D, B, A, E, F, G así obtenidos por un trazado continuo, se tendrá la curva de error buscada. Ahora bien, como el error es nulo en el punto de encuentro T de la curva dada y la acabada de construir, este

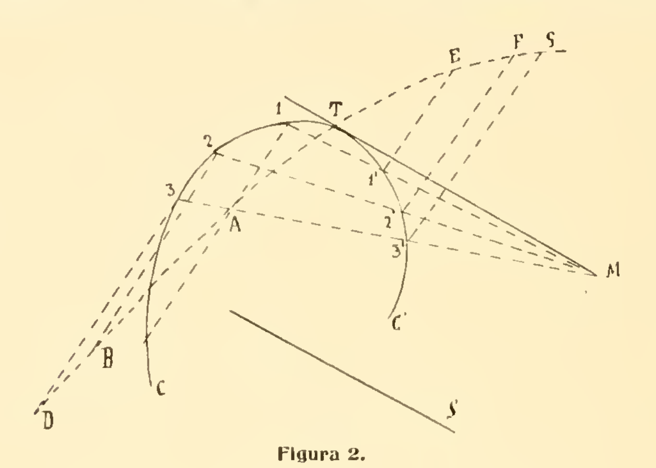


Figura 2.

punto T será el de contacto de la tangente MT con la curva propuesta, y esta línea MT, la tangente buscada.

Tercer caso.— Este se reduce al anterior. Supongamos sea S (figura 2) la recta á la cual ha de ser paralela la tangente á la curva propuesta CC'; por medio de la regla se aproximará su canto á la curva y se traza la tangente paralela MT, cuyo punto de tangencia T se encontrará construyendo la curva de error $BATEF$ como en el caso anterior.

Normales.— Si el punto en que se quiere trazar la normal está en la curva, bastará trazar la tangente en dicho punto, y la perpendicular á esta línea en el punto de tangencia será la normal.

Si el punto es exterior, bastará tener en cuenta que dicha normal es tangente á la evoluta; trazando, pues, dicha evoluta y la tangente á esta curva desde el punto dado, esta recta será la normal á la línea propuesta.

— Puede consultarse para más detalles la obra *Geometría Descriptiva*. J. A. Elizalde (pág. 135 y siguientes).

Guturbis.

Del latín (*gutturnium*, vasija de cuello angosto).

Definición.— La curva formada por dos golas contrapuestas.

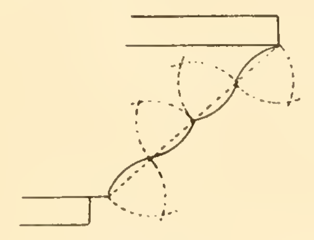


Figura 1.

Historia.—El nombre dado á esta curva se encuentra en Villaamil, *Arquitectura Sagrada,* pág. 65.

Trazado.— Siendo dos golas, su trazado se verificará conforme al de dicha curva (ver gola) y que manifiesta la figura adjunta.



Hélice.

Del griego ἕλιξ, *enrollar*.

Definición.—Se da este nombre á la curva alabeada que corta, según un ángulo constante, las generatrices de un cilindro ó cono de revolución.

Clasificación.—Según esté trazada, sobre un cilindro ó un cono, se denomina *hélice cilíndrica* ó *hélice cónica*.

Hélice cilíndrica.—*Historia.*—Proclus, en sus comentarios sobre el primer libro de los *Elementos de Euclides* (Padua, 1563. Trad. lat. de Barocci), atribuye á Géminus una obra, *Enarrationes Geometricæ*, en la que éste se ocupa de la hélice, demostrando la propiedad de ser la parte de esta curva igual á sí misma, como la línea recta y el círculo. Se pretende, dice Mr. Charles, que esta obra se encuentra, manuscrita, en la biblioteca del Vaticano.

Se ve en los *Recueil de Pappus* (prop. XVIII), que Conon había propuesto á los geómetras encontrar la teoría de la espiral, y créese que sea probablemente esta circunstancia la que inspiró á Arquímedes (su grande amigo, como así le llama en su *Tratado de la cuadratura de la Parábola)* el *Tratado sobre las hélices*. En esta obra, Arquímedes define la hélice diciendo, que es la curva engendrada por un punto que se mueve sobre una recta, según un movimiento uniforme, al par que esta recta gira ella misma con movimiento uniforme alrededor de uno de sus puntos. Demuestra que la tangente á esta curva en uno de sus puntos encuentra la perpendicular al radio vector trazado á este punto, á una distancia del punto origen igual al arco de círculo descrito desde el punto origen como centro y que pasa por el punto de contacto que está comprendido entre este punto de contacto y el radio origen. Asimismo demuestra que un sector de hélice comprendido entre dos radios vectores es al sector comprendido entre las mismas rectas del círculo descrito desde el punto origen como centro con un radio igual al mayor de los dos radios vectores, como el rectángulo de los dos radios vectores, sumado al ter-

cio del cuadrado de la diferencia de estos mismos radios es el cuadrado del radio mayor.

Una de las ediciones más antiguas de las obras de Arquimedes, entre las mejores, se denomina así: *Archimedis*, opera, gr lat. cum. comment. Eutocii, ex recens. Venatorii, Bazileæ, 1544, en folio. La edición más completa está impresa en Oxford, en 1792.

Dirección.—Si suponemos un espectador colocado en el eje de la hélice, dirigida al cenit la cabeza, ve pasar el punto móvil generador de la curva, ó de izquierda á derecha ($I.D$) ó de derecha á izquierda ($D.I$); el movimiento de progresión del punto móvil puede tener lugar del cenit hacia el nadir ($C.N$) ó del nadir hacia el cenit ($N.C$). La hélice ($I.D$, $C.N.$) se llama *dextrorsum*, y la hélice ($I.D$, $N.C.$), *sinistrorsum*. A velocidades iguales son simétricas.

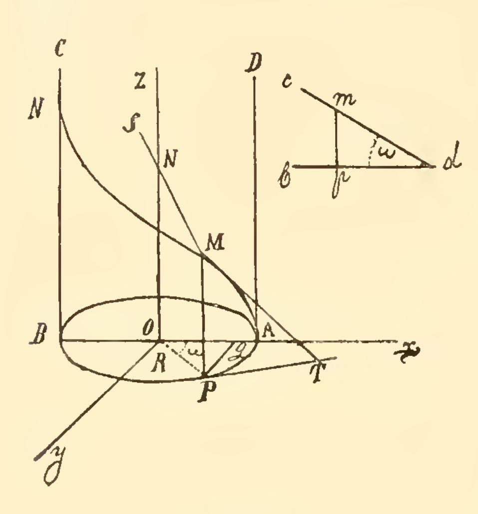


Figura 1.

Ecuación.—Tomemos por origen el centro de la base del cilindro; por ejes de las x y de las y dos rectas perpendiculares entre sí situadas en el plano de la base y de modo que el eje Ox pase por el origen A de la hélice, y, por último, por eje de las z el eje del cilindro.

Sea M (fig. 1) un punto cualquiera de la curva cuyas coordenadas serán:

$$x = OQ, \quad y = PQ, \quad z = MP,$$

traccemos el radio $OP = K$ y llamemos w al ángulo AOP y K la tangente del ángulo α será:

$$Z = MP = AP \,.\, \text{tg} \,.\, \alpha = \text{arc} \,.\, AP \times \text{tg} \,.\, \alpha = KRw,$$

y en el triángulo rectángulo OPQ se tendrá:

$$x = R \,.\, \cos \,.\, w, \quad y = R \,.\, \text{sen} \,.\, w.$$

Resultando, por consiguiente, las tres ecuaciones:

$$x = R \,.\, \cos \,.\, w, \quad y = R \,.\, \text{sen} \,.\, w, \quad z = KRw$$

entre las cuatro variables

$$x,\ y,\ z \text{ y } w.$$

Eliminando w, resultarán para la hélice las ecuaciones:

$$x = R\cos.\frac{z}{KR},\qquad y = R.\operatorname{sen}\frac{z}{KR}.$$

Tangente.—La ecuación de la tangente á esta curva (ver para este párrafo y los siguientes *alabeadas)* será:

$$\frac{X-x}{-R.\operatorname{sen}.w} = \frac{Y-y}{R.\cos.w} = \frac{Z-z}{KR},$$

ó bien

$$X-x = -\frac{y}{KR}(Z-z) \quad \text{y} \quad Y-y = \frac{x}{KR}(Z-z),$$

y llamando α, β y γ los ángulos que esta recta forma con los ejes coordenados se tendrá:

$$\cos.\alpha = -\frac{y}{R\sqrt{1+K^2}};\ \cos.\beta = -\frac{x}{R\sqrt{1+K^2}};\ \cos\gamma = \frac{K}{\sqrt{1+K^2}};$$

este último valor de *cos* γ nos dice *que la tangente* MT *forma con las generatrices un ángulo constante igual al complemento de* α, y por consiguiente, *que el angulo que la tangente forma con el plano de la base del cilindro es constante é igual al ángulo* α.

— Por otra parte, siendo

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos.w}{\operatorname{sen}.w} = -\frac{1}{\operatorname{tg}.w}$$

y representando $\frac{dy}{dx}$ el coeficiente angular de la recta PT y $tg.w$ el de la línea OP, se tendrá la propiedad de que *la proyección de la tangente á la hélice sobre el plano* xy *es tangente en el punto* P *á la base del cilindro.*

Plano normal.—Para ecuación del plano normal se tendrá:

$$-(X-x)R.\operatorname{sen}.w.dw+(Y-y)R.\cos.w.dw+(Z-z)KR.dw=0,$$

ó bien

$$(X - x)\, y - (Y - y)\, x - (Z - z)\, KR = 0.$$

— Los ángulos que este plano forma con los planos xy, xz, yz, son iguales á los que la tangente á la hélice forma con los ejes de las z, de las y y de las x, y siendo constante el ángulo que forma la tangente con el eje de las z, se deduce que *todos los planos normales forman un ángulo constante con el plano de las* xy.

Plano osculador.—La ecuación de este plano será:

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ - R \operatorname{sen} . w . dw & R . \cos . w . dw & KR . dw \\ - R . \cos . w . dw^2 & - R \operatorname{sen} . w . dw^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ó sea

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ - \operatorname{sen} . w & \cos . w & K \\ - \cos . w & - \operatorname{sen} . w & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

de donde

$$(X - x)\, K . \operatorname{sen} . w - (Y - y)\, K . \cos . w + (Z - z) = 0$$

ó

$$(X - x)\, Ky - (Y - y)\, Kx + (Z - z)\, R = 0.$$

— Llamando α_1, β_1, γ_1 á los ángulos que este plano forma con los xy, xz é yz, respectivamente, se tendrá:

$$\cos . \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{K^2 + 1}};\ \cos . \beta_1 = - \frac{Kx}{R\sqrt{K^2 + 1}};\ \cos \gamma_1 = - \frac{Ky}{R\sqrt{K^2 + 1}};$$

lo que nos dice *que el ángulo formado por el plano osculador con el de las* xy *es constante.*

Angulo de contingencia.—Para obtener el valor de este ángulo se tiene:

$$d\theta = \frac{\sqrt{d^2 x^2 + d^2 y^2 + d^2 z^2 - d^2 s^2}}{ds};$$

y siendo

$$ds = \sqrt{R^2 \operatorname{sen}^2 w . dw^2 + R^2 \cos^2 w . dw^2 + K^2 R^2 dw^2},$$

ó bien

$$ds = R\sqrt{1 + K^2} \,.\, dw;$$

y como

$$d^2s = 0$$

se tendrá:

$$d\theta = \frac{d \,.\, w}{\sqrt{1 + K^2}}.$$

Radio de curvatura.—El valor del radio de curvatura será:

$$\rho = \frac{ds}{d\theta},$$

y por consiguiente,

$$\rho = \frac{R\sqrt{1 + K^2} \,.\, dw}{\dfrac{dw}{\sqrt{1 + K^2}}} \quad \text{ó} \quad \rho = R(1 + K^2),$$

de donde resulta *que el radio de curvatura tiene el mismo valor para todos los puntos de la hélice.*

Normal principal.—La ecuación de la normal principal será:

$$\frac{X - x}{-\dfrac{x}{R\sqrt{K^2 + 1}}\, dw} = \frac{Y - y}{-\dfrac{y}{R\sqrt{K^2 + 1}}\, dw} = \frac{Z - z}{0}$$

ó bien

$$(X - x)\, y = (Y - y)\, x \quad \text{y} \quad Z - z = 0;$$

de donde

$$Xy - Yx = 0 \quad \text{y} \quad Z - z = 0;$$

por consiguiente, *la normal principal se apoya sobre el eje del cilindro* y *es paralela al plano de las* xy; es decir, está dirigida según el radio del cilindro.

— La recta MN, perpendicular al eje, y la tangente MT determinarán el plano osculador; y si se toma $NS = m^2R$, S será el centro de curvatura de la hélice para el punto M. Como, por otra parte, el radio de curvatura tiene un valor constante, siendo mayor que el radio del cilindro, resulta que *el lugar de los centros de curvatura de la*

hélice es otra hélice del mismo paso, aun cuando situada en sentido inverso.

— Los centros de las esferas osculatrices á esta curva, están contenidos en una superficie desarrollable, que es el lugar de las intersecciones sucesivas de los planos normales á la hélice propuesta en todos sus puntos; y como todos estos planos forman el mismo ángulo con el plano de las xy, la superficie, lugar de sus intersecciones sucesivas, es una *superficie helizoide.*

— Mr. Tissot ha demostrado que para que el lugar del centro de curvatura de una hélice H, trazada sobre un cilindro, sea otra hélice H', trazada sobre un cilindro paralelo al primero, es necesario y suficiente que la sección recta del primero sea un círculo ó una espiral logarítmica. (*Nouvelles Annales*, t. XI, pág. 454.)

— M. Terquem ha demostrado «que el radio de curvatura de una hélice cilíndrica, tiene en cada punto la misma dirección que el radio de curvatura de la sección recta del cilindro, y estos dos radios están en una relación constante», y también «que el plano osculador de una hélice cilíndrica es, en cada punto, perpendicular al plano que toca al cilindro, y recíprocamente». (*Nouvelles Annales*, t. XII, página 389.)

Evoluta.— La evoluta de la hélice se compone de una infinidad de ramas perfectamente iguales entre sí, colocadas alternativamente sobre las hojas superior é inferior de la superficie desarrollable, lugar de los centros de las esferas osculatrices; cada rama, al encontrarse con la que le precede, forma un punto de retroceso, y tiene, con la que le sigue, una asíntota común; los puntos de retroceso están colocados sobre la hélice, lugar de los centros de curvatura, á distancias iguales á la longitud de la semi-circunferencia del círculo cuyo radio es igual á $(1 + K^2)\,R$.

Angulo de torsión.—El valor de este ángulo, siendo dado por la expresión

$$d\lambda = \frac{dx(d^2yd^3z - d^2z.d^3y) + dy(d^2z.d^3x - d^2x.d^3z) + dz(d^2xd^3y - d^2yd^3x)}{ds\,(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2)}$$

será

$$d\lambda = \frac{KR\,.\,dw\,(R^2\,.\,\cos^2 w\,.\,dw^5 + R^2\,\text{sen}^2 w\,dw^5)}{R\sqrt{1 + K^2}dw\,(R^2\cos^2 w\,.\,dw^4 + R^2\,\text{sen}^2 w\,.\,dw^4)};$$

ó bien

$$d\lambda = \frac{K}{\sqrt{1 + K^2}}\,dw.$$

Radio de torsión. — El radio de torsión, ó de segunda curvatura, estará dado por la expresión

$$\rho_1 = \frac{ds}{d\lambda},$$

y en este caso, será

$$\rho_1 = \frac{R(1+K^2)}{K};$$

por tanto, *el radio de torsión es constante.*

— Mr. Puiseux ha demostrado, en el *Journal de Liouville* (t. VII, página 65), que la hélice es *la sola curva* en que la curvatura y la torsión son constantes; propiedad notable que pudiera servir para definirla.

Rectificación.—Habiendo antes visto que:

$$ds = R\sqrt{1+K^2}\,.\,dw,$$

es claro, que para un arco de la hélice, comprendido entre el punto A y otro M cualquiera, se tendrá:

$$s = \int_0^w R\sqrt{1+K^2}\,.\,dw,$$

ó bien

$$s = \sqrt{(Rw)^2 + (KRw)^2}.$$

Como Rw representa el arco AP, KRw representará la distancia MP; asi, pues, el arco AM tendrá por longitud la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos catetos serán la longitud del arco AM y la recta MP.

Centro de gravedad.—Mr. Ferriot (*Nouvelles Annales*, t. I, pág. 201) ha dado la siguiente regla: Sea H un arco de hélice menor que una espira. Sea A el arco de círculo que le sirve de proyección (fig. 2) sobre la base del cilindro; el centro de gravedad de H se encuentra en la intersección de la perpendicular levantada por el punto g, centro de gravedad del arco A con el plano paralelo á la base trazada á igual distancia de los dos extremos de H.

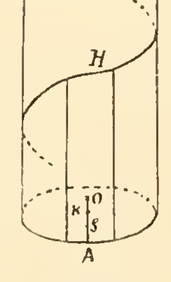


Figura 2.

— Si el arco de hélice está compuesto de una ó varias espiras, su

centro de gravedad tiende al centro *O* de la base del cilindro y el peso es proporcional al número de espiras.

Desarrollo y construcción.—De la definición de esta curva se deduce que, si se desarrolla la superficie cilindrica sobre un plano, todos los elementos de la hélice vendrán á situarse en línea recta, en prolongación los unos de los otros. Recíprocamente, si se arrolla el plano sobre el cilindro, la recta asi trazada sobre el plano nos dará la hélice.

Sea *abcd* (fig. 3) el cilindro que tenga por desarrollo el rectángulo

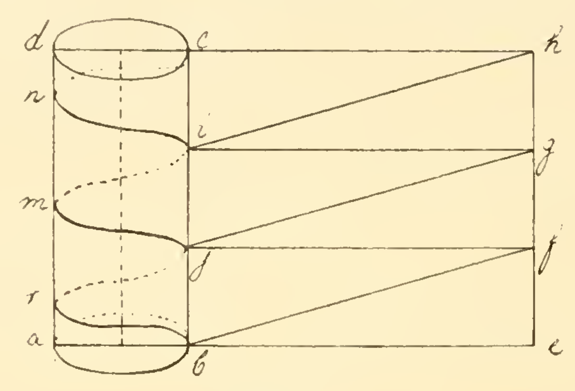


Figura 3.

bche; si se divide la altura común *bc* en un número cualquiera de partes iguales, y se trazan por los puntos de división las líneas *jf*, *ig*..... paralelas á la base *bc*, y las diagonales *bf*, *jg* é *ih* cuando se enrolle el rectángulo sobre el cilindro, las paralelas *bf*, *jg* é *ih* se transformarán sobre éste en una curva continua *brjminc*. Esta curva es una *hélice*. Los ángulos correspondientes *bfe*, *jgf*, *ihg* son iguales, y, por tanto, cada porción de la curva estará continua á la anterior.

— Una misma generatriz será cortada una infinidad de veces por la hélice. Se llaman *espiras* de la curva, los arcos consecutivos *brj*, *jmi*, *inc*, que parten de una misma generatriz, *bc*, en la que empiezan y concluyen. El *paso* de la hélice es la distancia entre dos puntos de intersección consecutivos de la curva, con una misma generatriz, igual, por tanto, á *bj* ó *ef*.

— Para obtener las proyecciones de una hélice trazada en un cilindro de revolución, se tomará la sección recta de éste por plano horizontal (fig. 4) de proyección; siendo, por lo tanto, su traza la circunferencia *abcd*. Si $\alpha\beta$ es la transformada de la hélice que se quiere

construir, se dividirá la base del cilindro, así como su transformada, en un cierto número de partes iguales. Por los puntos de división $A.1.2.3.....$ de la base pasan las generatrices del cilindro; estas generatrices tendrán por transformadas las perpendiculares bajadas sobre $\alpha\alpha'$ respectivamente por los puntos $\alpha.1.2.3.....$ La transformada de la hélice encontrará á estas generatrices transformadas en los puntos $\alpha 1'2'3'.....$

De estas consideraciones se deduce, como se ve en la figura, un método sencillísimo para construir esta curva.

Tangente en un punto de la curva.—El ángulo que la tangente, en

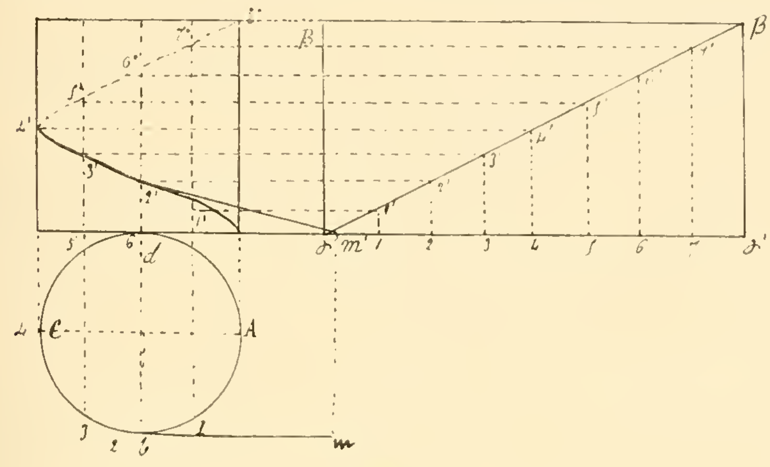


Figura 4.

un punto de la hélice, forma con la generatriz del cilindro que pasa por este punto, siendo el mismo que el que forma en este punto la hélice con la generatriz, se sigue, que en el desarrollo, la transformada de la hélice se confunde con su tangente.

— La tangente en un punto $2'$ de la curva será en el desarrollo la recta $\alpha\beta'$; ésta formará con el plano horizontal el mismo ángulo que la tangente á la curva forma con este plano. La tangente á construir encontrará al plano horizontal á una distancia del pie de la generatriz que pasa por el punto de contacto, igual á $\alpha 2$, la cual es igual al arco $A2$ rectificado; de donde se deduce que *la proyección horizontal de la tangente, contada á partir de la proyección horizontal del punto de contacto, hasta su traza horizontal, es igual á la longitud del arco de la base, contado desde el origen de la curva hasta la traza de la generatriz del punto de contacto.* Esta proyección se llama la *subtangente.*

— Así, pues, para trazar la tangente en un punto $22'$, se traza la tan-

gente á la circunferencia de la base en el punto proyección horizontal de la generatriz correspondiente, se toma sobre esta tangente una longitud $2m$ igual al arco $a\,2$ rectificado, y el punto m será la traza horizontal de la tangente pedida; hallando m' y trazando la recta $m'2'$, ésta será la tangente á la hélice.

— El lugar geométrico de las trazas horizontales de las tangentes á la hélice es una *evolvente del círculo de la base.*

Propiedad.—La proyección vertical de la hélice es una *sinusoide* (Elizalde, *Geometría Descriptiva*, pág. 333, parte 3.ª). El punto $2'$ es un punto de inflexión de la proyección de la curva, puesto que en todo otro punto de esta proyección la tangente formará un ángulo mayor con la horizontal.

— La hélice es la sola curva alabeada que goza, como la recta y el círculo, de la propiedad de poder resbalar sobre ella misma sin cesar de coincidir con su primera posición.

Aplicaciones.—Las aplicaciones de esta línea son muy numerosas. Sus propiedades sirven de base á la construcción y empleo del tornillo (no construyéndose más que el tornillo *dextrorsum* para facilitar el movimiento natural de la mano derecha), el cual, ya como máquina, ya como simple órgano de la transformación del movimiento, se usa en una infinidad de aparatos.

Hélice cónica.—Historia.—En el concurso de agregación á los Liceos en el año 1845, se pidió por Mr. Dieu, como composición de análisis, la *determinación de la curva que corta, según un ángulo constante, las generatrices de un cono de revolución y que pasa por dos puntos de este cono. Longitud, área, transformada, plano osculador, radio y centro de curvatura y lugar de estos centros.*

— Esta curva es la *hélice cónica.*

Ecuación.— Sea Ox (fig. 5) la dirección de Om', siendo m' un punto que describe la proyección sobre un plano perpendicular al eje del cono y pase por el vértice simultáneamente con m, que describe la hélice partiendo del punto A,

$$r = Om \text{ y } r' \text{ su proyección } OM' \text{ sobre } xy,$$

$$\varphi + d\varphi, \quad r + dr, \quad r' + dr',$$

los valores de φ, r, y r' para un crecimiento infinitamente pequeño de un arco de hélice MN; ds el crecimiento del arco, se tiene

$$r = C \, . \, e^{\varphi \, . \, \text{sen} \, . \, a \cot . \, \beta};$$

en esta ecuación de la curva, C es una constante fácil de determinar, lo mismo que β, de modo que la hélice pase por los puntos A_0 y A_1.

— La ecuación polar de la hélice sobre xy (polo O y eje Ox) será

$$r' = C \,.\, \text{sen} \,.\, \alpha \,.\, e^{\varphi \,.\, \text{sen} \,.\, \alpha \cot \,.\, \beta},$$

Así, pues, la proyección de la hélice cónica sobre todo plano perpendicular al eje del cono es una *espiral logarítmica.*

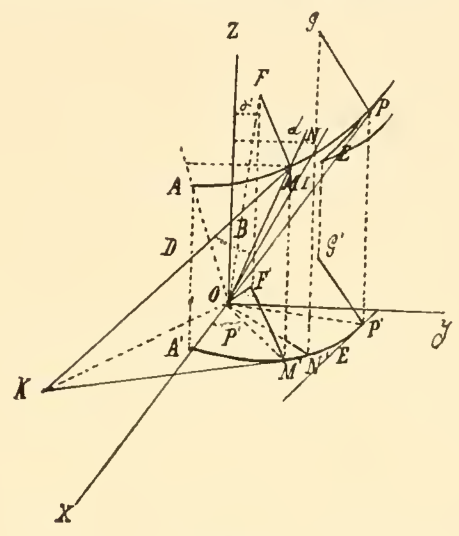


Figura 5.

Rectificación.— La longitud de un arco cualquiera de hélice cónica está representada por la hipotenusa de un triángulo rectángulo, en que uno de los catetos es la diferencia de los radios vectores de las extremidades de este arco, y en el que el ángulo agudo adyacente á este lado es igual á β.

Area.— El área de la porción de superficie cónica comprendida entre un arco de hélice y las rectas dirigidas de sus extremos al vértice del cono, tiene por valor:

$$du = \frac{1}{2} rdr \,.\, \text{tg} \,.\, \beta.$$

Transformada.— La transformada plana de la hélice cónica es una espiral logarítmica, que corta sus radios vectores según el ángulo β.

Plano osculador.— El plano osculador, en uno de sus puntos, es perpendicular al plano tangente de la superficie del cono en este mismo punto.

Radio de curvatura.—El radio de curvatura tiene por expresión:

$$\rho = \frac{r \,.\, \text{sen} \,.\, \alpha}{\text{sen} \,.\, \beta \sqrt{1 - \cos^2\alpha \,.\, \cos^2\beta}},$$

y la relación del radio de curvatura al radio vector es constante.

— El radio de curvatura es igual al radio de curvatura del cono, dividido por el cuadrado del seno de la inclinación de la hélice sobre la generatriz del cono.

— Para el vértice de la hélice cónica, el radio de curvatura es igual al radio de curvatura del cono.

— El lugar de los centros de curvatura de una hélice cónica es una hélice de la misma especie, situada sobre un cono del mismo eje y del mismo vértice.

Propiedad importante.— Si se considera una hélice cilíndrica circular como la curva directriz de un cono que tenga su vértice sobre el eje del cilindro, todo plano perpendicular á este eje corta al cono según una espiral hiperbólica, cuyo punto asintótico será el pie del eje del cilindro sobre el plano secante. Olivier. *Journal de la Ecoile Politecnique*, 1833.

Otras especies de hélices.—Tenemos también la *hélice catenóidica*, cuando la base del cilindro sobre el cual esta curva está trazada es una catenaria. E. Catalan la dió este nombre.

Las ecuaciones paramétricas de esta línea, son:

$$x = e^t, \quad y = e^{-t}, \quad z = t\sqrt{2}$$

Entre sus propiedades, es digna de notar la de que *su sombra sobre un cierto plano, es una hipérbola equilátera.* Pueden estudiarse sus propiedades consultando los años 1874, 75 y 79 de la *Nouvelle Correspondance Mathématique.*

—Las hélices *cilindro-cónicas* han sido estudiadas por Tissot (*Nouvelle Annales*, T. 11, pág. 454).

Esta línea da un número ilimitado de vueltas sobre la superficie del cono, aproximándose á su vértice sin alcanzarle, y si se planifica el cono, dicha línea se transforma en una espiral logarítmica. Pirondini, *Journal für Mathematik,* Berlín, T. 118, pág. 61.

— La *hélice Baliani* es una línea de la que se habla en las obras de Pascal, *Solutio problematis á D. Pascal propositi*, sin determinar su forma ni propiedades.

— La *hélice esférica* ha sido estudiada por Césaro (*Nouvelle Annales*), y son las evolventes de los círculos de la esfera, siendo las únicas posibles que se pueden obtener, las descritas por los puntos de un círculo máximo que se mueve permaneciendo tangente á un círculo pequeño.

Ver *Journal de Battaglini*, 1885, pág. 229 y los trabajos de Pirondini.

— Por último, las *hélices isoclínicas é isogónicas* son las que trazan sobre superficies de revolución y cortan las meridianas según un ángulo constante con un plano determinado. Para su estudio puede verse la *Théorie de las hélices*, por *Schœlcher*, *Association française pour l'avancement des Sciences*, 1891, pág. 160.

Herpollodia.

Por *Polherpolodie*, del griego πολος, *polo;* ἕρπω, *yo serpento*, y ὁδος, *camino; ruta serpentante del polo.*

Definición.— Curva formada por la serie de los puntos de contacto del elipsoide central con un plano fijo.

Historia.— El nombre de esta curva y el de la pollodia (ver esta voz) es debido á Mr. Poinsot, *Théorie nouvelle de la rotation ders corps* (*Journal de Liouville*, 1.ª serie, t. XVI), el cual considera el movimiento alrededor de un punto fijo, de un sólido que no está sujeto á la acción de ninguna fuerza aceleratriz, consiguiendo: 1.°, que el elipsoide central, cuyo centro se conserva fijo, permanece en contacto con un mismo plano, también fijo; 2.°, que gira á cada instante alrededor del radio vector que va desde el centro al punto de contacto; y 3.°, que gira con una velocidad angular proporcional á la longitud misma de este radio.

La serie de los puntos en los cuales el elipsoide central viene á ponerse en contacto con el plano fijo, se consideran sobre la superficie de el elipsoide y señala el camino del polo instantáneo en el interior del cuerpo, y estos mismos puntos pueden ser considerados sobre el plano fijo y señalan el camino en el espacio absoluto. La primera V de estas curvas es la llamada por Poinsot *pollodia*, y la segunda, V' *herpollodia*.

El lugar de los ejes instantáneos en el cuerpo es un cono, S, que tiene por vértice el punto O y por directriz la curva V, y el lugar de

los ejes instantáneos en el espacio es un cono, S', que tiene por vértice el punto O y por directriz la curva V'. Así, pues, Poinsot representa, en virtud de estas consideraciones, el movimiento de que se trata, haciendo rodar el cono S sobre el cono fijo S'.

Ecuación.— Sea M un punto cualquiera del elipsoide; trácese, desde el centro O, una perpendicular sobre un plano P, tangente en M, y sea I el pie de esta perpendicular. La herpollodia será la curva descrita por el punto M sobre este plano fijo, y la referiremos á un sistema de coordenadas polares que tenga por polo el punto I.

Si

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$$

es la ecuación del elipsoide de inercia, las ecuaciones de Euler tomarán aquí la forma

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{a(c-b)}{bc} qr \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{b(a-c)}{ac} pr \\ \frac{dr}{dt} &= \frac{c(b-a)}{ab} pq \end{aligned}\right\}$$

y admitiendo las dos integrales

$$\left.\begin{aligned} \frac{p^2}{a} + \frac{q^2}{b} + \frac{r^2}{c} &= h \\ \frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} + \frac{r^2}{c^2} &= l^2 \end{aligned}\right\}$$

si se llaman x, y, z, las coordenadas del polo, es decir, del punto en que el eje de rotación corta al elipsoide, se tendrá:

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r} = \frac{\sqrt{\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c}}}{\sqrt{\frac{p^2}{a} + \frac{q^2}{b} + \frac{r^2}{c}}} = \frac{1}{\sqrt{h}},$$

y por tanto,

$$x = \frac{p}{\sqrt{h}}; \quad y = \frac{q}{\sqrt{h}}; \quad z = \frac{r}{\sqrt{h}}.$$

Ahora, en el triángulo rectángulo OIM será:

$$OI = \frac{\sqrt{h}}{l}; \quad IM = \sqrt{\overline{OM}^2 - \overline{OI}^2},$$

y llamando ρ al radio vector IM

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - \frac{h}{l^2}},$$

y reemplazando x, y, z, en función de las rotaciones y designando por w la magnitud de la rotación total, se tendrá:

$$\rho^2 = \frac{1}{h}\left(w^2 - \frac{h^2}{l^2}\right).$$

Ahora bien; puesto que el cono, lugar del eje instantáneo en el cuerpo, rueda sobre el cono fijo que tiene por base la herpollodia, las áreas descritas sobre estos dos conos por el radio vector OM en el mismo tiempo serán iguales; así, pues, si se considera el área infinitamente pequeña descrita en el cuerpo por el radio vector OM durante el tiempo dt, y si se la proyecta sobre el plano tangente en M, se tendrá el área descrita durante el mismo tiempo dt por el radio vector ρ, área cuya expresión será:

$$\frac{1}{2}\rho^2 d\theta,$$

siendo θ el ángulo polar relativo á la herpollodia.

El área $d\varepsilon$ descrita por el radio vector OM tiene evidentemente por proyecciones sobre los tres planos principales:

$$d\varepsilon_x = \frac{1}{2}(ydz - zdy); \quad d\varepsilon_y = \frac{1}{2}(zdx - xdz) \text{ y } d\varepsilon_z = \frac{1}{2}(xdy - ydx).$$

en las cuales, después de las sustituciones de los valores encontrados de x, y, z y de diferentes operaciones, se llega á las dos fórmulas:

$$\rho^2 d\theta = \left[\frac{h}{l}\rho^2 + \frac{(h - al^2)(h - bl^2)(h - cl^2)}{l^3 h}\right] dt$$

$$\rho\frac{d\rho}{dt}=\sqrt{-h\left[\rho^2+\frac{(h-bl^2)(h-cl^2)}{hl^2}\right]\left[\rho^2+\frac{(h-al^2)(h-cl^2)}{hl^2}\right]\left[\rho^2+\frac{(h-al^2)(h-bl^2)}{hl^2}\right]}$$

cuyo sistema define á la vez la herpollodia y el movimiento del polo sobre esta curva.

Propiedades.—Las ecuaciones últimas anteriores pertenecen á la forma general,

$$\begin{cases}\rho^2\dfrac{d\theta}{dt}=m\rho^2+n\\[2ex]\rho\dfrac{d\rho}{dt}=K\sqrt{-F(\rho^2)}\end{cases}$$

en que m, n y k son tres constantes, y $F(x)$, un polinomio de tercer grado que empieza por el término x^3.

— La herpollodia puede ser considerada como siendo una curva recorrida por un punto cuya velocidad areolar, $\rho^2\dfrac{d\theta}{dt}$, es en cada momento una función lineal del cuadrado del radio vector, siendo la velocidad total una función bicuadrada del mismo radio, en la cual el coeficiente de ρ^h es negativo.

— Mr. Poinsot, en su Memoria ya citada, *Théorie nouvelle de la Rotation d'un corps solide,* manifiesta que en ciertos casos la herpollodia tiene dos puntos de inflexión; y Mr. de Sparre, *Comptes rendus*, T. XCIX, ha establecido y demostrado la conclusión contraria, ó sea que esta curva no presenta jamás puntos de inflexión.

— En esta curva, el radio vector y la tangente son dos tangentes conjugadas de la superficie que rueda.

—Si se deforma un hiperboloide de tal manera que una de sus generatrices permanezca fija y coincida con la perpendicular bajada desde el centro O al plano invariable P, el punto diametralmente opuesto á O estará asimismo sobre el plano P. Si se le obliga á describir una curva que sea normal á las posiciones sucesivas del hiperboloide, esta curva será una herpollodia.

Sobre este teorema y otras conclusiones puede verse *On the Deformation of a Heyperboloïd*, de Mr. Cayley, en la publicación *The Messenger of Mathematics*, T. VIII, pág. 51.

Aplicaciones.—(Ver pollodia.)

Herradura.

Definición.—Se llama arco en *herradura* al menor que una circunferencia y mayor que media.

El centro de este arco está por encima de la línea de sus arranques y éstos vuelan tanto como la imposta.

Historia.—Esta denominación de *herradura* se encuentra usada en Caveda, *Ensayo histórico sobre la Arquitectura Española*, pág. 206, y es debida á su forma que presenta un perfil análogo á una herradura.

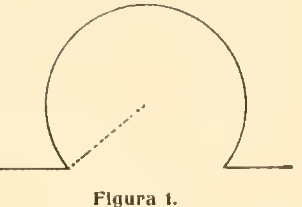


Figura 1.

También se le conoce con los nombres de *arábigo* y de *bizantino:* el primero por ser característico su uso en el estilo árabe y el segundo por atribuirse su origen á los bizantinos, que le emplearon en el segundo período del románico.

Hessiana.

Definición.—Al estudiar en Geometría el sistema de puntos de intersección de una recta con una curva $f(x_1, x_2, x_3) = a_x{}^n = 0$, y habiendo determinado las tangentes haciendo cortar la curva por una recta en *dos* puntos coincidentes, se puede precisar el problema de buscar cuáles sean las rectas que la encuentran en *tres* puntos consecutivos. Estas tangentes se llaman *tangentes de inflexión*, y su punto de contacto, *puntos de inflexión*, los cuales puntos se encuentran por las intersecciones de la curva propuesta con otra del orden 3 $(n-2)$ que recibe el nombre de *hessiana*.

Historia.—El nombre de hessiana dado á esta línea se debe á Hesse, *Ueber die Wendepunkte der Curven dritter Ordnung (Journal de Crelle*, T. 28). El número de puntos de inflexión ha sido dado por Plücker, *Theorie der algebraischen Curven*, Bonn., 1839. También puede ser consultada la obra *Introductory lessons*, etc., de Salmon, *Ueber eine klasse von Eliminations problemen und über einige Sätze aus der Theorie del Polaren (Journal de Borchardt*, T. 58), de Clebsch, y *Cours de Geometrie Analitique*, de Imber, pág. 807, etc.

Ecuación.—Sea la ecuación de la curva

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_x{}^n = 0,$$

sus puntos de encuentro con la línea que une dos puntos, y, z, se obtendrá haciendo:

$$x_1 = \chi_1 y_1 + \chi_2 z_1$$
$$x_2 = \chi_1 y_2 + \chi_2 z_2$$
$$x_3 = \chi_1 y_3 + \chi_2 z_3$$

Si ahora desarrollamos f según las potencias de $\frac{\chi_1}{\chi_2}$ se tendrá: (Clebsch, *Leçons sur la Géométrie*, T. I, pág. 252):

$$0 = \chi_1^n a_y^n + n\chi_1^{n-1}\chi_2 a_y^{n-1} a_z + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \chi_1^{n-2} \chi_2^2 a_y^{n-2} a_y^{n-2} a_z^2 +$$
$$+ \ldots\ldots + \chi_2^n a_z^n \qquad (1)$$

y la ley de formación de los coeficientes de estos desarrollos bajo forma no simbólica, están dados por el teorema de Taylor si hacemos:

$$D^0 f = f(y_1, y_2, y_3) = a_y^n$$
$$Df = a_y^{n-1} a_z$$
$$D^2 f = a_y^{n-2} a_z^2$$
$$\vdots$$
$$D^k f = a_y^{n-k} a_z^k.$$

Ahora, para obtener la condición analítica de un punto de inflexión, imponiendo la condición que entre los tres puntos de intersección de la recta yz con la curva, tres se confunden en y. Por tanto, en la ecuación (1), el factor $\left(\frac{\chi_1}{\chi_2}\right)^3$ debe encontrarse separado, es decir, que se deberá tener simultáneamente: $D^0 f = 0$, $Df = 0$ y $D^2 f = 0$.

Si y es un punto de inflexión, las dos últimas ecuaciones coexistirán cuando z esté sobre la tangente de y; pero la ecuación $D^2 f = 0$, no puede ser satisfecha para los puntos de esta tangente en tanto que $D^2 f$ contenga á Df como factor.

La cónica

$$D^2 f = \Sigma\Sigma \,.\, f_{ik} z_i z_k = 0,$$

en cuya expresión se ha puesto f_{ik} en lugar de $\frac{1}{n(n-1)} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_k}$;

deberá descomponerse en un par de rectas. La condición para que esto acontezca estará dada por el desvanecimiento de la determinante de la cónica, es decir, de aquella que está formada con las segundas derivadas parciales de f, á saber:

$$\frac{1}{6}\Delta = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Ahora, en virtud de las relaciones

$$f_{ik} = a_y^{n-2} a_1 a_k = b_y^{n-2} b_1 b_k = c_y^{n-2} c_1 c_k,$$

la anterior determinante estará dada bajo forma simbólica, de una manera análoga á la llamada *determinante hessiana* en la teoría de las formas binarias, por

$$a_y^{n-2} b_y^{n-2} c_y^{n-2} \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ b_2 b_1 & b_2^2 & b_2 b_3 \\ c_3 c_1 & c_3 c_2 & c_3^2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 (abc)\, a_y^{n-2} b_y^{n-2} c_y^{n-2},$$

ó si permutamos de todas las maneras posibles y se toma la suma de las expresiones que así se obtengan,

$$\Delta = (abc)^2 a_y^{n-2} b_y^{n-2} c_y^{n-2},$$

y los puntos de inflexión estarán, por tanto, determinados sobre la curva origen por sus intersecciones con una curva de ecuación $\Delta = 0$, que es la hessiana.

Propiedades.—Los puntos de inflexión son los de intersección de la curva originaria $f = 0$ con la hessiana $\Delta = 0$; el número de éstos puntos es igual á $3(n-2)$.

— La teoría de las polares es de gran importancia en la determinación del número de puntos de inflexión de una curva, demostrándose en su virtud las propiedades siguientes:

Sobre toda recta existen $2(n-2)$ puntos cuya primera polar los toca precisamente por esta recta. Las $(n-2)^{esimas}$ polares de los $2(n-2)$ puntos de contacto, son tangentes á esta misma recta.

Por cualquiera punto se pueden dirigir dos rectas tales que sobre cada una de ellas un punto pueda tener esta misma recta por tan-

gente de su primera polar y de tal manera que el punto de contacto esté situado en el punto dado. Estas son las dos tangentes que pueden trazarse desde este último punto á su $(n-2)^{esima}$ polar.

Estos teoremas permiten considerar la hessiana como el lugar de los puntos para los cuales estas dos líneas coinciden.

Así, pues, la hessiana es al mismo tiempo el lugar de los puntos en los cuales la $(n-2)^{ésima}$ polar tiene un punto doble y el lugar de los puntos dobles de las primeras polares.

— Si la curva origen presenta un punto doble, su hessiana presenta igualmente otro punto doble, y las tangentes á ambas curvas en su punto doble son precisamente las mismas, y las dos ramas tangentes entre sí de las dos curvas se presentan respectivamente su lado convexo.

— En un punto de retroceso de la curva origen, la hessiana tiene un punto triple, y dos de sus ramas tocan la tangente de retroceso, mientras que la tercera tiene una tangente separada.

— Ocho de los puntos de intersección de una curva de punto de retroceso y de su hessiana, se reúnen en el punto de retroceso.

— La hessiana de una curva de tercer orden es idéntica á su steineriana.

Hessiana de un haz de curvas.— Si consideramos tres curvas primitivas, dadas por las ecuaciones

$$\varphi = a_x^m = 0, \quad \psi = a'_x{}^{m'} = 0, \quad \chi = a''_x{}^{m''} = 0,$$

y suponemos $m = m' = m''$, se puede reemplazar cada una de ellas por una curva cualquiera del sistema,

$$x\varphi + \lambda\psi + \mu\chi = 0,$$

sin hacer variar su jacobiana. Se llama en este caso á esta última curva, la hessiana del sistema, y al sistema se le da el nombre de *haz*.

— En este haz se encuentran una infinidad de curvas de puntos dobles, y el lugar de estos puntos es la hessiana del haz.

— También se puede definir la hessiana de un haz por ser el lugar de los puntos en que pueden cortarse dos curvas del haz.

— En un punto común á todas las curvas del haz, la hessiana tiene un punto doble.

Así, pues, bajo el punto de vista que hemos considerado, esta curva se nos presenta como el lugar de los puntos en que las polares

lineales relativamente á todas las curvas del haz se cortan en un mismo punto; estos puntos dan lugar á la steineriana. (Ver esta voz.)

Puede consultarse, sobre estos puntos, la obra de Cremona, *Einleitung in die Theorie der algebraischen Curven;* y particularmente su Apéndice, y A. Brill, *Sur la courbe Hessienne*, *Mathematische Annalen*. T. XIII, 1878, pág. 175

Hipercicloide.

Curva de la clase de las pseudocicloides. (Ver esta voz.)

Su ecuación intrínseca es

$$K^2\rho^2 - s^2 = a^2.$$

— Su evoluta es otra pseudocicloide de ecuación

$$K^2\rho^2 = s^2 - a^2,$$

y recíprocamente la evoluta de esta segunda línea coincide con la primera, por lo cual algunos autores la denominan *curva de Euler*, por ser éste el que estudió, *Nova Acta Petrop*, 1783, las curvas que eran iguales á una de sus evolutas sucesivas.

Hipérbola.

Del griego (ὑπερβάλλειν).

Definiciones.— Curva lugar de los puntos cuyas distancias á otros dos fijos es una diferencia constante.

Los puntos fijos se llaman *focos*. La recta que une los dos focos y termina en la circunferencia, *primer eje ó eje transverso*. La perpendicular al eje transverso y que pasa por su punto medio, del cual equidistan sus extremos una cantidad igual á b, *segundo eje*. El punto en que los ejes se cortan, *centro de la hipérbola*, y aquellos en que el eje transverso encuentra á la curva, *vértices*. Una recta cualquiera que une dos puntos de la curva, *cuerda;* si ésta pasa por el centro, *diámetro*, y las que parten de los focos y terminan en la curva, *radios vectores*.

Historia.— Siendo esta curva una cónica, á lo que se dice sobre este punto en el artículo (cónicas) hacemos aquí referencia.

Ecuación y forma.— La ecuación de la hipérbola en coordenadas rectangulares referida á sus ejes y á su centro, siendo (x, y) las co-

ordenadas de uno de sus puntos y $2a$ y $2b$ la magnitud de sus ejes, es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

comparándola con la elipse (ver esta voz), se ve que se puede pasar de la una á la otra mudando el signo de b^2, ó lo que es igual, poponiendo $b\sqrt{-1}$ en lugar de b. En particular, la letra c representa aquí la longitud $\sqrt{a^2+b^2}$.

— Si tomamos sobre el eje de las x dos puntos, A y A' (fig. 1), de modo que $OA = OA' = a$, y sobre el eje de las y los puntos B, B', siendo $OB = OB' = b$, los puntos A, A' son los vértices, según hemos dicho; pero los B y B', aun cuando no están en la curva, son tales vértices; de aquí que los A, A' se llamen vértices *reales* y los B, B', *imaginarios*. La curva no tiene ningún punto en el interior de las paralelas á OY trazadas por los puntos A y A'; y á todo valor de x, mayor que a, corresponden para y dos valores iguales y de signos contrarios. La curva tiene la forma general indicada en la figura.

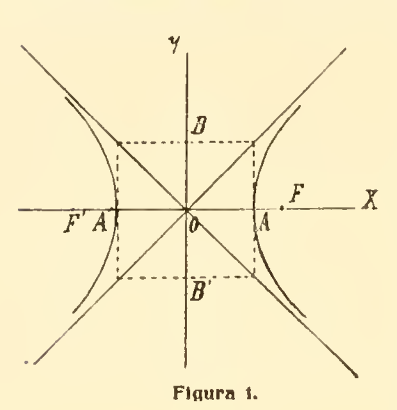


Figura 1.

— La ecuación de esta curva, en coordenadas polares, siendo su centro el polo y el eje mayor el eje polar y (ρ, α) las coordenadas de un punto cualquiera de la hipérbola,

$$\rho = \frac{b^2}{\rho - c\cos.\alpha}.$$

— En coordenadas, axiales referida á su eje focal y al centro, es, siendo (λ, θ) las coordenadas de un punto

$$\lambda^2 = a^2 - b^2\cot^2.\theta;$$

y en coordenadas líneas ó tangenciales,

$$a^2 u^2 - b^2 v^2 - 1 = 0 \text{ (ver elipse).}$$

Propiedades.— Los cuadrados de las ordenadas perpendiculares al eje transverso son proporcionales á los productos de los segmentos correspondientes formados sobre este eje.

— Las ordenadas perpendiculares á el eje transverso están con las ordenadas correspondientes de la hipérbola equilátera (ver esta voz) construída sobre este eje, en la misma relación constante que el eje imaginario al eje transverso.

— Una hipérbola no equilátera puede ser considerada como la proyección de una hipérbola equilátera cuyos ejes son iguales al mayor de los dos ejes de la hipérbola considerada.

— Dos rectas trazadas desde los extremos del eje transverso á un punto cualquiera de la hipérbola determinan sobre la dirección del eje imaginario, á partir del origen, dos segmentos cuyo producto es constante é igual á $-b^2$.

Focos y directrices.— Los dos puntos situados sobre el eje transverso de una hipérbola á una distancia del centro $c=\sqrt{a^2+b^2}$ son los focos de la curva. La distancia $2c$ entre estos puntos es la *excentricidad.*

— Si un punto M está sobre la curva, la diferencia de los radios vectores trazados desde éste, es igual al eje transverso. En efecto; siendo F y F' los focos,

$$MF=\frac{cx}{a}-a,\quad MF'=\frac{cx}{a}+a$$

y

$$MF'-MF=2a.$$

Si el punto es exterior á la curva, $MF'-MF<2a$, y si interior, $MF'-MF>2a$.

Para la construcción de los focos se levantará, en uno de los vértices, A, una perpendicular al eje transverso; se tomará sobre esta perpendicular, á partir del vértice, una longitud, $AB=b$, y con un radio OB se describirá, desde el punto O como centro, una circunferencia que cortará á la dirección del eje transverso en los puntos F y F', que serán los focos.

— El teorema de Castel, indicado en la elipse, es aquí igualmente cierto.

— A la hipérbola se la puede considerar como el lugar geométrico de los puntos igualmente distantes de un foco y de una circunferencia descrita desde el otro foco como centro y con un radio igual al eje transverso, la cual recibe el nombre de *circunferencia directriz*, correspondiente al otro foco.

— A cada foco de la hipérbola corresponde una recta tal, que la relación de las distancias, de un punto de la curva al foco y á esta recta, es constante é igual á $\frac{c}{a}$.

Estas rectas se llaman *directrices*.

Si DL es una de estas líneas (fig. 2), perpendicular al eje mayor, y $OD = \frac{a^2}{c}$, y se toma un punto M en la hipérbola, se tiene

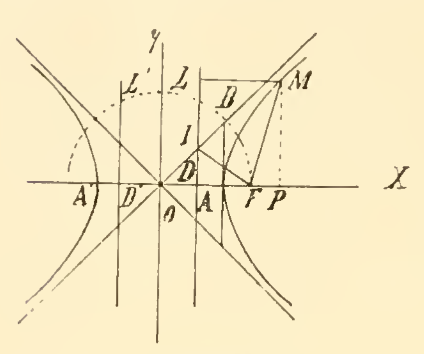


Figura 2.

$$ML = PD = x - \frac{a^2}{c}$$

$$MF = \frac{cx}{a} - a = \frac{c}{a}\left(x - \frac{a^2}{c}\right)$$

y por tanto,

$$\frac{MF}{ML} = \frac{c}{a}$$

—Para construir la directriz DL, levantaremos á OX en A la perpendicular $AB = b$; uniremos el punto B con O, y desde F trazaremos la perpendicular FI á la recta OB. Luego, desde I, se traza la ID perpendicular á OA, y se tendrá la directriz DL. En efecto, se tiene

$$\frac{OD}{OI} = \frac{OI}{OF} \quad \text{ó} \quad \frac{OD}{a} = \frac{a}{c}; \quad \text{de donde} \quad OD = \frac{a^2}{c}.$$

— La directriz es la polar del foco correspondiente.

Parámetro.— La ecuación de la hipérbola, tomando por ejes coordenados el eje transverso prolongado y la perpendicular levantada á este eje en el vértice derecho, será, llamando (x', y') las coordenadas de un punto de la curva,

$$y'^2 = \frac{2b^2}{a} x' + \frac{b^2}{a^2} x'^2;$$

el coeficiente $\frac{2b^2}{a}$ que tiene x' en esta ecuación, se llama *parámetro* de la hipérbola; y como

$$\frac{2b^2}{a} = \frac{4b^2}{2a},$$

resulta que el «parámetro de la hipérbola es una tercera proporcional á los ejes transverso y segundo».

— La cuerda perpendicular al eje transverso de la hipérbola, y que pasa por el foco, es igual al parámetro.

Tangente.— La ecuación de la tangente en un punto (x', y') es:

$$y - y' = \frac{b^2 x'}{a^2 y'} (x - x').$$

— La tangente á la hipérbola divide en dos partes iguales el ángulo que forman los radios vectores dirigidos al punto de contacto.

De este teorema se deduce la solución de los tres problemas siguientes:

Problema primero. «Trazar una tangente á la hipérbola por un punto dado en la misma, conociendo los focos, y estando ó no construída la curva.»

Se dirigen los radios vectores al punto dado, y la bisectriz del ángulo que formen será la tangente.

Problema segundo. «Desde un punto dado fuera de la hipérbola, dirigir las dos tangentes á la misma, conociendo el eje transverso y los focos, y estando ó no construída la curva.»

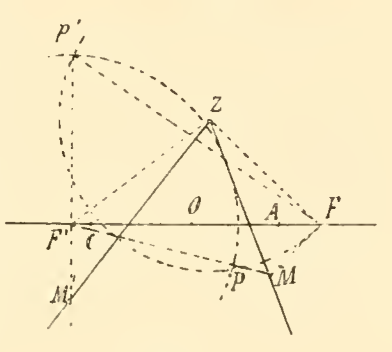


Figura 3.

Sea AC, F y F' (fig. 3) el eje transverso, y los focos, I el punto desde el cual se han de dirigir las tangentes, punto que debe encontrarse fuera de las asíntotas, como luego veremos. Haciendo centro en I, se describe, con un radio igual á la distancia de este punto á uno de los focos, al F por ejemplo, una circunferencia; desde el otro foco F' se describe, con el radio $2a$, otra circunferencia, que cortará á la primera en dos puntos, P y P'; se trazan desde los focos F y F' las rectas FP, FP', $F'P$ y $F'P'$; desde el punto I se trazan las perpendiculares IM, IM' á las rectas PF, $P'F$, y estas perpendiculares serán las tangentes á la hipérbola en los puntos M y M', en que cortan á las rectas $F'P$ y $F'P'$, como es fácil verificar.

Problema tercero.—«Conociendo el eje transverso y los focos de una

hipérbola, construir las dos tangentes paralelas á una recta dada estando construida ó no la curva.»

Sean AC, F y F' (fig. 4) el eje transverso y los focos, DE la recta dada, á la cual han de ser paralelas las tangentes pedidas. Para la posibilidad del problema es necesario, según luego se verá, que, dirigiendo por el centro una recta paralela á la DE, quede comprendida dentro del ángulo de las asíntotas que no comprenden los focos.

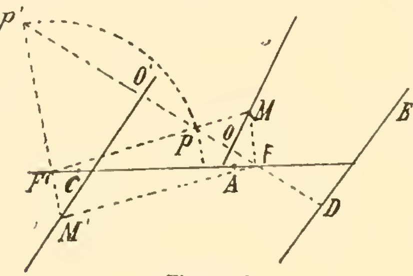


Figura 4.

Suponiendo que así sea, se dirige la FD, perpendicular indefinida, á la DE, y desde F', con el radio $2a$, se describe un arco, que cortará á esta perpendicular en los dos puntos P y P'; se trazan las rectas indefinidas $F'P$ y $F'P'$, y en los puntos medios de las PF y $P'F$ se levantan las perpendiculares OM y $O'M'$, que serán las tangentes á la curva en los puntos M y M' en que cortan á las $F'P$ y $F'P'$ prolongadas, como fácilmente se comprueba.

— El lugar de las proyecciones de los focos sobre las tangentes á la hipérbola es el círculo descrito sobre el eje transverso como diámetro ó *círculo homográfico.*

— El rectángulo de las perpendiculares bajadas desde los focos sobre una tangente, es constante é igual á b^2 (Chappon).

— La bisetriz del ángulo que forman entre sí dos tangentes á una hipérbola, es asimismo bisectriz del ángulo que se forma uniendo su punto de concurso con los focos. (E. Jube.) De aquí se deduce que las tangentes trazadas desde un punto exterior forman ángulos iguales con las rectas que unen estos puntos con los focos.

Normal.—La ecuación de la normal en un punto (x', y'), es:

$$y - y' = -\frac{a^2 y'}{b^2 x'}(x - x').$$

— La normal en un punto de la hipérbola divide en dos partes iguales el ángulo formado por uno de los radios vectores en dicho punto y la prolongación del otro.

— Los pies de las normales dirigidas á una hipérbola por un punto P, se encuentran sobre una hipérbola equilátera, que pasa por el punto P y el centro de la hipérbola dada y cuyas asíntotas son paralelas á los ejes de la hipérbola.

Subtangente y subnormal.—Si T y N son los puntos en que la tangente y la normal, en un punto $M(x', y')$, cortan respectivamente al eje transverso, se tendrá:

$$OT = \frac{a^2}{x'}; \quad ON = \frac{c^2 x'}{a^2};$$

el valor de la subtangente será:

$$S_t = \frac{x'^2 - a^2}{x'}$$

y el de la subnormal:

$$S_n = \frac{b^2 x'}{a^2}.$$

— Cuando el punto M se aproxima á uno de los extremos del eje transverso, x' se aproxima á $\pm a$ y el valor de ON tiende hacia $\pm \frac{c^2}{a}$. Así, en el límite, cuando el punto M se confunde con uno de los extremos del eje transverso, el pie de la normal sobre este eje se encuentra á una distancia igual á la longitud $\pm \frac{c^2}{a}$, mayor que c en valor absoluto.

Diámetros.—La ecuación de un diámetro que biseca las cuerdas, cuya ecuación es $y = mx + \alpha$, tendrá por expresión:

$$a^2 ym - b^2 x = 0.$$

— Todos los diámetros de la hipérbola son líneas rectas que pasan por el centro.

— Entre el coeficiente angular m de un diámetro y el m' de las cuerdas que éste biseca, se tiene la relación

$$mm' = \frac{b^2}{a^2}.$$

— La tangente á la hipérbola en uno de los extremos de un diámetro, es paralela á las cuerdas que éste biseca.

— Si dos diámetros son tales que cada uno biseca las cuerdas paralelas al otro, se llaman *diámetros conjugados*.

— La ecuación de la hipérbola referida á un sistema de diámetros conjugados, cuyas semilongitudes sean a' y b', será:

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1,$$

idéntica en la forma á la de la hipérbola referida á sus ejes.

— No hay más sistema de diámetros conjugados rectangulares que el sistema de los ejes.

— El ángulo de dos diámetros conjugados puede tomar todos los valores posibles sin pasar por un máximo, como sucede en la elipse.

— Las coordenadas (x', y') de uno de los extremos de un diámetro, están relacionadas con las (x, y) de uno de los extremos de su conjugado por las expresiones:

$$x = \pm\frac{ay'}{b}, \quad y = \pm\frac{bx'}{a} \quad \text{(Fórmulas de Chasles).}$$

— La diferencia de los cuadrados de dos semidiámetros conjugados, es igual á la diferencia de los cuadrados de los semiejes. (Apolonio.)

— El paralelogramo construído sobre dos semidiámetros conjugados, es equivalente al rectángulo construído sobre los semiejes. (Apolonio.)

— En la hipérbola no pueden existir diámetros conjugados iguales. En la hipérbola equilátera (ver esta voz), todo diámetro es igual á su conjugado.

— La suma de los cuadrados de las distancias de las proyecciones de dos diámetros conjugados sobre una recta fija cualquiera es constante.

— Dos diámetros conjugados interceptan sobre una tangente á partir del punto de contacto, dos segmentos cuyo producto es igual al cuadrado del semidiámetro paralelo á la tangente.

— La diferencia de dos cuerdas focales, respectivamente paralelas á dos diámetros conjugados, es constante.

Cuerdas suplementarias.—Se dice que dos cuerdas son *suplementarias* cuando parten de un mismo punto de la hipérbola y terminan en las extremidades de un diámetro.

— Los coeficientes angulares, m y m', de dos cuerdas suplementarias, están ligados por la expresión

$$m\,m' = \frac{b^2}{a^2};$$

por consiguiente, la relación que existe entre el coeficiente angular de un diámetro y el de sus cuerdas conjugadas, así como la de los coeficientes angulares de dos diámetros conjugados, es idéntica á la que existe entre los coeficientes angulares de dos cuerdas suplementarias. De aquí se deduce que, si por el centro de una hipérbola se trazan rectas paralelas á dos cuerdas suplementarias, se obtiene un sistema de diámetros conjugados.

— Si por los extremos de un diámetro secante se dirigen dos cuerdas paralelas á otras dos suplementarias, dichas paralelas serán también suplementarias.

— Si por un punto de la hipérbola se dirigen dos cuerdas cuyas direcciones son conjugadas, sus extremos son diametralmente opuestos.

Asíntotas.—Las asíntotas de la hipérbola, referidas á su centro y sus ejes, tienen por ecuación

$$y = \pm \frac{b}{a} x,$$

de donde se deduce que estas líneas coinciden con las diagonales del rectángulo construído sobre los ejes.

— Las asíntotas encuentran á la hipérbola en el infinito y son las únicas rectas que, pasando por su centro, gozan de esta propiedad.

— Cada asíntota puede ser considerada como el límite á que se aproxima indefinidamente la tangente á la curva á medida que el punto de contacto se aleja del vértice.

— El producto de las distancias de un punto cualquiera de la hipérbola á sus asíntotas, es constaute é igual á $\frac{a^2+b^2}{4} = \frac{1}{4}c^2$, que es la ecuación de esta línea referida á sus asíntotas. La cantidad constante $\frac{a^2+b^2}{4}$ se llama *potencia* de la hipérbola.

— La directriz que corresponde á un foco es la recta que pasa por las proyecciones de este punto sobre las asíntotas.

— La tangente es un punto de la hipérbola, queda dividida por el punto de contacto y por las asíntotas en dos partes iguales.

— Los segmentos interceptados, sobre una tranversal cualquiera, por la hipérbola y por sus asíntotas, son iguales.

— El rectángulo de las partes de una secante, comprendida entre un punto de la curva y las asíntotas, es igual al cuadrado del semidiámetro paralelo á la secante.

— El triángulo formado por las asíntotas de la hipérbola y una tangente cualquiera, tiene una superficie constante é igual al área del rectángulo construído sobre los semi-ejes.

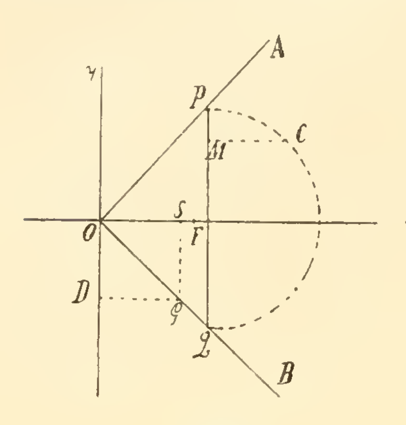


Figura 5

—Las diagonales del paralelogramo construído sobre dos diámetros conjugados de la hipérbola, son las asíntotas de lacurva.

—Si sobre una cuerda de la hipérbola se construye un paralelogramo cuyos lados sean paralelos á las asíntotas, la diagonal pasa por el centro.

Problemas.—1.° «Construir una hipérbola, conociendo las aslntotas y un punto.»

Sean (fig. 5) OA, OB, las asíntotas dadas; sus bisectrices Ox, Oy, serán los ejes de la curva. Se sabe que

$$MP\,.\,MQ = b^2,$$

siendo b el semi-eje no transverso. Se puede, pues, obtener la longitud b y determinar por tanto la a y los demás elementos; se describe un círculo sobre PQ como diámetro $MC = b$, se toma $OD = b$; se dirige una paralela á Ox hasta su encuentro con OB; desde el punto de encuentro se traza una paralela á Oy; S es el vértice de la curva; se toma sobre Ox, $OF = OG$, y se obtiene el foco F, etc.

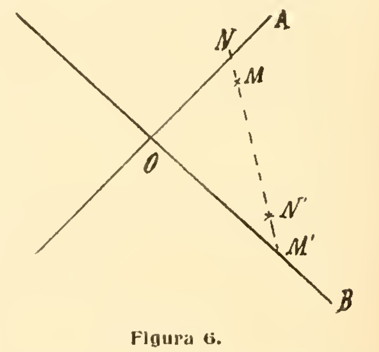


Figura 6.

Si se quiere obtener la curva por puntos, bastará trazar por el punto dado M (fig. 6) la secante NMN', que termine en las asíntotas, y tomando $M'N' = MN$, se tendrá en N' otro punto de la curva, y así cuantos se quieran, repitiendo la construcción para otras secantes que parten de M ó de los puntos que se vayan obteniendo.

2.° Construir una hipérbola conociendo un sistema de diámetros conjugados.

Se traza el paralelogramo definido por los diámetros conjugados

dados, y se obtiene, dirigiendo sus diagonales, las asintotas de la curva; el problema queda ahora referido al anterior.

3.° Construir una hipérbola, conociendo tres puntos y la dirección de sus asíntotas.

En total venimos á conocer cinco puntos: dos están alejados al

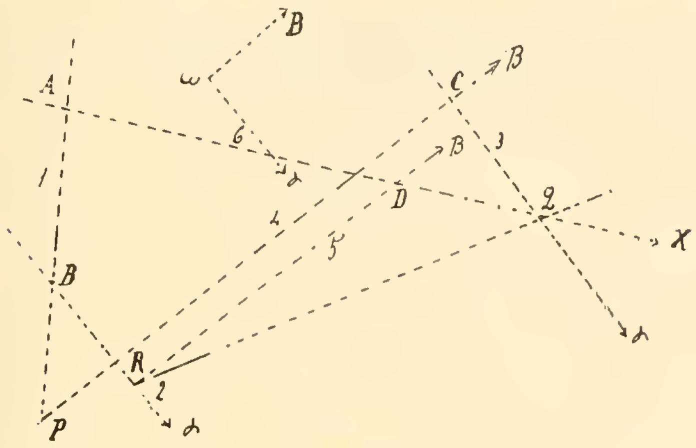


Figura 7.

infinito en las direcciones dadas: el teorema de Pascal puede sèr inmediatamente aplicado. Sean $\omega\alpha$, $\omega\beta$ las direcciones asintóticas (figura 7). Numerando los lados $AB-1$, $B\alpha-2$, $\alpha C-3$, $C\beta-4$, busquemos el punto de la curva situado sobre una secante arbitraria AX, trazada por el punto A; éste es el lado 6; el lado 5 pasa por el punto β y el punto incógnito.

Sea P el punto de encuentro de los lados 1 y 4; Q el de los lados 3 y 6.

Tracemos PQ; esta recta encuentra el lado 2 en el punto R; este punto pertenece al lado 5; dirigiendo $R\beta$ paralela á $w\beta$ se obtiene el punto buscado en D. Asimismo se construirá una tangente, etc.

Fundándose en la última de las propiedades que antes se han indicado, se puede resolver este problema de la manera siguiente: Sean A, B, C (fig. 8) los tres puntos dados, y $w\alpha$, $w\beta$, las direcciones asintóticas. Sobre AB, como diagonal, se construye el paralelogramo cuyos lados son paralelos á las asíntotas; la segunda diagonal, MN, es el primer lugar del centro. La misma construcción, hecha sobre la diagonal BC, nos da, en $M'N'$, un segundo lugar de este punto; el punto de encuentro B de las rectas MN, $M'N'$ será el centro de la hipérbola, y el problema ya puede continuarse para buscar los demás elementos como se sabe.

Radio de curvatura.— El valor del radio de curvatura ρ está dado por la expresión

$$\rho = \frac{(b^4 x^2 + a^4 y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4}.$$

Evoluta.— Ver la voz (evoluta de la hipérbola).

Cuadratura.— Se simplifica la cuadratura de la hipérbola refiriéndola á sus asíntotas. Si la ecuación de la curva es $xy = K^2$, y las

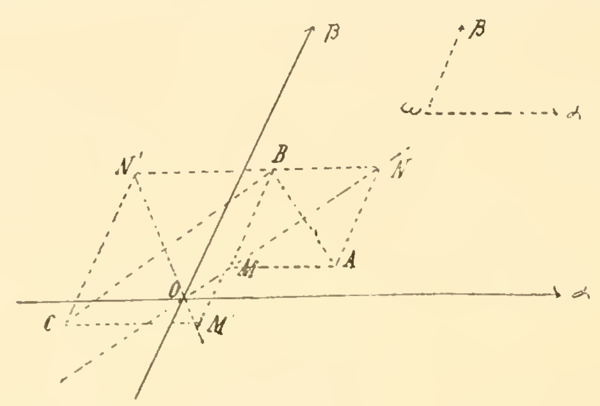


Figura 8.

asíntotas forman entre sí un ángulo θ, el área de un segmento comprendido entre dos ordenadas, la curva y la asíntota tomada por eje de las x, es dada por la integral:

$$\text{sen}\,.\,\theta \int_{x_0}^{x} y dx = \text{sen}\,.\,\theta \int_{x_0}^{x} \frac{K^2}{x} dx = K^2 \,\text{sen}\,.\,\theta \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} =$$
$$= K^2 \,\text{sen}\,.\,\theta\,.\,L\,.\,\frac{x}{x_0}.$$

Cuando los dos puntos límites pertenecen á una misma rama de la curva $\frac{x}{x_0}$, es positivo, y si se reemplaza por $L.\,\frac{x}{x_0}$ su valor aritmético, se tiene el área real que se quiere calcular, pero si $\frac{x}{x_0}$ es negativo, la integral es necesariamente imaginaria. Cualesquiera que sean x y x_0, el logaritmo neperiano de $\frac{x}{x_0}$ presenta una infinidad de valores en progresión aritmética, que tienen por razón $2\pi\sqrt{-1}$.

— Si se calculan las áreas hiperbólicas desde la ordenada correspondiente á la abscisa 1, y la base del sistema de logaritmos es $e^{\frac{1}{K^2 \operatorname{sen.} \theta}}$, las áreas hiperbólicas son logaritmos de las abscisas.

— Todo sector hiperbólico, $OACB$, es equivalente al segmento $ACBB'A'$, comprendido entre la asíntota, el arco del sector y las dos ordenadas de sus extremos.

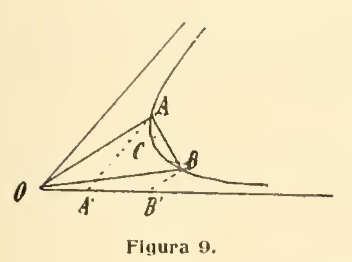


Figura 9.

Rectificación.—Esta es dada por una integral doblemente periódica. El período real es la diferencia de las longitudes totales de la curva y de sus dos asintotas, y el período imaginario es la diferencia afectada del signo $\sqrt{-1}$ de las longitudes totales de la hipérbola suplementaria y de las mismas asíntotas.

Aplicaciones.— Tiene numerosas aplicaciones. Fuera de los innumerables usos á que se aplica en Geometría, en Sombras y Perspectiva de Sombras, es de grande utilidad. En Mecánica, en la teoría de Puentes suspendidos, la tensión de la cadena está representada por esta curva. En Hidráulica, ella representa la diferente velocidad de los filetes líquidos. En las máquinas de vapor, el trabajo de la detención se evalúa como área de una hipérbola. En Estereotomía, se la encuentra como línea directriz de superficies de juntas en una porción de bóvedas, etc., etc.

Hipérbolas de diferentes especies.

Hipérbolas conjugadas.— Se dice que dos hipérbolas son conjugadas cuando los vértice reales de la una son los vértices imaginarios de la otra.

Ecuación.— Las ecuaciones de dos hipérbolas conjugadas son:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Propiedades.— Dos hipérbolas conjugadas tienen las mismas asíntotas, y los diámetros transversos de la una son los diámetros imaginarios de la otra, y recíprocamente.

—El lugar geométrico de las extremidades de dos diámetros imaginarios de una hipérbola dada, es la hipérbola conjugada de esta curva.

— Dos hipérbolas equiláteras conjugadas tienen, respectivamente, por ecuación:

$$x^2 - y^2 = a, \quad x^2 - y^2 = -a.$$

Hipérbola defectiva.—Se da este nombre á una curva hiperbólica de tercer grado que no tiene más que una sola asíntota rectilínea.

Hipérbolas de órdenes superiores.— Se da este nombre á todas las curvas que están representadas por la ecuación

$$Ay^{m+n} = B(a+x)^m x^n.$$

Esta ecuación general encierra, como caso particular, la ecuación

$$Ay^2 = B(ax + x^2)$$

que se llama hipérbola cónica ó apoloniana.

— También se llaman hipérbolas las curvas cuya ecuación referida á sus asíntotas es de la forma

$$x^m y^n = c^{m+n},$$

que comprende, como caso particular, la ecuación con respecto á sus asíntotas de la hipérbola cónica

$$xy = c^2.$$

Ver *Comptes rendus de l'Académia de Sciences de París,* T. 121, página 340, P. Serret.

Hipérbola de Wallis. Wallis trata la curva, cuya ecuación es:

$$y = \frac{1}{x} = x^{-1},$$

que representa una hipérbola de segundo grado, como caso particular de la parábola

$$y = \frac{1}{x^m}.$$

Esta curva ofrece una dificultad particular, puesto que la fórmula nos da, para área de esta curva, $\frac{x^0}{0}$; Wallis concluye de aquí que el espacio comprendido entre la hipérbola y la asíntota es infinito. La cuadratura definitiva ha sido obtenida por Mercator.

Hipérbola equilátera.—Definición.—Se da este nombre á una hipérbola cuyos ejes tienen la misma longitud.

Historia.— Si en esta línea de que nos ocupamos se cuentan sus áreas desde la ordenada asintótica del vértice, y se toma por unidad

esta ordenada ó la abscisa correspondiente, «las áreas asintóticas son logaritmos neperianos de las abscisas». De aquí que á los logaritmos neperianos se les diera en otro tiempo el nombre de *logaritmos hiperbólicos*.

Sin embargo, nada más lejos del ánimo de Neper al escribir su obra *Logarithmo rum canonis descriptio, seu arithmeticorum supputationum mirabilis abbreviatio, ejusque usus in utraque trigonometria, ut etiam in omni logistica mathematica amplissimi, facillimi et expeditissimi explicatio, authore ac inventore Joanne Nepero barone Merchistonnii, Scoto*, cuya primera edición apareció en 1614, que pensar en la cuadratura de la hipérbola al calcular sus logaritmos, que luego llamaron hiperbólicos, siéndole difícil el señalar cuál era la que hoyllamamos base, y mucho más lejos de imaginar el desenvolvimiento en serie.

El método que siguió Neper para construir las tablas es ingenioso en extremo, pero independiente de toda teoría. Véase el procedimiento para formar la progresión geométrica cuyos términos ocupan una de las columnas de sus tablas. La razón de esta progresión que hace decreciente, estando supuesta $1-\frac{1}{n}$, cada término deberá ser igual al anterior, disminuido de su enésima parte; el cálculo no exige más que simples sustracciones. Las progresiones de Neper son:

$$0, 1, 2, 3 \ldots\ldots$$

para la progresión por diferencia, y

$$10^7,\ 10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right),\quad 10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^2,\quad \ldots\ldots$$

para la progresión por cociente; de manera que el logaritmo crece cuando el número aumenta. Se ve que el módulo del sistema es -1.

Para formar la tabla de los logaritmos senos, Neper demuestra que *log. sen. A* está comprendido entre (1 — *sen. A*) y (*cos c. A* — 1). En consecuencia, para calcular *log. sen. A*, él toma las medias aritméticas y geométrica entre (1 — *sen. A*) y (*cos c. A* — 1); para asegurar que difieren poco la una de la otra y guardar en este caso la media geométrica para el valor de *log. sen. A*. Esta media geométrica es:

$$\frac{1-\text{sen}\,.\,A}{\sqrt{\text{sen}\,.\,A}}$$

la que no exigiría un cálculo muy largo.

Neper tuvo el placer de ver su invención adoptada por Briggs.

— Lambert hizo transportar, del círculo á la hipérbola equilátera, las fórmulas relativas á la suma, resta, multiplicación y división de los ángulos imaginarios destinados á la práctica de su *Trigonometría Hiperbólica* (1764). Los ángulos imaginarios son considerados por Lambert bajo la forma de sectores de hipérbola equilátera; así, un ángulo α corresponde á un sector circular cuya área es $\frac{\alpha}{2}$, un ángulo, $\beta\sqrt{-1}$, á un sector hiperbólico cuya área es $\frac{\beta}{2}$. Considera los ángulos reales en el centro del círculo y los imaginarios en el centro de la hipérbola equilátera; pero no reúne las dos partes de un ángulo en parte real y en parte imaginaria, laguna que imprime á su teoría un carácter de excepción arbitraria, que hace se deje sin aceptar; por lo demás, carece de aplicación práctica, y la señalamos á título únicamente de consecuencia curiosa.

— Moivre divide con Lambert el honor de haber dado nacimiento á la Trigonometría imaginaria, transportando del círculo á la hipérbola los teoremas relativos á la multiplicación y á la división de los sectores.

— Citaremos igualmente, entre los trabajos especiales dedicados á estos estudios, la obra *Logarithmotechnia, sive methodus construendi logarithmos nova, cui accedit vera quadratura hyperbolæ et inventio summæ logarithmorum*, de Miaskowski, matemático polonés (Praga, 1742).

— En cuanto á las analogías notables que la hipérbola equilátera presenta con el círculo, fueron ya objeto de estudio por Grandi en su obra *Quadratura circuli et hiperbolæ* (Pisa, 1703); y de estudios especiales de esta curva citaremos particularmente una *Mémoire* publicada en los *Ann. de Gergonne*, t. II, y otra, de MM. Brianchon y Poncelet, en los mismos *Ann. de Gergonne*, t. XI, pág. 205. 1821.

— Las analogías entre el círculo y esta curva han hecho el que á la primera hayan dado algunos autores el nombre de *hiperciclo*, ó, por contracción, *hiperclo*.

Ecuación.— La ecuación de la hipérbola equilátera, referida á su centro y á sus ejes, es:

$$y^2 = 2ax + x^2 \quad \text{ó} \quad x^2 - y^2 = a^2$$

si se toma por eje de las x el eje transverso.

Propiedades.— En esta curva se tiene: $c = a\sqrt{2}$, y, por tanto, $a^2 = \frac{c^2}{2}$.

Las ecuaciones de las directrices son:

$$x = \pm \frac{c}{2},$$

es decir, que sus pies están en el punto medio de las distancias focales OF y OF'.

— Una hipérbola equilátera puede ser considerada como la proyección de una hipérbola no equilátera. Así, pues, esta curva hace, con relación á las hipérbolas, el mismo papel que la circunferencia con respecto á la elipse.

— Dos diámetros conjugados cualesquiera, son iguales.

— Siendo a' la longitud común de los diámetros conjugados, la ecuación de esta curva será

$$x^2 - y^2 = a'^2.$$

— Todo radio central es medio proporcional entre los dos radios vectores dirigidos á sus extremos (Chevillard).

— El producto de los radios vectores de un punto de la curva es igual al cuadrado del semidiámetro que pasa por este punto.

— La relación que liga á los coeficientes angulares de dos cuerdas suplementarias será

$$m m' = 1,$$

y los ángulos cuyas tangentes son m y m' son entonces *complementarios*, y, en consecuencia, los diámetros conjugados forman con el eje de las x ángulos complementarios.

— La ecuación de la hipérbola equilátera referida á sus asíntotas, es:

$$x' y' = \frac{a^2}{2}.$$

— Las asíntotas son las bisectrices del ángulo de los ejes, y, por tanto, serán perpendiculares entre sí.

— Todo círculo que pasa por el centro de esta curva y por dos puntos cualesquiera, pasará también por la intersección de las rectas trazadas por cada uno de estos puntos paralelamente á la polar del otro.

— La distancia de un punto cualquiera al centro, es media proporcional entre las distancias de este punto á los focos.

— La altura de un triángulo rectángulo inscrito en una hipérbola equilátera es tangente á la curva.

— El punto de concurso de las alturas de un triángulo que le sea inscrito está sobre la curva.

— Si se inscribe un triángulo rectángulo en esta curva, la hipotenusa es paralela á la normal en el vértice del ángulo recto.

— Si en los puntos en que los lados de un triángulo inscrito encuentran á la asíntota se levantan perpendiculares á estos lados, estas líneas concurren en un solo punto.

Construcción de la curva.—Construir una hipérbola equilátera, conociendo una asíntota y dos puntos. Sea AB (fig. 10) la asíntota dada; M y N los puntos dados; tracemos MN que encontrará á la asíntota en P; el punto P' se tomará de tal manera que $NP' = MP$; éste es un punto de la segunda asíntota. $P'X$, perpendicular á AB, es la segunda asíntota, y O es el centro de la curva. Ahora el problema queda reducido al de construir una hipérbola conociendo las asíntotas y un punto.

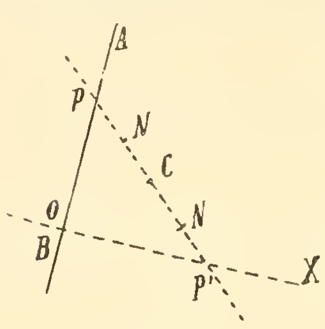


Figura 10.

Aplicaciones. — Además de las importantes propiedades que esta curva tiene y que, por consiguiente, la hacen ocupar un lugar preferente en las cuestiones geométricas, las funciones á ella referentes se presentan en muchas cuestiones de Física y de Astronomía y son de una grande aplicación numérica y fácil, gracias á los trabajos de Gudermann sobre las *funciones potenciales*, nombre que este autor ha dado á las líneas trigonométricas circulares é hiperbólicas.

— Entre las hipérbolas equiláteras que han recibido denominación especial tenemos también las siguientes:

Hipérbola de Apolonio.— La que pasa por los puntos de incidencia de las normales trazadas desde un punto (α, β) á una elipse. Su ecuación es:

$$c^2 xy = a^2 \alpha y - b^2 \beta x.$$

Sus asíntotas son paralelas á los ejes de la elipse.

Ver. Duhamel, *Element de Calcul infinit.*

Hipérbola de Fenerbach.— Su centro es el punto de contacto del

circulo inscrito con el círculo de nueve puntos ó circulo de Fenerbach, de aquí su nombre dado por H. Mandart y J. Neuberg.

Su ecuación en coordenadas baricéntricas es:

$$\Sigma a\,(b - c)\,(p - a)\,6\gamma = 0$$

Ver, E. Lemoine, *Associatión française pour l'avancement des Sciences*, 1889.

Hipérbola de Jerabek. — Es la hipérbola equilátera transformada por rectas simétricas de la recta de Euler.

Su ecuación en coordenadas baricéntricas es:

$$\Sigma\,(b^2 - c^2)\,6\gamma\,\text{sen.}\,2\lambda = 0.$$

Ver *Journal de Mathématiques Speciales*, 1889, pág. 83.

Hipérbola de n *puntos.*— Son las asociadas al triángulo y pasan por 6, 9 ó más puntos del plano.

Ver *Journal de Mathématiques Speciales*, 1885, H. Brocard.

Hipérbola equilátera esférica.—Mr. Strebor define esta curva diciendo que es el lugar geométrico del vértice de un triángulo esférico cuya base es dada y en que la diferencia de los ángulos en la base es constante.

Se distinguen las hipérbolas equiláteras esféricas de *primera* y *segunda* especie:

Primera especie.— Una elipse esférica cuyos semi-ejes son a y b están ligados por la relación

$$\text{sen}\,.\,a = \text{tg}\,.\,b,$$

considerada con relación al centro exterior situado sobre la prolongación de su eje mayor $2a$, tiene analogias con la hipérbola equilátera. Llamando á la esfero-cónica que se obtiene *hipérbola equilátera esférica de primera especie*, se tendrán los teoremas siguientes, que ponen de manifiesto la justicia de esta denominación.

— El complemento α de a es evidentemente análogo al semi-eje real de la hipérbola.

— Se sabe que en una hipérbola equilátera el radio central de cada punto de la curva es medio proporcional entre los dos radios vectores de este punto. Pues, semejantemente, en la hipérbola equilátera esférica, si se dirigen dos arcos de circulo máximos desde los focos contiguos de las ramas opuestas á un punto cualquiera tomado sobre la curva, el producto de las tangentes trigonométricas de los semi-

arcos, será igual al cuadrado de la tangente del semi-arco trazado desde el centro á este punto.

— En una hipérbola equilátera la distancia del centro á una tangente cualquiera, multiplicada por la distancia del centro al punto de contacto correspondiente, nos da un producto constante igual al cuadrado del semi-eje de la curva. Pues, semejantemente, en una hipérbola equilátera esférica, si se designa por w el arco dirigido desde el centro, perpendicularmente al círculo máximo tangente al extremo de un arco vector cualquiera, ρ, trazado desde el centro, se tiene:

$$\text{sen} \, . \, w \, . \, \text{tg} \, . \, \rho = \text{sen} \, . \, a \, . \, \text{tg} \, . \, \alpha.$$

— Los arcos de una hipérbola equilátera esférica de primera especie, que tienen por diferencia un arco de círculo máximo, responden á dos arcos iguales sobre la esferolemniscata de primera especie que deriva de la hipérbola.

Segunda especie.—Existe una segunda analogía sobre la esfera con la hipérbola equilátera, á saber: una elipse esférica cuyo eje menor sea $\frac{1}{2}\pi$, referida al centro exterior, situado sobre la prolongación del eje mayor. Esta cónica se llama *hipérbola equilátera esférica de segunda especie.*

— Su ecuación polar central es:

$$\text{tg}^2 \rho \, . \, \cos \, . \, 2w = \text{tg}^2 \alpha,$$

designando por w el arco dirigido desde el centro perpendicularmente al círculo máximo tangente al extremo de un arco vector cualquiera, (ρ), trazado desde el centro, se tendrá:

$$\text{tg} \, . \, w \, . \, \text{tg} \, . \, \rho = \text{tg}^2 \alpha.$$

— En una hipérbola equilátera plana, si se dirigen por el foco dos cuerdas mutuamente en ángulos rectos, una de ellas limitada en los lados de una de las ramas de la curva, será igual á la otra comprendida entre las dos ramas opuestas. Pues, semejantemente, en una hipérbola equilátera esférica de segunda especie, si se trazan por el foco dos arcos de círculos máximos mutuamente en ángulos rectos, terminando uno de ellos de un lado á otro de la misma rama de la cónica, será igual á la porción del otro comprendido entre las dos ramas opuestas. Esta propiedad se puede enunciar del modo si-

guiente: En una elipse esférica cuyo eje menor valga $\frac{1}{2}\pi$, si se dirigen por el foco dos cuerdas (arcos de círculos máximos) mutuamente formando ángulos rectos, su suma será constante é igual á π.

Hipérbola logarítmica ó hipercónica.— Es una cáustica alabeada intersección de un paraboloide de revolución,

$$x^2 + y^2 = 2m^2,$$

con un cilindro hiperbólico,

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Si el cilindro es elíptico se tiene la elipse logarítmica.

J. Booth, *Philosophical Transaction of the. R. S. of London for.*, 1852, 2.ª parte, pág. 31.

Hipérbolas focales.—Los focos de las curvas de segundo orden son dados por la intersección de dos hipérbolas equiláteras que han recibido el nombre de *hipérbolas focales.*

— Entre otras, estas hipérbolas gozan de las propiedades siguientes:

— Las dos hipérbolas focales tienen por centro común el centro de la cónica considerada.

— Las asíntotas de estas curvas son, respectivamente, dos paralelas á los ejes de coordenadas y dos paralelas á las bisectrices de estos ejes.

— Estas hipérbolas tienen dos puntos comunes reales simétricos con relación al centro de la cónica dada, y otros dos puntos comunes imaginarios.

Hipérbolas homofocales.—El lugar geométrico de los centros de circunferencias tangentes á dos fijas, son dos hipérbolas homofocales.

— La diferencia de sus radios vectores es $R_o \pm R_w$.

— Los focos coinciden con los centros de las circunferencias.

— Radios de puntos inversos ó antihomólogos describen en sus intersecciones una hipérbola.

Hipérbolas homotéticas.—Dos hipérbolas homotéticas tienen sus diámetros paralelos y proporcionales.

Hipérbola parabólica.—Se ha dado este nombre al lugar representado por la ecuación

$$y^2 = \frac{x^2 - x}{x + 1}.$$

Hipérbola redundante.—Este nombre se aplica al lugar correspondiente á la ecuación

$$y^2x - x^3 + 2x^2 + x - 2 = 0.$$

Hipérbola de Hawksbée.

Definición.—Se da este nombre á la curva que afecta la superficie de un líquido al ascender entre dos láminas planas, cuya intersección es vertical y forman un ángulo muy pequeño.

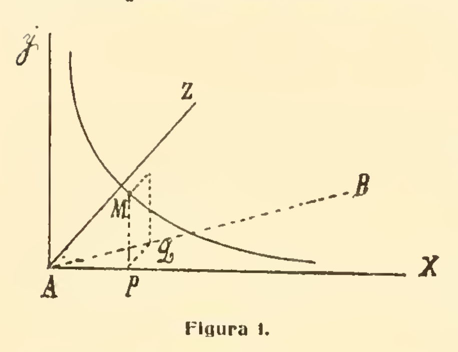


Figura 1.

Historia.—La experiencia que conduce á la determinación de esta curva es debida á Taylor, *Transactions philosophiques*, 1712, y repetida por Hawksbée, al que se le atribuye ordinariamente. Poggendorff, *Geschichte der Physik*.

Ecuación.—Consideremos un punto, P (fig. 1), en la base de una de las láminas, situado á una distancia $AP = x$ de la intersección. La distancia PQ de las dos láminas en este punto es:

$$x \operatorname{tg} . \beta.$$

Si se admite que la altura del líquido en MP es la misma que entre dos láminas paralelas, situadas á la distancia PQ, ó sea, si se desecha la curvatura del menisco paralelamente á las láminas, con relación á su curvatura perpendicularmente al plano de las láminas, tendrá por valor

$$y = -\frac{2A \cos . \alpha}{\rho . g x \operatorname{tg} \beta};$$

es decir, que entre la altura y y la distancia x al vértice del ángulo de las dos láminas, existe la relación

$$xy = \frac{2A \cos . \alpha}{\rho g . \operatorname{tg} \beta},$$

que es la ecuación de una hipérbola equilátera cuyos ejes son los mismos señalados.

— Esta curva se obtiene experimentalmente con una gran regularidad.

Hiperboliformes.

Curvas cuya ecuación es

$$y^m x^n = 1 ,$$

á las que dió nombre M. Barrow.

Hipocicloide.

Nombre con que se designa á la epicicloide interior. (Ver *Epicicloide.)*

Propiedades.—Esta línea se puede también obtener por medio de una curva general de tercera clase y de cuarto orden, tomando por tangente doble la recta del infinito y para puntos de contacto de esta última los puntos circulares imaginarios.

— Dos tangentes á la hipocicloide, tales que sus puntos de contacto estén situados sobre una tercera tangente, son perpendiculares entre sí, y sus puntos de encuentro describen un círculo que, unido á la recta del infinito, forman la caylcniana de la hipocicloide.

Se puede consultar *Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements (Journal de Crelle,* t. LXIV), y Durége, *Math. Annalen* (t. I, pág. 509).

Hipotrocoide.

Definición.—Curva trocoide (ver esta voz), en el caso particular de que las líneas que la engendran son interiores; es decir, cuando la rotativa gira por dentro de la base.

Hojas geométricas.

Nombre dado á curvas que afectan la forma de las hojas de los vegetales ó las de las líneas que se marcan en algunas flores ó frutos.

Los estudios sobre las analogías de estas curvas con otras geométricas fué propuesto por los redactores de los *Ann. Math.*, 1860, y tratadas luego por Gino Loria, *Congres de Zurich*, 1897, que las denominó *curvas botánicas*

Homográficas.

Definición.—Dos líneas están ligadas entre sí por la ley general de *homografía*, cuando el medio de transformación que sirve para pasar de la una á la otra es tal, que si tres puntos de la una están en línea recta, los puntos correspondientes de la otra lo estarán también, y recíprocamente.

Historia.—La teoría de la *homografía* se debe á Mr. Chasles *(Aperçu historique sur l'origine et le developpement des methodes en Géométrie)*, al objeto de generalizar los trabajos de Mr. Poncelet *(Traité des propietés projectives des figures)* sobre la homología, de la que es un caso particular. Se pueden consultar sobre esta teoría las obras *Vorlesungen ans der analytisehen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises; Vier Vorlesungen ans der analytischen Geometrie*, von Dr. Otto Hesse; *Vorlesungen über synthetische Géometrie*, J. Steiner; *Traité de Géométrie superieure*, Chasles, etc.

Relaciones entre líneas homográficas.—Consideremos una figura homográfica referida á dos ejes OX y OY. Sea $M(X,\ Y)$ un punto de esta figura y $m(x,\ y)$ otro punto del plano que debe corresponder al primero en la figura homográfica. Hagamos

$$X = \frac{ax + by + c}{a_2x + b_2y + c_2}; \quad Y = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \qquad (1)$$

$a,\ b,\ c,\ a_1\ b_1 \ldots.$ siendo coeficientes constantes.

Una recta de la figura dada representada por

$$pX + qY + r = 0$$

tendrá por recta, correspondiente en la segunda, la de la ecuación

$$p(ax + by + c) + q(a_1x + b_1y + c_1) + r(a_2x + b_2y + c_2) = 0,$$

y es evidente que tres puntos de la primera figura $(X_1,\ Y_1)$, $(X_2,\ Y_2)$, $(X_3,\ Y_3)$, estando sobre una misma recta, D, los puntos correspondientes en la segunda $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$, $(x_3,\ y_3)$, estarán también sobre una misma recta d. Además, si tres rectas,

$$pX + qY + r = 0, \quad p'X + q'Y + r' = 0, \quad p''X + q''Y + r'' = 0,$$

de la figura dada, pasan por un mismo punto, se pueden encontrar tres constantes, K, K', K'', de modo que se tenga la identidad

$$K(pX + qY + r) + K'(p'X + q'Y + r') + K''(p''X + q''Y + r'') = 0,$$

y reemplazando X, Y, por sus valores obtenidos de las relaciones (1), esta identidad expresa que las rectas correspondientes en la figura derivada pasan también por el mismo punto. De donde resulta que toda figura construída por medio de las fórmulas (1) es *homográfica* con la propuesta; su posición y forma dependerán de los valores atribuídos á las constantes a, b, c.....

—Recíprocamente, cuando dos figuras son homográficas, existe entre las coordenadas X, Y, de un punto de una de ellas, y las coordenadas x, y, de un punto homólogo de la otra, relaciones de la forma (1).

— Los puntos situados en el infinito en la primera figura tienen, por homólogos en la segunda, los puntos de la recta representados por la ecuación

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0, \qquad (2)$$

de modo que las rectas de la figura derivada que corresponden á rectas paralelas de la figura dada, vienen á encontrarse sobre esta recta (2).

— Dos figuras homográficas pueden tener puntos que se corresponden asimismo. Para que así sea se debe tener $X = x$, $Y = y$, y las ecuaciones (1) serán:

$$x(a_2x + b_2y + c_2) = ax + by + c$$
$$y(a_2x + b_2y + c_2) = a_1x + b_1y + c_1$$

ecuaciones que son de segundo grado y representan dos hipérbolas que tienen cada una dos asíntotas paralelas á la recta (2). De donde resulta que estas dos curvas no pueden encontrarse más que en tres puntos situados á una distancia finita y no existen sino tres puntos que coincidan con sus homólogos en las dos figuras; estos tres puntos se llaman *puntos dobles*.

— Si tenemos dos figuras homográficas y representamos por

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0$$

las ecuaciones de tres puntos de la primera figura, y por

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0$$

la de los puntos correspondientes de la segunda; si referimos las figuras respectivamente á los triángulos ABC y $\alpha\beta\gamma$, las fórmulas de la transformación homográfica, en coordenadas tangenciales, será:

$$\frac{A}{m\alpha} = \frac{B}{n\beta} = \frac{c}{\gamma}, \qquad (3)$$

puesto que los puntos $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$ deberán corresponderse respectivamente con los puntos $A=0$, $B=0$ y $C=0$. Las constantes m y n se determinan haciendo corresponder otros dos puntos en las figuras.

— Si las ecuaciones anteriores representan dos rectas correspondientes, las fórmulas (3) serán las de la transformación homográfica en coordenados triangulares. Los coeficientes m y n permitirán hacer corresponder una cuarta recta de la segunda figura á una cuarta recta de la primera.

Propiedades.—Las fórmulas (1) y (3) ponen de manifiesto que la transformación homográfica no cambia el grado de las líneas.

— La curva homográfica de un círculo será, en general, una sección cónica.

— Las cuerdas, tangentes, etc., de una curva, serán, después de la transformación, homográficas, cuerdas, tangentes, etc., á la curva transformada.

— En dos figuras homográficas, la relación anarmónica de cuatro puntos en línea recta, es igual á la de los cuatro puntos correspondientes.

— En dos figuras homográficas, la relación anarmónica de cuatro rectas, que parten de un mismo punto, es igual á la de las cuatro rectas correspondientes.

Aplicaciones.—Por medio de estas relaciones, todas las propiedades descriptivas del círculo y sus propiedades métricas que no dependen sino de relaciones anarmónicas, se extienden á las secciones cónicas. Igualmente, la homografía sirve para generalizar las propiedades de la extensión, pasando de un caso particular de una proposición á la proposición general.

Homológicas.

Definición.— Se da este nombre á las líneas tales que sus puntos correspondientes están dos á dos sobre rectas que concurren en un solo punto, y las rectas que unen dos puntos de la una y los dos

puntos correspondientes de la otra se cortan sobre una misma línea recta.

Historia.—El primero que sentó la teoría de las figuras homológicas ha sido Mr. Poncelet, *Traité des propietés projectives des figures*, y Mr. Chasles se ocupó también de estas líneas en la Memoria que publicó á continuación de su obra *Aperçu historique sur l'origine et le developpement des méthodes en Géométrie.*

Denominaciones particulares.—El punto único en el cual concurren las rectas que unen dos puntos homólogos cualesquiera de dos figuras homológicas es el *centro* de homología, y la recta fija en que se encuentran las rectas homólogas se denomina *eje* de homología de las dos figuras.

Relaciones entre líneas homológicas.—Consideremos una figura cualquiera, referida á dos ejes: OX, OY; sean X, Y las coordenadas de uno de sus puntos y x_0, y_0 las de un punto fijo del plano. Si se representan por x, y las coordenadas de un punto homólogo del primero, toda línea construída por medio de las fórmulas

$$\frac{X - x_0}{x - x_0} = \frac{Y - y_0}{y - y_0} = \frac{1}{lx + my + n} \qquad (1)$$

será homológica con la propuesta.

En efecto: de aquí se deduce

$$\frac{Y - y_0}{X - x_0} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

y dos puntos homólogos cualesquiera (XY), (x, y), están en línea recta con el punto (x_0, y_0). Además, á toda recta de la figura dada representada por

$$pX + qY + r = 0 \quad ó \quad p(X - x_0) + q(Y - y_0) + px_0 + qy_0 + r = 0$$

corresponde una recta que tiene por ecuación

$$p(x - x_0) + q(y - y_0) + (px_0 + qy_0 + r)(lx + my + n) = 0,$$

y se ve desde luego que el punto de intersección de estas rectas se encuentra sobre la recta fija

$$lx + my + n - 1 = 0 \qquad (2)$$

La segunda figura es, por tanto, homológica con la propuesta; el punto (x_0, y_0) es el centro, y la recta (2), el eje de homología.

— Recíprocamente, dadas dos líneas homológicas, las coordenadas de dos puntos homólogos (X, Y), (x, y) están ligados por relaciones de la forma (1).

En efecto: por encontrarse estos puntos en línea recta con el centro de homología (x_0, y_0) se deberá tener:

$$\frac{Y-y_0}{X-x_0}=\frac{y-y_0}{x-x_0}; \quad \text{de donde} \quad \frac{X-x_0}{x-x_0}=\frac{Y-y_0}{y-y_0},$$

y como á una recta de una de las figuras corresponde una recta en la segunda, cada una de estas relaciones debe ser igual á una fracción cuyo numerador es una constante ó la unidad, y el denominador, una función de primer grado en x é y.

— Cuando el centro de homología coincide con el origen de las coordenadas, las fórmulas (1) se reducen á las

$$\frac{X}{x}=\frac{Y}{y}=\frac{1}{lx+my+n}.$$

— Sean $A=0$, $B=0$ dos rectas que pasan por el centro de homología de las dos figuras, y $A-KB=0$ una recta cualquiera que parte del mismo punto; la recta homográfica correspondiente será (ver *homográficas*)

$$m\alpha+nK\beta=0;$$

pero, en dos figuras homológicas, esta recta debe coincidir con la primera que pasa por el centro de homología; por tanto, $m=n$; las fórmulas de la transformación homológica en coordenadas triangulares no contendrán más que un solo parámetro y serán de la forma

$$\frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\beta}=\frac{C}{m\gamma},$$

siendo $C=0$ la ecuación del eje de homología y A, B, C, y α, β, γ las coordenadas de dos puntos homólogos de las figuras referidas á un mismo triángulo de referencia $ABC=0$.

Se ve inmediatamente que dos rectas homólogas

$$\lambda A+\mu B+\nu C=0 \quad \text{y} \quad \lambda\alpha+\mu\beta+\nu m\gamma=0$$

se cortan sobre el eje.

— De lo expuesto se deduce que dada la ecuación de una curva se puede determinar la de su homológica, conocidos que sean el centro y eje de homología y un punto de la curva pedida en su relación con el correspondiente en la propuesta.

Propiedades.— Los puntos homólogos que pertenecen á dos arcos de curvas dirigidos en el mismo sentido, se dicen *homólogos directos*, y aquellos que lo están en arcos, que tienen sentido diferente, *homólogos inversos*. La misma significación se atribuye para decir, *rectas homólogas directas* y *rectas homólogas inversas*.

— Las rectas homólogas directas son paralelas, mientras que las homólogas inversas concurren sobre el eje.

— Dadas dos curvas homológicas, las tangentes dirigidas desde el centro á una de ellas serán asimismo tangentes á la otra; propiedad que nos da un medio simple de construir el centro de homología de un sistema de curvas de esta clase.

— El eje de hemología será una cuerda común, real ó ideal, de dos curvas homológicas.

— La semejanza de dos curvas es un caso particular de la homología. En efecto: si hacemos en las fórmulas (1) $l = m = 0$, se tendrá:

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{1}{n} = \text{const.}$$

En este caso, las rectas homólogas son paralelas, y el eje de homología está en el infinito.

Trazado.— Para la construcción ó trazado de una curva homológica á otra dada, se pueden considerar diferentes casos. Así, por ejemplo: supongamos que se conoce el centro 0, el eje de homología XX y un punto A' de la segunda curva, correspondiente á un puuto A de la primera, y tratemos de determinar nuevos puntos de la curva homológica de la propuesta; para obtener un punto B' correspondiente á un punto B, se trazará la recta AB, que se prolongará hasta su encuentro en β con el eje XX, se unirá β con A' y el punto de encuentro de $\beta A'$ con $0B$ nos dará el punto B'. De este modo encontraremos cuantos puntos se quieran de la curva segunda hasta determinar su forma.

Para obtener la tangente en B' á la curva segunda, se dirigirá la tangente en B á la primera, la cual, prolongada, cortará en β_1 al eje XX, y uniendo este punto con B', la recta $\beta_1 B'$ será la tangente pedida.

Los puntos de intersección de la curva segunda con una recta dada

se obtendrán construyendo la homóloga de esta recta, la cual cortará á la curva dada en ciertos puntos; los radios dirigidos desde estos puntos al centro cortarán la recta dada en los puntos pedidos.

— Se puede también construir una curva homológica á otra dada, suponiendo que se nos dan dos puntos cualesquiera de la segunda curva como debiendo ser homólogos de dos puntos dados de la primera, y esto nos permitirá construir el centro y un punto del eje; después un tercer punto de la segunda curva nos hará conocer su homólogo de la primera, y por consiguiente, otro punto del eje, y estaremos en el caso anterior.

— Si se nos dieran dos rectas homólogas de otras dos, podríamos construir el eje, y una recta que pasara por el centro, después dos puntos homólogos, lo que nos daría una recta que pasara por el centro, etc.

Aplicaciones.— Como quiera que la transformación homológica no cambia el grado de una curva, y en general, un círculo se cambia en una sección cónica, se puede, como en la homografía, generalizar una propiedad de una figura y deducir diferentes propiedades de las secciones cónicas, de aquellas del círculo.

Homotéticas.

Definiciones.— Si consideramos una curva, AB (fig. 1), y un punto, O, situado en su plano, uniendo este punto O á uno cualesquiera M de la curva, y tomando otro M' tal que $\frac{OM}{OM'} = K$; siendo K una cantidad constante; cuando el punto M describa la curva AB el M' describirá la $A'B'$, que se llama *homotética* de la AB.

—La constante K se llama *razón de homotesia*, y si es positiva la homotesia se dice *directa*; si negativa, *inversa*.

—Al punto fijo O se llama *polo* ó *centro de homotesia*, y á los puntos M y M', *homólogos* ó *correspondientes*.

Figura 1.

Ecuación.— Sean O y O' los dos polos dados (fig. 2).

Tomemos uno de ellos, el punto O, por origen de coordenadas, y llamemos α y β las coordenadas del punto O'. Sean m y M dos puntos homólogos; las rectas Om y $O'M$ serán paralelas, y siendo K la

razón de homotesia, los triángulos semejantes OmP y $O'MQ$ nos darán las relaciones

$$\frac{X-\alpha}{x}=\frac{Y-\beta}{y}=K,$$

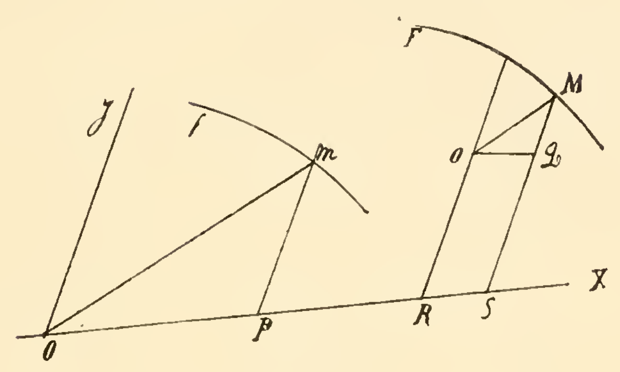


Figura 2.

las cuales serán las fórmulas de transformación. Por tanto, si el punto m describe la curva f, cuya ecuación sea

$$f(x,\, y)=0,$$

el lugar descrito por su homólogo M, ó sea la curva F homotética de la f, tendrá por ecuación

$$f\left(\frac{X-\alpha}{K},\ \frac{Y-\beta}{K}\right)=0,$$

que será, cambiando K, la *ecuación general de las curvas homotéticas de f.*

Propiedades.—Si por los polos O y O' se dirigen dos segmentos rectilíneos en la misma dirección, y si w y w' son las extremidades de estos segmentos; si se tiene $\frac{Ow}{Ow'}=K$, las dos curvas U y V serán homotéticas también con relación á los polos w y w'.

— La recta que une dos puntos homólogos corta la línea de los polos en un punto fijo, cualquiera que sean los puntos considerados; y si se tiene una infinidad de polos, este punto fijo es el mismo para todos. Es el centro de homotesia.

— Las rectas homólogas de dos figuras homotéticas son paralelas y están en la relación de homotesia. Los ángulos planos son iguales.

— Las tangentes y asíntotas á dos curvas homotéticas en los puntos homólogos, son paralelas.

— Los radios de curvatura en puntos homólogos á dos curvas homotéticas, guardan entre si la razón de homotesia.

— Los perímetros de dos líneas correspondientes guardan la relación de homotesia.

— Las áreas de las superficies homólogas en dos líneas homotéticas, están en una relación igual al cuadrado de la razón de homotesia.

— Cuando se transforma una curva por la homotesia, á una curva de la clase n y del orden m corresponde en general otra curva de igual clase y orden.

— Dos curvas homotéticas, C y C', á una tercera, C_1, son homotéticas entre sí y la relación de homotesia es igual á $\frac{K_1}{K}$, siendo K la relación de homotesia de las dos líneas C y C' y K_1 la de las C y C_1. Si las curvas C' y C_1 son directa ó inversamente homotéticas á la curva C, su homotesia es directa; en el caso contrario es inversa. Los tres centros de homotesia están en línea recta.

— Con un solo centro de homotesia, se pueden obtener líneas iguales á todas las homotéticas de una misma curva.

— Para que dos líneas de segundo grado, cuyas asíntotas reales ó imaginarias son paralelas, sean geométricamente homotéticas, es necesario y suficiente:

1.° En el caso que las dos líneas no sean hipérbolas propiamente dichas, que aquéllas sean reales.

2.° Que si las dos líneas son hipérbolas propiamente dichas, los ejes que son paralelos sean de la misma naturaleza.

— Para dos elipses ó dos hipérbolas homotéticas, los ejes son proporcionales.

— Cuando la ecuación de una curva no contiene más que un solo parámetro, p, todas las curvas que representa, variando p, son homotéticas.

Horarias.

Definición.—Reciben el nombre de *líneas horarias* las trazadas en un cuadrante solar, resultado de la intersección de los planos de los círculos horarios con la superficie del cuadrante.

Estas líneas, siempre que los cuadrantes se trazan sobre un plano, son líneas rectas; pero ellas serán curvas cuando, como sucede mu-

chas veces, el cuadrante está trazado sobre una superficie curva cualquiera.

Historia.— El trazado de los cuadrantes solares, ó sea la Gnomómica, es una ciencia práctica que en la antigüedad y en la Edad Media adquirió grande importancia, siendo Anaximandro, sucesor de Tháles, el primero, según Diógene Laerce, que estableció un gnomon en Grecia, y según Herodoto, se debe este arte á un caldeo (que lo transportó á Grecia) nombrado Berose; el primero que se construyó en Roma lo fué por Papirius Cursor (306 a. J. C.). Infinidad de obras se deben á diferentes autores, lo propio que la invención de una porción de aparatos, cuyo objeto era el de determinar la hora, los cuales pueden verse consultando la obra *Traité des horloges solaires des anciens*, de Martini.

Respecto de las líneas horarias, una de las obras especiales, tal vez más antigua, es la *De lineis horariis*, de Maurolicus de Massim (1575), si bien en otras se trata de estas mismas líneas, pero no con el grado de especialidad que en ésta, tales como la de Munster, *Compositio horologiorum in plano muro*, *truncis*, *annulo*, etc. (Bâle, 1531): la de Oronce, *De horologiis solaribus et quadrantibus*, *libri quatuor* (París, 1532); la de Juan Schoner, *Horacii cylindri canones*, primera impresa en Europa sobre estas materias, etc.; siendo la obra de Gravesande, *Essai sur la perspectiva*, publicada en 1707, la en que se determinan las líneas horarias sobre una superficie cualquiera, al resolver el problema de la perspectiva del cuadrante equinoccial sobre un plano cualquiera.

Propiedades.— Los planos de los círculos horarios pasan por los polos del mundo, y si se consideran doce de entre ellos, trazados de manera que dividan al Ecuador en 24 partes iguales, ó sea comprendiendo entre cada dos líneas 15° de dicho círculo, el Sol los iluminará sucesivamente, tardando de uno á otro una hora de tiempo.

— Dispuesto el eje del cuadrante en la dirección del eje del mundo, todos los planos horarios se cruzarán sobre él. El punto del cuadrante en que este eje está fijado, será un punto común á todas las líneas horarias; si el cuadrante es plano, bastará trazar, para obtener cada una de estas líneas, otro punto de ellas, y si el cuadrante está trazado sobre una superficie curva, serán necesarios otros varios puntos, puesto que entonces las líneas horarias serán líneas curvas.

— El trazado de estas líneas forman el objeto de los diferentes tratados de Gnomónica; aquí citaremos, particularmente sobre esta materia, la obra de Lahire, *La gnomonique ó methodes universelles pour tracer des horloges solaires ou cadrans*, *sur toutes sortes des surfa-*

ces (Paris, 1698), en la cual se encuentran teoremas muy notables, que permiten trazar todas las líneas de un cuadrante cuando se conoce un cierto número de ellas, y la obra *Gnomonique graphique et analytique,* de Mr. Mollet, en la cual puede verse el trazado de estas líneas sobre toda clase de superficies incluyendo la esférica, cilíndrica, cónica, elipsoidal y los hiperboloides y paraboloides de revolución, con las ecuaciones de dichas curvas en todos los casos.

Horizontales.

Definición.—Se da este nombre en Topografía á las lineas de nivel (ver esta voz), por ser producidas por la intersección de planos horizontales, con la superficie que representa el relieve ó forma de un terreno.

— El nombre de *horizontales* dado á estas líneas, es más propio que el de curvas de *nivel* con que generalmente se las conoce, y debiéramos aquí ocuparnos de ellas y no en el artículo *nivel;* mas por la razón de la costumbre en darlas este nombre, las describimos en aquel lugar porque será donde se las busque más comúnmente.

Horizonte.

Del griego ὁρίζω lindante.

Definición.— Circulo tangente á la superficie de la tierra y que separa la parte del cielo visible de la invisible.

Clasificación.— El horizonte, tal como lo hemos definido, se llama *sensible*, *aparente* ó *físico*, y se nombra *racional*, *astronómico* ó *verdadero* al que siendo paralelo al anterior pasa por el centro de la tierra y divide, por consiguiente, la esfera en dos partes iguales.

— Se conoce otra especie de horizonte, que se llama *visible* en Geografía; el cual no es otra cosa que la extensión de la tierra ó del mar que se puede distinguir, en todos sentidos, desde un punto de la tierra. Si el punto de observación se eleva á cierta altura, la superficie visible se agrandará, y los rayos visuales tangentes á la superficie terrestre formarán un cono por encima del horizonte; al ángulo que cada uno de estos rayos forma con este plano se llama *depresión del horizonte aparente* ó *depresión aparente.* El horizonte visual será en este caso la curva de contacto de este cono con la superficie de la tierra.

Propiedades.— El horizonte, sea racional ó sensible, se divide en

dos mitades: la una recibe el nombre de *horizonte oriental*, y la otra, de *horizonte occidental;* puesto que la primera está al Oriente y la segunda, al Occidente. Estos dos horizontes están separados el uno del otro por el meridiano.

— Los planos de los horizontes racional y sensible prolongados hasta las estrellas fijas, se pueden considerar como confundidos, puesto que la sola distancia que los separa es el radio de la tierra, el cual puede considerarse como nulo en comparación de la inmensa distancia á las estrellas fijas.

— Se llama *cenit* el punto del cielo más elevado sobre el horizonte que está directamente por encima de nuestra cabeza, y al diametralmente opuesto á éste se denomina *nadir*. Asi, pues, cada punto de la tierra tiene su cenit, nadir y horizonte particular.

— El cenit y el nadir son los polos del horizonte, puesto que están distantes 90° de todos los puntos de su circunferencia. El cenit es el polo superior, el nadir, el polo inferior. La recta que se imagina une el cenit con el nadir, es el eje del horizonte; se llama línea *vertical*.

— El horizonte sirve para determinar la salida y puesta de los astros, y desde él se empiezan á contar los grados de la altura de un astro en su vertical.

— El horizonte se divide en 32 partes iguales que se denominan *rumbos* de los vientos, y al conjunto de estas divisiones, *rosa* de los mismos. El Norte, Sur, Este y Oeste, son los cuatro *puntos cardinales* del horizonte, y distan unos de otros 90°, estando respectivamente determinados por los puntos en que la cortan el meridiano y el ecuador. También se nombran *Septentrión*, *Mediodía*, *Oriente* y *Occidente* á estas cuatro direcciones.

— Sobre este círculo se observan también la amplitud y el azimut de los astros para determinar la variación de la brújula.

Horóptera.

Es una cúbica alabeada (ver esta voz) á la que Ludwig, *Die horopterkurve*, dió este nombre. Su ecuación es

$$x = \frac{2b}{1 + a^2 z^2}, \quad y = \frac{2abz}{1 + a^2 z^2},$$

siendo a y b constantes.

—Su proyección sobre el plano yz es una *anguínea* y sobre el plano xz una *curva de Agnesi*.

Hudde (Curvas de).

Sólo como hecho histórico, sin valor para la ciencia, puesto que nada dice ni significa, señalaremos aquí que Montucla, *Histoire des mathématiques* (1758), manifiesta, al hablar de Juan Hudde, señor de Waweren, matemático holandés, que vivió en Amsterdam á fines del siglo XVII y principios del XVIII, que Mr. Leibnitz le visitó y conversó con él, asegurando *Commencium epistolicum de analysis promota* que le enseñó papeles importantísimos, entre otros, algunos concernientes al problema de «hacer pasar una curva por tantos puntos como se quiera», y que le había dicho, aparentemente, en broma, que él podría determinar la ecuación de una curva que *representara los rasgos característicos de una persona cualquiera.* Todos sus escritos se han perdido, y *esta curva* quedó, como era natural, sin conocerse.

Huella (Línea de).

Definición.— En las escaleras con vueltas, el ancho de la huella de los peldaños se mide por una curva trazada paralelamente á la proyección horizontal del tramo y á 0,48 ó 0,50 de la zanca.

Historia.— El nombre de línea de huella es dado por ser la proyección de la marcha que recorre una persona que sube ó baja apoyada en el pasamanos. Así se la encuentra nombrada en diferentes autores, entre otros, Rebolledo. *Construcción general* (pág. 358).

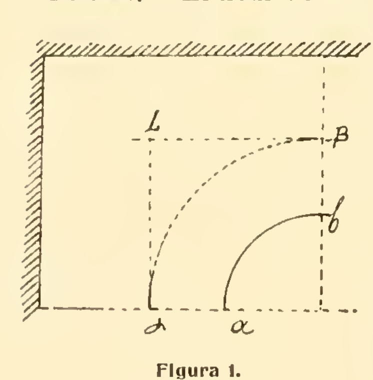


Figura 1.

Puede consultarse el *Traité special de Coupe des pierres*, J. P. Douliot (página 407); *Cours pratique de Coupe des pierres*, H. Hechenoz (Pl. XXXIX-XXXVIII y XL), así como los tratados de Adhemar, Leroy, etc.

Trazado.— Cuando la caja de la escalera es circular, ó sea el caso de la bóveda de San Gil en torre redonda, la línea de huella es una circunferencia cuyo centro coincide con el del nodo ó nabo de la escalera trazada á la distancia indicada de la circunferencia del nodo, en proyección horizontal, siendo una hélice subiendo ó descendiendo por la escalera.

Si la caja de la escalera es rectangular, entonces, á partir de la línea que limita el nodo ó limón de la escalera, se tomarán dos magnitudes $a\alpha$ y $b\beta$ (fig. 1), iguales á 0,48 ó 0,50 centímetros, y se trazarán las líneas $C\alpha$ y $C\beta$ y se inscribirá en ellas una elipse, la cual se toma como línea de huella.

Aplicaciones.— Esta línea se utiliza para el estudio del trazado y compensación de las escaleras. (Ver *compensación.*)

Hyperelípticas.

Definición.— Dase este nombre á aquellas curvas que se las puede asignar un haz de adjuntas C_{n-3} que las cortan en sólo dos puntos móviles, determinando sobre la curva $C_n f(x) = 0$ de $n^{ésimo}$ orden un sistema g_2[1].

Historia.— El nombre dado á estas líneas está fundado en que las integrales hyperelípticas tienen respecto á ellas una significación semejante á la que tienen las integrales elípticas para las curvas del género $p = 1$. Para conocimiento de estas líneas se pueden consultar: Clebsch, *Intégrales abéliennes et connexes* (pág. 65). Cremona, *Sulle trasformazione delle curve iperellipticke (Rendiconti del reale Istituto Lombardo).* (Serie II, T. II, 1869). Abel, *Journal de Crelle* (T. III, 1826), y *Mémoires des Savants étrangers* (T. VII, 1841) para integrales hyperelípticas.

Consideraciones generales.— La transformación de una curva $C_n f(x) = 0$ de género p en la curva normal correspondiente por medio de curvas adjuntas C_{n-3} puede hacerse imposible para valores particulares de sus módulos. (Ver *normales).* Si, en efecto, dos puntos de f tienen entre sí una relación tal que las adjuntas que pasan por un punto cualquiera lo hacen también por aquéllos, asociados al primero, la inversión unideterminativa de sus fórmulas de transformación viene á ser imposible, de modo que las variables x no pueden ser expresadas en función de los variables y de una manera racional, sino sólo por medio de radicales, y la correspondencia, por tanto, deja de ser unideterminativa Además, se sabe que en el empleo de curvas adjuntas C_{n-3} como curvas de transformación, no pueden presentarse irracionalidades superiores á aquellas de radicales de segundo grado. Por consecuencia, en el sistema de puntos de intersección de una curva C_n con una adjunta C_{n-3} no existe más que un solo punto que pueda ser determinado por otro del mismo sistema.

— Como existe un número simplemente infinito de puntos sobre la curva, una curva de esta naturaleza especial ó hyperilíptica está caracterizada por la circunstancia que posee un sistema $g_2^{(1)}$, conforme á la definición que hemos dado.

— Los $p-1$ puntos de intersección de una curva adjunta C_{n-3} quedan determinados por los $p-1$ restantes, y un punto individual cualquiera que forme parte de los primeros, depende de un punto perfectamente determinado que forma parte de los segundos, y recíprocamente. Así, por consiguiente, se pueden tomar $p-2$ puntos arbitrarios; por estos puntos y por los $p-2$ puntos correspondientes se hace pasar un haz de adjuntas C_{n-3}, las cuales determinarán sobre f el sistema $g_2^{(1)}$.

Ejemplo.—Un ejemplo de los hechos que acabamos de indicar nos ofrecen las curvas del *orden* n con punto múltiple del orden $n-2$. En efecto, en este caso, cada adjunta se descompone en $n-3$, rectas que pasan por el punto múltiplo. Una línea móvil y $n-4$, rectas fijas de este haz de radios, representa en conjunto una familia simplemente infinita de curvas, C_{n-3}, que no cortan á f más que en dos puntos móviles.

— Recíprocamente á la proposición anteriormente expresa, se puede decir que toda curva C_n de género p sobre la que existe un sistema especial $g_2^{(1)}$, puede ser transformada unideterminativamente en una curva de $(p+2)^{esimo}$ grado con punto múltiplo del orden p. Esta transformación se efectúa por medio de una familia doblemente infinita de curvas adjuntas C_{n-2}, que pasan por $n+p-4$, puntos fijos de C_n, y encuentran, por consiguiente, á ésta última en $p+2$, puntos móviles.

Determinación de los módulos.—Para hallar los módulos de estas curvas se tendrá en cuenta que un haz de adjuntas C_{n-3} dirigidas por $p-2$, puntos de f, pasarán también por otros, $p-2$, puntos fijos de esta misma curva, y en este haz existirán solamente $2(2+p-1)=2p+2$, curvas tangentes. Ahora bien; como todos los haces constructibles de curvas, C_{n-3}, son aquí equivalentes, las $2p-1$, relaciones anarmónicas de los parámetros de estas curvas de contacto, son independientes de los puntos fijos, y éstos son los $2p-1$, módulos de la curva hyperelíptica.

De aquí se deduce que si una curva del género p posee un sistema especial $g_2^{(1)}$, esto equivale á $p-2$ condiciones.

Si se parte de una curva, por ejemplo del orden $p+2$ con punto múltiplo del orden p, las adjuntas C_{n-3} estarán dadas por los grupos de $p-1$ rectas que pasan por el punto múltiplo, y los módulos serán

las $2p-1$, relaciones anarmónicas de las $2p+2$, tangentes que se pueden dirigir desde el punto múltiplo á la curva.

— Toda curva hyperelíptica se puede transformar en una curva del orden $p+2$, con punto múltiplo del orden p, de tal manera que las tangentes de esta última sean al propio tiempo tangentes de inflexión, de modo que sólo resten $p+2$ tangentes de otra especie. Los puntos de contacto de estas últimas estarán situados en línea recta.

Propiedad.—Las integrales que pertenecen á las curvas hyperelípticas se pueden representar de una manera sencilla, como funciones de un parámetro, por medio de un radical de segundo grado, con sólo la condición de haber con anterioridad referido la curva á la forma normal, es decir, á la forma

$$F(x, y) = y^2 \varphi(x) - \psi(x) = 0.$$

Caso particular.—Una curva de n^{esimo} orden del género $p=2$ es siempre hyperelíptica y puede, por lo tanto, transformarse en una curva de cuarto orden, de punto doble.

El problema de la *trisección*, en este caso, de $p=2$, se puede tratar por medio de estas consideraciones de una manera puramente algebraica, á cuyo fin se pueden consultar los trabajos de Clebsch, *Abhandlungen der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* (T. XIV, 1869); Brioschi, *Annali di Matematica* (Serie 2, T. VII), y otros de relación con estas mismas cuestiones debidos á Cayley, *Quartely Journal*, T. IX, y á Rosenhain, *Mémoires présentés par divers savants*, París, 1851, etc.

I

Igual iluminación

Definición.—Se da el nombre de línea de *igual iluminación* de una superficie cualquiera al lugar geométrico de los puntos de esta superficie que tienen la misma iluminación.

Historia.—La teoría del *claro-oscuro*, en la que desempeña papel importante la línea que nos ocupa, ha sido objeto de cierto número de tratados, principalmente en Alemania, donde mayor predilección ha tenido esta teoría.

La primera obra sobre este particular es la de Tilscher, *Die Lehre der geometrischen Beleuchtungs-constructionen und deren Anwendung auf das tecnische Zeichnen*, Viena, 1862, á las que siguieron la de Riess, *Schattirungskunde* (Stuttgard, 1871), y la de Delabar, *Die Lehre von der Beleuchtung und Schattirung* (Freiburg, 1875), y la de gran importancia para este estudio, *Théorie und Darstellung der Beleuchtung-gesetzmässig gestalteter Flächen* (Leipzig, 1875), de Burmester.

En Francia se han publicado sobre esta cuestión las obras, *Essai sur les lignes d'égale teinte sur les susfaces opaques et mates* (París, 1866), por Breton, y *Théorie des ombres et du lavis* (París, 1875), por Pillet; y en Italia podemos citar, entre otras, la de G. B. Berti, *Delle ombre e del chiaro-scuro in architettura geometrica* (Mantova, 1841), y *La Teoria delle ombre e del chiaro-scuro*, de Tessari (Roma, 1883), etc.

También se puede consultar la Memoria de Tessari, *Sopra la determinazione geometrica delle linee di uguale illuminazione nelle superficie.—(Annali del R. Museo Industriale Italiano*, año II, 1871, página 46).

Determinación.—La determinación de una línea de igual iluminación se reduce al problema de determinar el lugar geométrico de to-

dos los puntos de una superficie para los cuales el plano tangente correspondiente forma un ángulo constante con la dirección del rayo luminoso.

Supongamos sea *abc* (fig. 1) la línea de igual iluminación de una superficie *S* iluminada por rayos paralelos á la dirección *L;* todos los planos tangentes á *S* en los puntos de la línea *abc* tendrán la misma inclinación con respecto al rayo luminoso *L* y formarán una superficie cónica envolvente de la superficie cuya curva de contacto será la línea *abc;* de consiguiente, «una línea de igual

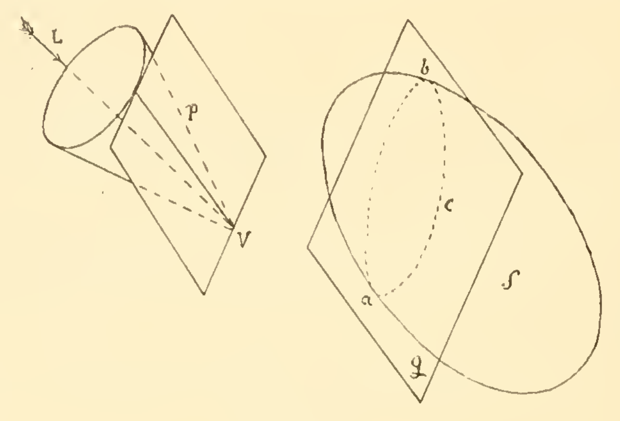


Figura 1.

iluminación de una superficie es la línea de contacto de la envolvente tangente á la superficie, de constante inclinación respecto al rayo luminoso».

Ahora bien; si se imaginan transportados paralelamente asimismo todos los planos tangentes á la superficie *S* en la llnea *abc* á un punto *V* cualquiera, se formará un cono de revolución de eje paralelo al rayo luminoso, y este cono tendrá la propiedad de estar igualmente iluminado, por lo que se llama *cono de uniforme iluminación;* y recíprocamente, si se traza una recta que forme un ángulo dado, *w*, con el rayo luminoso y se toma como generatriz de un cono de revolución cuyo eje sea este rayo, se tendrá un cono de uniforme iluminación correspondiente á la fórmula $i = sen. w$, y consideraciones sencillísimas nos conducen á poder decir que «una línea de igual iluminación sobre una superficie es el lugar geométrico de los puntos de contacto de los planos tangenciales á la misma, respectivamente paralelos á los del cono de uniforme iluminación.»

— La Geometria descriptiva con sus procedimientos nos da medios

suficientes para resolver el problema de encontrar la línea de igual iluminación en cualquier clase de superficie ó cuerpo.

Casos particulares.—La línea de igual iluminación de una superficie desarrollable se compone de un determinado número de sus generatrices rectilíneas; así tiene lugar, por ejemplo, en el cilindro.

— La línea de igual iluminación en un cono es la generatriz de contacto del plano tangente común al cono propuesto y al de uniforme iluminación, cuyo vértice coincide con el del cono dado.

— La línea de igual iluminación en una esfera es un círculo cuyo plano es perpendicular á la dirección del rayo luminoso.

— En la superficie de revolución dicha línea es simétrica respecto al plano meridiano paralelo al rayo luminoso.

— En Física se distinguen las líneas de igual iluminación con el nombre de *isófotas*.

Igual pendiente.

Definición.—Se da este nombre á la curva que sobre un plano topográfico corta todas las curvas de nivel en puntos sucesivamente equidistantes.

Aplicaciones.—Estas líneas se tienen á veces en cuenta para el trazado de los caminos ó canales.

— Pueden ser consultadas, entre otras obras, las siguientes: *Leçons sur les plans cotés*, de Mr. Bardin; *Mémoire* de Mr. Noizet en *Memorial du génie* (1823); el *Cours de routes et ponts*, de Mr. Mary, y tratados de *Geometría descriptiva*, entre ellos el de Mr. de la Gournerie, etc.

Igual probabilidad.

Definición.—Reciben este nombre aquellas curvas que reúnen sobre un blanco todos los puntos que tienen la misma probabilidad de acierto al tirar sobre él.

Historia.—Mr. Didion ha sido el que ha aplicado el cálculo de las probabilidades al tiro de las armas de fuego y al cual se debe el estudio y denominación de estas curvas, *Calcul des probabilités, appliquées au tir des projectiles.* Poisson se ocupa, en el *Mémorial d'artillerie* (1830, vol. III), de las *Formules de probabilité relatives au resultat moyen des observations*, y en su Memoria *Sur la probabilité du tir à la cible*, inserta en el vol. IV, 1837; y asimismo se pueden citar, entre otras, las obras siguientes: *Théorie des chances*, por Mr. Cournot;

Mémoire sur la probabilité du tir des projectiles de l'artillerie navale, por Mr. Helie; *Théorie analytique des probabilités*, por Laplace (cap. IV); el *Calcul des probabilités*, por Mr. Liagre (pág. 114), etc.

Respecto á cuál fuese el primer tratado sobre cálculo de probabilidades, diremos que fué el debido á Huyghens y titulado *De ratiociniis in ludo aleæ*, superándole en utilidad pública el *Mensura sortis*, publicado por Moivre en 1711, y reimpreso, muy ampliado y mejorado, en 1716 con este otro título: *The Doctrine of Chances;* después del cual aparecieron otros muchos aplicados al estudio de diferentes cuestiones, por ejemplo, á la duración de la vida, por Hudde y Witt, en Holanda, y Halley, en Inglaterra. En 1713, Jacques Bernouilli publicó la obra *Ars conjectandi*, y más tarde, Montmort, la titulada *Essai sur les jeux de hasard*, y siguiendo otros muchos trabajos debidos á Deparcieux, Kersseboom, Wargentin, Dupré de Saint-Maur, Simpson, Sussmilch, Price, Davillard, etc., sobre nacimientos, población, matrimonios, etc.

Consideraciones generales.—Para dar una idea de estas especies de curvas, es necesario tener á la vista algunas particularidades referentes á estas cuestiones.

Si se disparan varios tiros sobre un mismo punto ú objeto, aun cuando todas las circunstancias sean idénticas, no se da siempre en el mismo lugar, y si se examinan los distintos blancos hechos, se encuentran puntos que están desigualmente colocados los unos respecto de los otros, sin que, al parecer, se vea respondan á ninguna ley de distribución. Sin embargo, aumentando el número de disparos se advierten á manera de agrupaciones de los puntos de los blancos alrededor de uno de ellos, que se llama *punto de blanco medio*.

Supongamos que se trazan sobre el lugar en que se dispara dos ejes rectangulares, el uno vertical y horizontal el otro, y que se miden las coordenadas de los distintos blancos con relación á estos dos ejes; sea X la media de las abscisas tomadas con su signo, é Y la media de las ordenadas, de modo que si llamamos x é y las coordenadas de un blanco cualquiera y n el número de estos puntos, se tendrá:

$$X = \frac{\Sigma x}{n} \quad \text{é} \quad Y = \frac{\Sigma y}{n},$$

tomando X é Y con sus signos, ellas serán las coordenadas del *punto de blanco medio*, y representarán los desvíos medios horizontal y vertical de los distintos blancos.

Se llama *desvío medio absoluto* la expresión $\frac{\Sigma\delta}{n}$, siendo δ la distancia del punto de mira de uno de los blancos, y se extiende á todos estos puntos.

— La desviación tiene por valor la distancia del punto del blanco medio al centro de mira ó al origen de coordenadas, y llamándola D, será:

$$D = \sqrt{X^2 + Y^2},$$

y su dirección estará dada por el ángulo que forma con la horizontal la recta que va desde el origen al blanco medio; llamando i este ángulo, será:

$$\operatorname{tg} i = \frac{Y}{X}.$$

La suma de los cuadrados de los desvíos horizontales ó de los verticales con relación al blanco medio es un mínimo, y, por consiguiente, la curva de los cuadrados de los desvíos absolutos de los diferentes puntos del blanco real es un mínimo con relación al punto de blanco medio.

— En Francia se adopta la expresión de *medio desvío cuadrático*, ó simplemente *medio desvío*, para designar la raíz cuadrada de la media de los cuadrados de los desvíos. Si se trata de desvíos en el sentido horizontal, tendremos para el *medio desvío horizontal:*

$$m = \sqrt{\frac{\Sigma e^2}{n}}, \qquad (1)$$

siendo $e = x - a$, en la cual a es la abscisa del punto determinado del blanco, y x, la del punto del desvío, ó sea $e =$ desvío horizontal del punto x relativo al punto a.

Para los desvíos verticales, será el *medio desvío vertical*,

$$m' = \sqrt{\frac{\Sigma e'^2}{n}}, \qquad (2)$$

siendo $e' =$ al desvío vertical del punto y, relativo al punto a.

Y, por último, para los desvíos absolutos, tendremos para el *medio desvío absoluto*,

$$M = \sqrt{\frac{\Sigma \varepsilon^2}{n}},$$

siendo $\varepsilon =$ desvío absoluto del punto (x, y) relativo al punto a.

Al objeto de no confundir estas diferentes cantidades con los desvíos medios de que antes se habló, los alemanes le han dado el nombre de *errores medios* (mittlere Fehler).

— Con estos datos, Laplace, en su obra ya citada *Théorie analytique des probabilités*, ha hecho ver que, siendo n muy grande, la probabilidad buscada depende del valor del medio desvío y se tiene una cierta probabilidad p, para que el desvío de una nueva observación, tomada en el sentido horizontal con relación al blanco medio, sea en valor absoluto superior á

$$l = \sqrt{\frac{2}{n}}\,\alpha m,$$

siendo α un coeficiente numérico, del que depende la probabilidad p. La fórmula debida á Laplace es la siguiente:

$$p = \varphi(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\alpha e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

en la que e representa la base del sistema de logaritmos neperianos, n y m son dadas por la ecuación (1).

Si se trata de desvíos verticales, se aplicará una fórmula semejante y m' será dado por la fórmula (2). Y se tendrá, del propio modo, otra fórmula también semejante para la probabilidad del desvío absoluto.

— Kramp, al final de su obra *Analyse des refractions astronomiques*, ha dado una tabla de los valores numéricos de la integral

$$\int_\alpha^x e^{-\alpha^2} d\alpha = \psi(\alpha),$$

de donde se deduce fácilmente el valor de p, correspondiente á un valor de α, pues se tiene

$$\int_0^\alpha e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \int_\alpha^x e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

y, por tanto,

$$p = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \psi(\alpha).$$

MM. Cournot y Didion han calculado los valores de p para distin-

tos valores de α; el primero, en su obra *Théorie des Chances*, y el segundo, en la titulada *Calcul des probabilités, appliquée au tir des projectiles.*

Ecuación de la curva.—Expuestas estas consideraciones, supongamos una banda rectilínea en el blanco paralela á uno de los ejes coordenados; por ejemplo, el de las y. Propongámonos encontrar la probabilidad de acierto, conociendo la posición del punto de blanco medio correspondiente á un número de tiros ó disparos determinados. Esta probabilidad será:

$$p' = \frac{i}{m\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2m^2}},$$

siendo i el espesor de la banda.

Si la banda es horizontal y su espesor i':

$$p'_1 = \frac{i'}{m'\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2m'^2}}.$$

— Para un rectángulo de lados, i, i', y cuyo centro esté á una distancia ρ del punto de blanco medio, y siendo

$$m = m' = \frac{l}{\sqrt{2}},$$

ó sea en el caso de ser iguales las causas de desviación horizontal ó vertical:

$$P = \frac{ii'}{\pi l^2} e^{-\frac{\rho}{l^2}}.$$

Una vez esta fórmula establecida, se puede ya determinar sobre el blanco la ecuación de la curva de los puntos que tienen la misma probabilidad, ó sea la ecuación de la *curva de igual probabilidad.* Basta en esta expresión no suponer $m = m'$, y se tendrá:

$$P' = \frac{ii'}{2\pi m m'} e^{-\left(\frac{x^2}{2m^2} + \frac{y^2}{2m'^2}\right)},$$

en la que P' no cambia, conservando el exponente de e un valor constante tal como $-\frac{R^2}{l^2}$, es decir, con

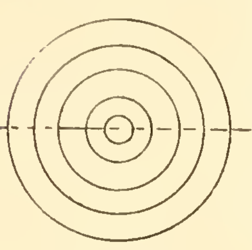
$$\frac{x^2}{2m^2} + \frac{y^2}{2m'^2} = \frac{R^2}{l^2},$$

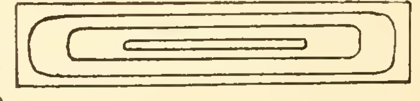
y representará una elipse cuyos ejes son proporcionales á m y m .
— Las curvas *de igual probabilidad* son, pues, elipses cuyos ejes están en la relación $\frac{m}{m'}$.
— Cuando las causas de desviación son iguales según los ejes, estas curvas serán círculos.

Igual velocidad.

Definición.— Se da en Hidráulica el nombre de lineas de *igual velocidad* á los lugares geométricos de los puntos que en la sección de una corriente de agua poseen una misma velocidad.

Historia.— Antes del siglo XVIII se creia que la velocidad del agua en cada punto de la sección de una corriente aumentaba con la profundidad. Pitot, por medio de su tubo hidrométrico, demostró precisamente lo contrario, y Brüuigs, con su tacómetro, creyó reconocer que las velocidades disminuian en una misma vertical, como las ordenadas de una parábola que tenia esta vertical por eje y cuyo vértice estaba en el fondo. Funck creyó que las velocidades sobre una misma vertical decrecian en progresión geométrica, y Dubuat consideró tres especies de velocidades: la mayor en el medio, la más pequeña en el fondo y la media de estas dos; siguiendo luego Prony, Baungarten Raocourt, Desfontaine, etc., haciendo experiencias sobre este mismo objeto.


Figura 1.


Figura 2.

Hoy se considera que la curva que se describe en velocidades (ver esta voz) es la que indica la marcha, ó mejor, la distribución de las velocidades en una misma vertical.

De estos estudios se desprende el de las lineas de una misma ó de igual velocidad, hechos principalmente por Mr. Bazin, *Recherches hydrauliques*, de cuya obra son tomados, entre otros muchos que en ella se estudian, los casos que aquí damos á conocer.

Forma.—Estas líneas afectan formas muy variadas, dependientes de las que tienen los tubos de conducción, ó canales, ríos, etc.

Así, por ejemplo, para tubos circulares (fig. 1), estas líneas son círculos paralelos, y si el tubo es de forma rectangular (fig. 2), ellas vienen también á ser paralelas.



Figura 3.

Para un canal de forma rectangular afectan la forma indicada en la figura 3; si es de forma circular (fig. 4), y en el caso en que las paredes del canal, de esta misma forma, esté compuesta de grava gruesa, la marcada en la figura 5; resultando en este último caso, como se ve en la figura, que la velocidad máxima está más baja que en la superficie, fenómeno que se explica por desórdenes de las velocidades en la indicada superficie, desórdenes indicados por M. Saint-Venant, al analizar la Memoria que Mr. M. Levy presentó á la Academia de Ciencias de París.

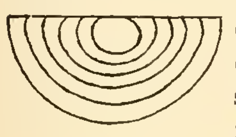


Figura 4.

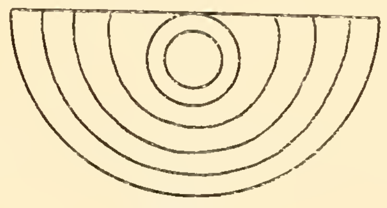


Figura 5.

— Las curvas de igual velocidad con respecto al viento se nombrau *isanémonas*. Ver, *Comptes rendus*, T. 95, los estudios de Brault que les dió este nombre.

Imaginarias.

Definición.— Si en una ecuación $f(x, y) = 0$ se reemplaza x por $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ é y por $\alpha' + \beta'\sqrt{-1}$, y si á una solución (x, y) se hace corresponder un punto del plano, puntos cuyas coordenadas se forman, según las leyes convenientes, de partes reales é imaginarias de x y de y; y, si por otra parte, se asocian unas á otras las soluciones de la ecuación propuesta que cumple una condición escogida de

antemano, «se podrá considerar una ecuación con dos variables, como representando una curva real, más una infinidad de *curvas imaginarias*».

Historia.— El primero de los geómetras que introdujo las magnitudes imaginarias en las especulaciones geométricas fué Monge, no utilizándolas sino como auxiliares de las mismas. Poncelet no llega tampoco á construir las soluciones imaginarias de una ecuación de dos variables, contentándose con señalar que, cuando los puntos de contacto de una recta y una cónica ó de dos cónicas que son necesarias para resolver un problema, llegan á faltar, los puntos de encuentro efectivos de la misma recta con una cónica que él llama *suplementaria* (ver *cónicas suplementarias* y *conjugadas)* de la propuesta, ó de dos cónicas suplementarias de las propuestas, puntos en que las coordenadas reales se ligan, si se quiere, con las imaginarias de los puntos que faltan, pueden formar la base necesaria para la construcción del problema.

Marié considera la solución

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$$
$$y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$$

de la ecuación $f(x, y) = 0$ como representando el punto $x = \alpha + \beta$; $y = \alpha' + \beta'$, y las soluciones que asocia para formar un lugar de los puntos que le corresponden, son aquellas en que $\frac{\beta'}{\beta}$ conserva un valor constante C. Estos lugares son las *conjugadas* (ver esta voz) de la curva real, y la relación variable C, la característica de la conjugada correspondiente.

Indicatriz.

Definicion. — La cónica según la cual una superficie es cortada por un plano paralelo al plano tangente en un punto é infinitamente próximo á él, es la *indicatriz* correspondiente á este punto.

La naturaleza de esta curva nos da á conocer todos los elementos de la curvatura de la superficie considerada en el punto con respecto al cual se traza. De aquí su denominación.

Historia.— A Mr. Dupin se debe la consideración de esta curva, habiéndole dado el nombre con que se la sigue distinguiendo, *Developpements de Géométrie* (1813), y *Essai sur les travaux scientifiques*,

de Gaspard Monge (1819), viniendo así á completar los trabajos de Euler, que dió la primera teoría de la curvatura de las superficies en su obra *Introduction á l'analyse infinitesimale.* También se tiene sobre este particular, entre otros trabajos, los de Olivier, *Journal de L'ecole politecnique* (t. XV, pág. 135), pudiéndose consultar los tratados de *Géométrie Descriptive,* de Marmheim (pág. 302); de Leroy, (pág. 293); de Elizalde (pág. 426), etc., y las obras de Cálculos.

Ecuación.— La ecuación de una superficie cualquiera referida á la normal en uno de sus puntos, tomado por eje de las z, y á un plano tangente en este mismo punto, tomado por plano de las $x\,y$, será

$$z = \frac{1}{2} rx^2 + sxy + \frac{1}{2} ty^2 + w,$$

representando por w una suma de términos cuyo grado, con relación á x y á y, es superior al segundo.

La ecuación de la sección hecha en la superficie por el plano de las xy es:

$$O = \frac{1}{2} rx^2 + sxy + \frac{1}{2} ty^2 + w.$$

Una transformación de los ejes Ox y Oy en su plano, sin cambiar de origen, afectaría separadamente los grupos homogéneos de los términos de esta ecuación; se podrá, por tanto, encontrar en el plano tangente dos direcciones rectangulares tales, que tomándolas para eje de las x y de las y, se pueda hacer desaparecer de la ecuación de la sección, y, por consiguiente, de aquella de la superficie, el término en xy.

Esta última ecuación quedará reducida en este supuesto á la forma

$$z = \frac{1}{2} rx^2 + \frac{1}{2} ty^2 + w.$$

Si ahora se corta la superficie por un plano $z = \alpha$ infinitamente próximo al plano de las xy, es decir, al plano tangente, y se traslada la sección á distancia infinitamente próxima al origen, es decir, al punto de contacto, los puntos de la sección así limitada se podrán considerar como pertenecientes á la curva

$$2\alpha = rx^2 + ty^2,$$

la cual se confunde con la sección en sus primeros elementos y es,

por tanto, la ecuación de la curva que hemos llamado *indicatriz*.

Propiedades.—Conocer esta curva es tener implícitamente todos los elementos de la curvatura de la superficie en el punto considerado. En efecto, los coeficientes r y t de su ecuación representan los valores de las derivadas parciales de segundo orden $\frac{d^2z}{dx^2}$ y $\frac{d^2z}{dy^2}$ de z, con respecto á x y á y, en el origen; derivadas de las cuales dependen exclusivamente las curvaturas en este punto de las secciones normales hechas en la superficie, puesto que la tercera derivada $\frac{d^2z}{dxdy}$ y las dos primeras $\frac{dz}{dx}$ y $\frac{dz}{dy}$ son nulas.

Si representamos por a el arco infinitamente pequeño comprendido entre el punto M considerado en la superficie y aquel en que la sección normal en este punto encuentra á la indicatriz, y por ρ el radio de curvatura de dicha sección normal, se tendrá:

$$\sigma = \rho \, . \, \text{arc} \, . \left(\cos = 1 - \frac{a}{\rho}\right) = \rho \sqrt{\frac{2a}{\rho}};$$

y, por consiguiente,

$$\rho = \frac{\sigma^2}{2a}.$$

Que nos dice que los radios de curvatura de las secciones normales son proporcionales con los cuadrados de los arcos σ de las mismas secciones, contados desde el punto M, hasta su intersección con la indicatriz, ó bien proporcionales, con los cuadrados de los semidiámetros de la indicatriz, que no se diferencian de los arcos correspondientes sino en una cantidad infinitamente pequeña de segundo orden.

— En una palabra; á toda propiedad de los diámetros de una sección cónica corresponde una propiedad de los radios de curvatura de las secciones normales que pasan por los diámetros de la indicatriz.

— La indicatriz está siempre dispuesta simétricamente con relación al punto M, y los valores máximo y mínimo del radio de curvatura corresponden evidentemente á sus diámetros rectangulares.

— Si la indicatriz es una elipse, sus ejes son las trazas sobre el plano tangente de las secciones normales de curvatura máxima ó mínima. Si los diámetos de esta elipse son todos reales, los cuadrados de estos diámetros, con los cuales son proporcionales los radios de cur-

vatura de las secciones normales, son todos positivos; luego las secciones normales tienen todas sus curvaturas vueltas hacia un mismo lado.

— Si la indicatriz es una hipérbola, siendo sus diámetros unos reales y otros imaginarios, sus cuadrados serán unos positivos y otros negativos, y las dos curvaturas principales de la superficie estarán vueltas en sentido contrario; y, en general, entre las diferentes secciones normales, las unas tienen su curvatura vuelta hacia un lado y las otras hacia el lado opuesto. Los radios de curvatura de las secciones normales, conducidos según sus asíntotas, serán infinitos, y la curvatura cambiará de sentido cuando el plano secante, girando alrededor de la normal, traspase una de las asíntotas. El ángulo comprendido entre las asíntotas puede servir para conocer la relación de las dos curvaturas.

— La indicatriz, según la dirección á dar á la sección normal que se quiera estudiar, deberá ser determinada por un plano paralelo al plano tangente, pero dirigido alternativamente de uno y otro lado de este plano tangente. Las dos indicatrices serán dos hipérbolas suplementarias ó conjugadas, y sus ejes reales corresponderán á las secciones de curvatura máxima en el uno y en el otro sentido.

— Si la indicatriz es un círculo, los radios de curvatura de todas las secciones normales son iguales entre sí, y á los puntos de la superficie en que se presenta esta circunstancia se les ha dado el nombre de *umbilicus* ú *ombligo*.

— Si la indicatriz está compuesta de dos rectas paralelas, siendo reales todos sus diámetros, la superficie presenta sus curvaturas dirigidas en un mismo sentido, y es nula en la dirección de dichas rectas, y el radio de curvatura de la sección perpendicular será también nulo.

— De lo expuesto se deduce que las curvas *elípticas* é *hiperbólicas* son las solas curvas indicatrices.

Indicatriz esférica. — Curva formada por la traza sobre una esfera de radio igual á la unidad, de los radios paralelos á las tangentes á una curva alabeada. Esta línea puede ser plana ó alabeada.

— La indicatriz esférica de esta indicatriz encontrada se llama la *segunda indicatriz* de la curva propuesta.

Ver Laurent, *Traité d'Analyse*, T. VII, pág. 71.

— Se dice también *indicatriz* ó *curva del indicador*, la trazada por el lápiz de que se provee al indicador de las máquinas de vapor y sirve para demostrar la presión que obra sobre el émbolo y el adelanto ó retraso de la entrada del flúido en el cilindro, y, por lo tanto, el tra-

bajo efectivo del vapor en éstos. También se dice sencillamente *diagrama* (ver esta voz). *Dic. Mar. Esp.*

Si el cilindro del indicador se pone en comunicación, no con el cilindro de la máquina, sino con la atmósfera, el lápiz traza sobre el papel una horizontal que los mecánicos llaman la *línea atmosférica*.

Infinitesimal.

Definición.— Se da el nombre de infinitesimal á todo arco variable cuyo límite es cero.

Propiedades.— Se puede sustituir á un arco infinitesimal de una curva cualquiera su cuerda ó la suma de las tangentes trazadas en sus extremidades hasta su punto de encuentro, siempre que este arco sea un término de una relación ó de una suma cuyo límite se trata de determinar.

— En el límite de sumas ó relaciones se puede sustituir con un arco infinitesimal por una sola de las tangentes trazadas en uno de sus extremos, siempre que se determine en una recta que, pasando por el otro, haga con ella un ángulo finito.

— La diferencia entre un arco infinitesimal y la cuerda es, en general, del mismo orden que el cubo del arco.

— Si el arco infinitesimal dado contiene un punto de inflexión, el ángulo de las tangentes extremas será á lo más de segundo orden, y lo mismo le sucederá á los comprendidos entre las citadas líneas y las cuerdas; y la diferencia entre la suma de las tangentes y la cuerda, ó de ésta y el arco, será de un orden igual á la quinta potencia del arco; si éste es de primero, aquélla será de quinto.

— La diferencia entre un arco infinitesimal MM' y la tangente en uno de sus extremos limitada en una recta, es de un orden igual al del cuadrado MM'; ó sea de segundo si éste es de primero.

Inflexión (Líneas de).

Definición.—Si se consideran dos puntos M y M' sobre una línea arbitraria de una superficie, que tengan curvatura distinta, es necesariamente preciso que exista entre ellos otro N en que el cambio de curvatura se verifique. Como la curva es arbitraria, habrá varios puntos N, y el lugar de ellos se llama *línea de inflexión*.

Clasificación.— Como las curvaturas serán medidas por paraboloi-

des osculadores, si éstos, en los puntos M y M' son de una misma especie (es decir, ambos elípticos ó ambos hiperbólicos), la línea de inflexión es *completa*, y si son de diferente especie, la línea de inflexión es *parcial*.

Historia.— El estudio particular de estas líneas ha sido hecho por Mr. Benjamín Amiot. *Mémoire sur les points singuliers des surfaces*, 1846, y puede verse también *Mémoires d'Académie Royale de Bruxelles*. T. XXI.

—Se conocen también las líneas de *inflexión proporcional* ó sean aquellas en que la tangente gira con una velocidad angular de orientación proporcional á la del radio vector dirigido desde un polo fijo al punto de contacto. *Now. Ann.*—1883, pág. 118 y 1888, pág. 183.

Aplicaciones.— Estas líneas no ofrecen interés determinado.

Influencia.

Consideraciones generales.— El problema de la determinación del efecto que ejercen las cargas móviles sobre las vigas apoyadas y empotradas, lo mismo que sobre los arcos, problemas que se estudian en la Resistencia de Materiales, se simplifican notablemente por medio de un sistema de representación de que se hace uso en la Es-

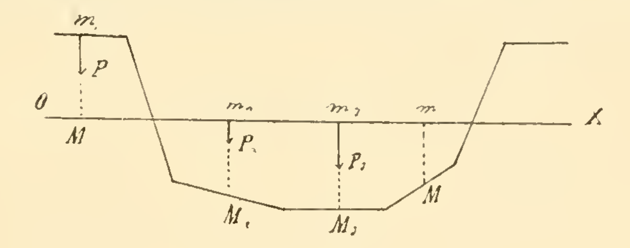


Figura 1.

tática Gráfica, fundado sobre el principio de la superposición de los efectos elásticos de las fuerzas, y para la resolución del cual es necesario el conocimiento de las líneas de influencia.

— Supongamos un sistema articulado cualquiera, sea viga ó arco, y consideremos que un móvil único m (fig. 1) cuyo peso sea la unidad de peso, la recorre según la línea Ox; y sea m su posición en un momento cualquiera. En este momento determinará en cada barra del sistema una cierta tensión ó presión; y veamos el buscar el cómo cambia la tensión (por ejemplo) durante la marcha del móvil en

una barra determinada y para ello tomemos la tensión producida en esta barra cuando el móvil se encuentra en m, sobre una ordenada de este punto (las tensiones ó fuerzas positivas tomadas, por ejemplo, hacia abajo, y las presiones consideradas en este caso como negativas, hacia arriba).

Definición.— El lugar de las extremidades de todas estas coordenadas M es la nombrada *curva de influencia.*

Historia.— La resolución del problema general indicado sirviéndose del medio expreso, y, por tanto, la idea y denominación de las curvas de influencia *(Influenz-curve),* es debida á Mr. Fränkel, *Civil-ingenieur*, 1876; pudiéndose ver sobre este particular la notable Memoria de Mr. Winckler publicada en *Revue des ingénieurs et architectes de Hanovre*, 1879.)

Propiedades.— Para cada barra del sistema se tendrá una curva de influencia particular.

— Supongamos que esta curva es conocida para una barra determinada. Si el móvil, en lugar de la unidad de peso, tuviera un peso P, en virtud del principio de superposición de los efectos elásticos, la tensión que produciría en la barra sería $P \times mM$.

— Supongamos que Ox sea recorrido por un tren compuesto de varios pesos P_1, P_2, P_3, que ocupan en un momento dado las posiciones m_1, m_2, m_3. Tomemos las ordenadas $M_1 m_1$, $m_2 M_2$, $m_3 M_3$ de la línea de influencia, ordenadas que representaremos por y_1, y_2, y_3. La tensión de la barra será

$$P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3,$$

ó por ser y_1 negativo,

$$-P_1 \times m_1 M_1 + P_2 \times m_2 M_2 + P_3 \times m_3 M_3,$$

de manera que el conocimiento de la curva de influencia relativa á una barra permite el determinar la tensión que ella posee en cada momento por virtud del paso de un tren de forma cualquiera, y, por consiguiente, los valores extremos de esta fuerza.

— Como quiera que se puedan encontrar las fuerzas elásticas de todas las barras de un sistema reticular, cuando se conocen los momentos de flexión y esfuerzos cortantes en un cierto número de secciones; de aquí que se tengan en cuenta las curvas de influencia relativas á una cierta sección. Por esto, supuesto el caso del móvil ideal, de peso la unidad de peso, recorriendo la barra en el sentido

Ox y en una cierta posición *m*, se tomará en la ordenada á partir de *m*, no la tensión producida cuando el móvil ocupe esta posición, sino el momento de flexión determinado en una sección dada *X*. El lugar de estos puntos *M* recibe el nombre de *curva de influencia de los momentos de flexión relativos á la sección X*.

— De la propia manera se pueden formar las curvas de influencia que tengan por ordenada *mM*, el valor del esfuerzo cortante producido por el móvil de peso unidad *m*, en cada una de las secciones *X* que sea conveniente considerar, y en este caso, el lugar de los puntos *M* recibe el nombre de *curva de influencia de los esfuerzos cortantes relativos á la sección X*.

— De ordinario, al decir *curva de influencia relativa á una sección*, se sobreentiende se habla de la de los momentos de flexión.

Caso particular.— Supongamos el de un tren móvil sobre una viga continua. Del estudio detallado de este caso, que se puede ver en *La Statique Graphique* de Mr. Levy (segunda parte, página 279), se deducen las siguientes circunstancias para las lineas de influencia:

— La parte de una línea de influencia relativa á una sección cualquier *X* comprendida en la misma traviesa que esta sección, se compone de dos arcos de parábolas de tercer grado. La colocada á la izquierda de la sección pasa por el apoyo de la izquierda de la traviesa; la colocada á la derecha pasa por el apoyo de la derecha. Las dos pasan por un mismo punto de la vertical en *X*.

— Cuando una sección *X* está comprendida entre los focos de la traviesa en que se encuentra, ninguna de las dos ramas de la línea de influencia comprendida en esta traviesa pueden encontrar al eje de las *x* en otros puntos que no sean los apoyos, y ninguna de dichas ramas presentan inflexión.

— Si la sección *X* está comprendida entre un foco y el apoyo que le es más próximo á este punto, la rama de curva colocada del lado de este apoyo no presenta inflexión y no encuentra al eje de las *x* en ningún otro punto más que en el apoyo; pero la rama colocada del lado del apoyo que está más alejado de *X* presenta una inflexión y además corta al eje de las *x* entre los focos.

— Las porciones de la línea de influencia relativas á una sección cualquiera *X* colocadas fuera de la traviesa que contiene á *X* son parábolas de tercer grado que se obtienen por simple reducción en las relaciones constantes de las ordenadas de las lineas de influencia relativas á los apoyos.

— Para una sección *X* de una traviesa, la parte de línea de influen-

cia de los esfuerzos cortantes relativos á X, colocada en otra traviesa diferente de aquella en que está la sección X,

1.º Es la misma, cualquiera que sea la posición de la sección X en su traviesa:

2.º Es un arco de parábola de tercer grado, que se obtiene reduciendo en una relación constante las ordenadas de la linea de influencia de los momentos de flexión, relativa al apoyo de la traviesa considerada más próximo á X.

Integral.

Definición.—Sea *abcd*..... (fig. 1) una curva cualquiera. Si su ecuación es conocida, se puede, por los procedimientos ordinarios del cálculo integral, obtener su área. Tracemos otra curva *ABCD*...

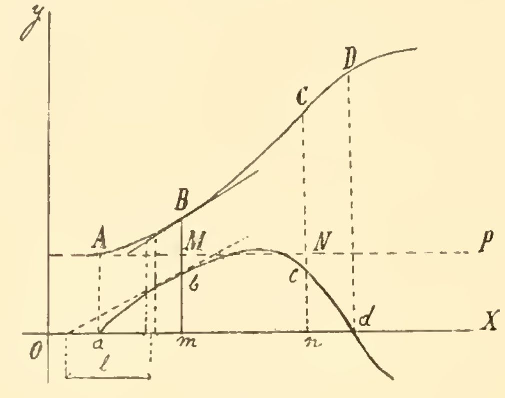


Figura 1.

de manera que cada ordenada, á contar de una recta *AP* paralela al eje *OX*, y que parta del punto inicial *A*, represente el área comprendida entre la curva dada, el eje de las x, el punto *a* y la ordenada que se considera. Tendremos, que una ordenada cualquiera *BM* será proporcional al área *abm*, *CN*, al área *abcn*...; y, por tanto, *BM* multiplicada por una longitud *l*, tomada como unidad, nos dará un paralelogramo, cuya área será igual á *abn*.

La curva *ABCD*... se denomina la *curva integral* con relación á la *abcd*..., que es la *curva diferencial* correspondiente.

Historia.—El estudio de esta curva, y principalmente el de sus aplicaciones, no ha tenido lugar hasta el año 1840, en que Mr. Rossin, ingeniero de la *Ecole du Génie Maritime*, indicó su teoría y usos en la Arquitectura naval para facilitar el estudio geométrico de las ca-

renas de los buques y resolver diferentes problemas importantes en este arte, como, por ejemplo, «*Trazar el contorno de una superficie, cuya área es dada, y de la que el vértice (ordenada máximum) y el centro de gravedad están á distancias dadas de los extremos*».

Después de esta época podremos citar entre las principales obras que se han ocupado de la teoría y aplicaciones de esta curva, las siguientes: *Cours de Mathématiques*. Zmurko. Léopol. 1864.—*Ueber graphische Integration*. Solin. Pragne. 1872.—*Die graphische Integration*. Nehls-Hanovre. 1877.—*L'intégrateur. La courbe intégrale et ses applications*. B. Abakanowicz. Varsovia 1880 y Paris 1886.—*An integrating machine*. C. V. Boys. *Philosophical Magazine*. 1881.

Propiedades.—De la definición antes indicada se deduce que la forma de la curva integral pone de manifiesto el modo cómo crece el área de la curva diferencial. Si, pues, consideramos esta área como compuesta de una serie de elementos infinitamente pequeños,

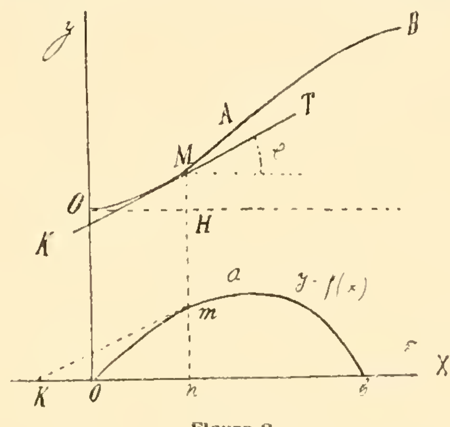


Figura 2.

que tengan por base dx y por altura y, la curva integral nos pone de manifiesto las diferentes fases de la adición de estos elementos.

En general, la curva integral representa la suma $\int y dx$, y nos da, no tan sólo el resultado final, que es el que se obtiene mecánicamente por los aparatos llamados *planímetros*, sino que al par nos enseña cómo varía esta suma.

— La ordenada de la curva diferencial es igual á la tangente trigonométrica del ángulo que la tangente á la curva integral en el punto correspondiente forma con el eje de las X. En efecto, la ecuación de la curva diferencial oab (fig. 2), siendo

$$y = f(x),$$

la de la curva integral $OAB...$ será:

$$Y = \int f(x)\, dx + C.$$

estando la constante C representada por la ordenada inicial oO.

Diferenciando esta ecuación y llamando φ al ángulo de la tangente MT á la curva integral en un punto M con el eje Ox, tendremos:

$$\frac{dY}{dx} = f(x) = y = \text{tg} . \varphi.$$

Para construir esta tangente bastará tomar de h hacia k una longitud igual á la unidad, unir los puntos k y m y trazar la paralela MT á la Km por el punto M.

De aqui se deduce que en los puntos en que la curva diferencial corta al eje de las x, las tangentes á la curva integral son líneas horizontales; es decir, que en cada uno de estos puntos la curva integral pasa por un máximo ó un mínimo, y para los puntos en que la curva diferencial presenta un máximo ó un mínimo, la integral presenta puntos de inflexión. Igualmente se desprende que á una porción recta y paralela al eje de las x en la curva diferencial corresponde en la integral una porción también recta, aunque inclinada, y á una porción recta inclinada respecto al eje de las x en la primera, corresponde un arco de parábola en la segunda, cuyo vértice se encontrará en el punto en que la recta corta al eje de las abscisas.

Trazado.— El trazado de esta curva puede hacerse de una manera aproximada, con sólo tener presente su propiedad fundamental. Sea ll' (fig. 3) una curva dada cualquiera. Tracemos una serie de rectas equidistantes y paralelas á OY, cuya distancia común sea igual á un submúltiplo de la unidad tomada para escala del dibujo, que supongamos sea la AB, y que en el caso de la figura que aquí se presenta se ha dividido en tres partes, y tracemos la serie de líneas $11'$, $22'$, $33'$..., cuyas proyecciones sobre el eje de las x son todas iguales á la unidad.

Desde un punto P cualquiera de la vertical que pasa por A, tracemos una paralela á $11'$ y prolonguémosla hasta que encuentre á la mediana del primer intervalo; luego, por el punto $1''$ así obtenido, tracemos una línea $1''2''$ paralela á $22'$. Continuando asi, dirigiendo las paralelas á la serie de rectas $11'$, $22'$..., obtendremos una línea poligonal $P1''2''3''$..., que se aproximará tanto más á la curva inte-

gral cuanto el número de divisiones sea mayor. La ordenada FG, por ejemplo, representará (á la escala de transformación AB) la superficie $A1fg$. En este procedimiento se asemeja la curva dada á un

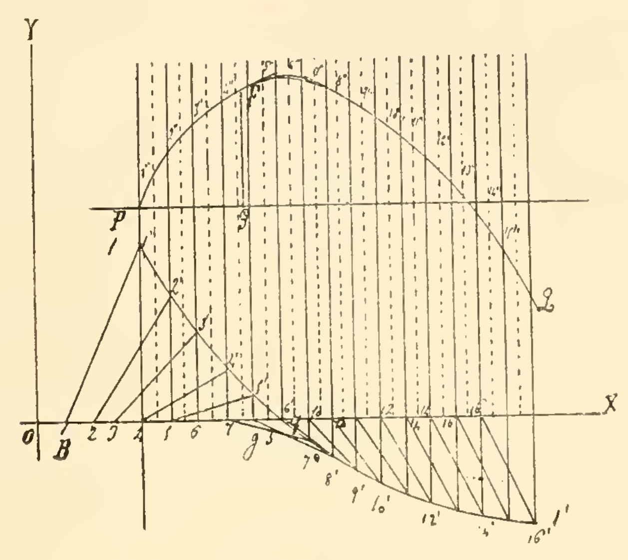


Figura 3.

polígono de lados rectos cuyos vértices se encuentran en $1'2'3'$...

Sea

$$y = ax + b$$

la ecuación de un lado cualquiera de este polígono. Integrando obtendremos

$$Y = \frac{ax^2}{2} + bx + C,$$

ecuación que representa la parte correspondiente de la curva integral, y que es una parábola de eje vertical. La curva integral PFQ estará, pues, compuesta de arcos parabólicos de los que se tienen las tangentes $P1''$, $1''2''$, $2''3''$... Los puntos de intersección de estas tangentes se encuentran sobre las verticales hechas con trazos, así dispuestas por satisfacer á la propiedad conocida de la parábola.

A las rectas $11'$, $22'$, $33'$..., que dan las direcciones de las tangentes á la curva integral, se las llama *directrices*.

Este procedimiento da resultados tanto más precisos cuanto las construcciones se ejecutan con mayor cuidado.

— También se puede ejecutar el trazado de esta curva de una mane-

ra mecánica, por medio de aparatos destinados á este efecto y que reciben el nombre de *integradores.*

El principio fundamental en que se basan estos aparatos es el de reunir por un mecanismo conveniente tres puntos, P, Q, R, sujetos, durante el movimiento, á llenar las tres condiciones siguientes: 1.ª, el punto P (fig. 4) deberá moverse á lo largo del eje de las x; 2.ª, la proyección de PR, sobre el eje de las x, deberá ser siempre igual á la de PQ; y 3.ª, el punto Q se deberá mover, permaneciendo en cada instante paralelo á PR.

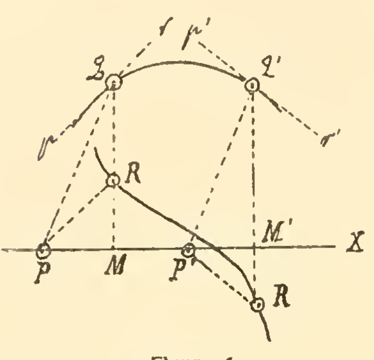


Figura 4.

Si estas condiciones, que comprenden las propiedades geométricas de la curva integral, se cumplen, el punto Q trazará necesariamente la curva integral correspondiente á la diferencial recorrida por el punto R.

Los primeros integradores (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Cracovie*, Marzo de 1880, y *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de París,* 21 Febrero y 7 Marzo 1881), son los de Br. Abdank-Abakanowicz, siguiendo luego otros muchos, entre los cuales señalaremos el de M. C.-V. Boys (*Philosophical Magazine*, Mayo 1881 y 1882); el de Zmurko (*Kosmos*, 1884, núm. 5, pág. 185, Skibinski, Lwow (Léopol)), basado sobre un principio cinemático de integración idéntico al aplicado en los planimetros lineales de Gonella de Florencia, en 1828, y de Oppikofer, de Bernia, en 1827; el de Mr. Mestre (*Lumière électrique*, 1885), etc.

Aplicaciones.—La curva integral sirve como punto de partida á una porción de operaciones geométricas, de una gran utilidad en ciertas operaciones prácticas, y mucho más desde el momento que tan fácilmente puede ser trazada por medio de los integradores. Así, por ejemplo, en un área limitada por un contorno cualquiera, el trazado de las curvas integrales permite, independientemente de la medida de esta área, la solución de diferentes problemas planimétricos, tales como la división del área, dada en partes proporcionales á números cualesquiera; este mismo trazado permite obtener asimismo, con la mayor facilidad, el momento estático y los momentos de inercia con relación á un eje cualquiera situado en el plano de la curva.

Asimismo puede aplicarse la curva integral para el trazado de

otras curvas, como, por ejemplo, la parábola y la exponencial *(Philosophical Mag.*, 1881.—V. Boys), para la representación y solución de las ecuaciones numéricas *(Zmurko-Mem. de la Soc. des Sciences ex.* Paris, 1879), y para la resolución de otros varios problemas, tales como el transporte de tierras, el cálculo gráfico de las vigas, la teoría de las bóvedas, construcción naval, el estudio de los sistemas en movimiento, los problemas eléctricos, etc. (obras citadas al principio y *Comptes rendus,* Marzo 1881.—Así como *La Lumière électrique*, XIV-1884, pág. 369.—G. Richard, *El Indicador*, y T. X., pág. 89.—G. Lippman y núm. 13, correspondiente al 29 Marzo de 1884.)

Intensidad.

Definición.—En Física se da este nombre á la curva que nos da la intensidad de la imantación en un punto cualquiera de una barra.

Propiedades.—Si se considera que el magnetismo libre está distribuido en una barra cilíndrica delgada, como manifiesta la fórmula de Green, la densidad lineal y, ó sea la ordenada de la curva de distribución (ver esta voz), está ligada á la intensidad A de la imantación por la fórmula:

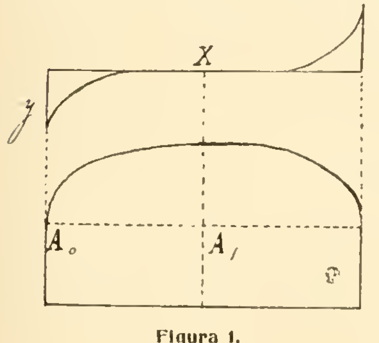


Figura 1.

$$y = \pi a^2 \rho = -\pi a^2 \frac{dA}{dx},$$

de donde se tiene

$$A = A_0 - \frac{1}{\pi a^2} \int_0^x y\,dx.$$

La constante A_0 es la intensidad de imantación en el extremo de la aguja; $\int_0^x y\,dx$, el área de la curva magnética, contada á partir de la ordenada extrema.

Se ve, pues, que las curvas de las intensidades tienen por ordenadas las áreas elementales de la curva de las distribuciones.

La figura muestra al propio tiempo la distribución del magnetismo libre y correspondiente á la fórmula de Green y la de las intensidades A de imantación. El valor mínimo A_0 se encuentra en el extremo de la barra y crece rápidamente al principio, siguiendo luego su crecimiento más lentamente hasta el medio de la barra, en que presenta su mayor valor A_1.

— Estas propiedades han sido verificadas por Mr. Bouty, *Annales de l'Ecole Normale supérieure* (2.ª serie. T. IV, 1875).—Se puede ver también *Journal de Physique* (1.ª serie. T. III, pág. 361, 1874), y *Traité de Physique*, J. B. Biot (T. III, páginas 76 y siguientes).

Intercalares.

Definición.—Son aquellas curvas de nivel (ver esta voz) no obtenidas directamente por la nivelación y que se intercalan entre dos de éstas.

— Estas curvas precisan ser construídas en muchas ocasiones para la mejor y más cómoda solución de algún problema, por resultar las primitivas á mucha distancia.

Propiedades.—Dicho se está que estas líneas gozan de las mismas propiedades que las de nivel primitivas.

Trazado.—Supongamos que nos proponemos trazar una de estas curvas; por ejemplo la comprendida entre la 2 y la 3 (fig. 1), y al tercio de la altura de su equidistancia contada á partir del plano de la curva 2; para ello se traza una línea 2.3, que sea próximamente normal á las dos curvas de nivel, que deben comprender entre sí la curva intercalar; se construye el rebatimiento *ab* de la sección vertical, que tiene por traza la línea 2.3; se dirige la recta *ai*, paralela á 2.3, y se toma, á partir del punto *i*, el tercio *iK* de la distancia *ib;* por el punto *K* se traza una paralela á *ia*, que encontrará á la sección *ab* en un punto *M;* desde este punto se baja la perpendicular *Mm* á la recta 2.3, y el pie *m* de esta perpendicular es un punto de la curva intercalar pedida. Del propio modo se construirán cuantos puntos de la curva se deseen.

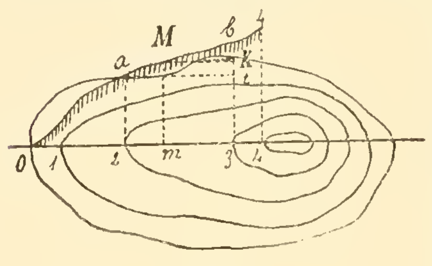


Figura 1.

— En la mayoría de los casos, las curvas de nivel primitivas están lo suficientemente aproximadas para que se pueda considerar el arco *ab* como una línea recta, lo que simplifica mucho las construcciones, por ser tan sólo necesario tomar 2.*m* igual al tercio del intervalo 2.3.

— En la marcha de las operaciones, no influye la relación en que se puede considerar dividida la distancia entre los planos de las curvas de nivel primitivas.

— Cuando la curva intercalar se pide sea construída al medio del intervalo que separa las curvas primitivas, se tomará el punto K en el medio de ib, y si ab fuese sensiblemente recto, la operación queda reducida á tomar el punto m en el medio de 2.3.

Aplicaciones.—Como al principio hemos indicado, estas curvas facilitan en muchas ocasiones la resolución de los problemas topográficos.

Interpolatriz.

Definición.—Curvas cuyas ordenadas, correspondientes á abscisas equidistantes por ejemplo, tienen por valor los términos de una serie dadas.

Historia.—J. Stirling, en su obra *Methodus differentialis, sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitorum*, Londres (1730, en 4.°), se ocupa, en la segunda parte, de la interpolación de las series, es decir, de la intercalación, entre los términos sucesivos de una serie dada numéricamente, de otros términos que pueden ser considerados como formados según la ley en virtud de la cual procede esta serie, y con este fin determina la curva que hemos definido y la da el nombre indicado.

Propiedades.—Cuando la diferencia de los términos de la serie dada no son nulos á partir de un cierto orden, el problema propuesto por Stirling es susceptible de una solución exacta.

En este caso particular, la curva interpolatriz es una parábola del grado señalado por el orden de las diferencias que se anulan, disminuída de una unidad.

— En el caso general, Stirling representa la ordenada de la curva interpolatriz por una serie de la forma

$$A + Bz + Cz(z-1) + Dz(z-1)(z-2) + \dots\dots$$

en la cual los coeficientes A, B, C, D..... deben ser calculados de manera que, si se da sucesivamente á z los valores 0, 1, 2, 3....., se encontrará el primero, el segundo, el tercero, etc., término de la serie dada. El cálculo sucesivo de estos coeficientes es de la mayor facilidad.

Intersección.

Definición.—Se da el nombre de *curva intersección* de dos superficies, al lugar geométrico de sus puntos comunes.

Historia.—El procedimiento general para hallar estas líneas, tal como más abajo se expone, fué indicado por Monge, *Géométrie Descriptive* (1799).

Determinación.—El principio general para hallar la intersección de dos superficies curvas está fundado en el siguiente principio, que no presenta duda alguna: *Si se cortan dos superficies cualesquiera por otra, los puntos comunes á las intersecciones de ésta con cada uno de aquéllas, serán también comunes á las dos primeras.*

Así, pues, para hallar la intersección de dos superficies cualesquiera, se elegirá una tercera superficie, cuyas intersecciones con cada una de las propuestas sean conocidas de antemano y cuyas proyecciones se puedan trazar con facilidad, y cada uno de los puntos en que las dos líneas obtenidas se corten, pertenecerá á la intersección que se busca. Empleando la misma superficie auxiliar en diferentes posiciones, se obtendrán los puntos necesarios para que la línea que por ellos pase quede completamente determinada.

Construcción de la tangente.—Al unir las proyecciones de los puntos de la intersección que se han determinado, puede haber alguna dificultad en el trazado de una curva y convendrá conocer la dirección de ésta, lo cual se consigue determinando la tangente á la intersección en diferentes puntos de la misma, puesto que se sabe que sus proyecciones serán tangentes á las de la curva del espacio; y fácilmente se deduce, que «para hallar la tangente en un punto de la línea de intersección de dos superficies, se trazará á cada una de éstas un plano tangente en el punto dado, y la intersección de los dos planos será la tangente que se trata de determinar».

Binet ha propuesto otro método fundado sobre la circunstancia siguiente: si por un punto de la común intersección de dos superficies se trazan las normales á cada una de ellas, estas líneas serán perpendiculares á la intersección de los planos tangentes, es decir, á la tangente, y su plano será, por tanto, perpendicular á esta tangente. De donde se deduce, que la tangente se puede obtener trazando por el punto considerado una perpendicular al plano de las normales trazadas á las dos superficies por este mismo punto.

Construcción de la asíntota.—Las asíntotas, siendo las tangentes cuyos puntos de contacto se encuentran en el infinito, se obtendrán construyendo los encuentros de los planos tangentes á las dos superficies, trazados por los puntos en el infinito de su común intersección.

Puntos sobre los contornos aparentes.—Estos puntos son particularmente útiles cuando se limitan, sobre las superficies consideradas, las

partes visibles de la curva intersección; otra propiedad importante de tener en cuenta, es que las proyecciones de estos puntos sobre el plano relativo al contorno aparente considerado, son los de contacto de este contorno en proyección y de la curva de intersección proyectada sobre el mismo plano. No existe método general para determinar los puntos sobre los contornos aparentes; sin embargo se puede tener en cuenta que estos contornos, para las superficies usuales, son planos, y, por consiguiente, que los puntos de que tratamos podrán las más de las veces construirse eligiendo para superficie auxiliar los planos de las líneas de contorno aparente considerado y operando como indica la regla anteriormente enunciada.

Puntos más alto y más bajo.—Estos puntos, difíciles de construir y que es de necesidad el renunciar á construirlos en un gran número de casos, se obtienen en algunos particulares, teniendo en cuenta el siguiente teorema: «Cuando una curva admite un plano de simetría perpendicular al plano horizontal, sus puntos más alto y más bajo están en este plano, y recíprocamente; y también que, cuando los planos tangentes en un punto de la intersección de dos superficies tienen sus trazas horizontales paralelas, este punto es el más alto ó el más bajo sobre la línea de encuentro de las dos superficies y recíprocamente.» Así, pues, la tangente en estos puntos es horizontal y se puede proceder teniendo en cuenta los principios anteriores, por medio de tanteos, cuyo tanteo se regulariza haciendo uso de curvas de error, que se pueden trazar de diferentes maneras y según las particulares condiciones del problema.

Superficies límites.—Considerando una serie de superficies auxiliares, cortando á aquellas cuya intersección se busca; cuando se llega á una superficie, que encontrando á una de las dadas, viene á ser tangente á la otra á lo largo de una línea común, se obtendrán puntos de la intersección, pero van á cesar de encontrarse; por ésta razón, esta superficie auxiliar recibe el nombre de *superficie límite*, y los puntos que determina son los *puntos límites* de la intersección. Las superficies límites ofrecen una propiedad muy importante, que deberá tenerse en cuenta, y es la siguiente: «Aquella de las superficies cuya intersección se busca, que está cortada por la superficie límite, lo está según una curva tangente en el punto límite á la línea intersección de las superficies dadas.»

De ordinario, las superficies auxiliares son planos horizontales, y en este caso, los planos límites son los que pasan por los puntos más alto y más bajo de la curva de intersección de las superficies propuestas.

Posiciones mutuas.— Las superficies que se cortan pueden tener respectivamente la una con relación á la otra dos posiciones que se caracterizan y distinguen con denominaciones particulares. Para ponerlo de manifiesto consideremos dos cilindros. Si todas las generatrices de uno penetran en el otro y la cortan en dos puntos, la curva de intersección se compone de dos curvas distintas, de la cuales, la una recibe el nombre de curva de *entrada*, y la otra, de curva de *salida;* diciéndose en este caso respecto de la posición mutua de las superficies propuestas, que presentan *penetración.* Si una parte únicamente de las generatrices de uno de los dos cilindros penetra en la superficie del otro, la curva intersección es una curva única y cerrada, y ahora se dice existe *mordedura.* Existe otra tercera posición mutua que sirve de límite á las dos anteriores, y es aquella en que todas las generatrices de uno de los cilindros penetran en la superficie del otro, á excepción de una de ellas que es tangente á la segunda de estas superficies; en este caso, los dos cilindros tienen un plano tangente común, y su posición mutua ha recibido el nombre particular de *penetración tangencial.* Estas consideraciones se extienden á todas las demás clases de superficies.

Estas posiciones mutuas se suelen caracterizar también de otra manera. Cuando dos superficies se cortan, circunscriben, en general, una cierta porción de espacio á la cual se ha dado el nombre de *sólido común.* Si este sólido común no tiene más que dos partes, ambas continuas, y que pertenecen una á la primera superficie y otra á la segunda, existe *mordedura.* Si el sólido común tiene tres porciones, una continua, perteneciente á la primera superficie, y otras dos separadas, que pertenecen á la segunda, existirá *penetración* de la primera superficie en la segunda. Por último, si el sólido común tiene dos partes separadas, pertenecientes á la segunda de las superficies, habrá *penetración tangencial*, y la curva intersección de las dos superficies presenta un punto doble, que será el de contacto de las dos superficies.

En el caso de penetración de superficies de segundo grado, se tendrá en cuenta la siguiente propiedad, fácilmente demostrable por el cálculo, que *si la curva de entrada es plana, la de salida lo será igualmente.*

Casos particulares.— Si se trata de la intersección de dos superficies cilíndricas, se usarán planos auxiliares paralelos al mismo tiempo á las generatrices de ambos cilindros, los cuales cortarán á los cilindros según generatrices, cuyos puntos comunes se obtienen fácilmente.

— Si se trata de la intersección de un cilindro con un cono, se trazará por el vértice del cono planos auxiliares paralelos á las generatrices del cilindro; estos planos cortarán á las superficies propuestas según generatrices.

— Si se trata de la intersección de dos conos, se harán pasar planos auxiliares por los vértices de los dos conos, los cuales cortarán á éstos según generatrices.

—Si se trata de la intersección de una superficie reglada cualquiera con un cilindro, se trazarán por las generatrices de la superficie reglada planos auxiliares paralelos á las generatrices del cilindro.

— Si se trata de la intersección de una superficie reglada cualquiera con un cono, se trazarán los planos auxiliares por el vértice del cono y por las generatrices de la superficie reglada.

— Si se trata de la intersección de una superficie de revolución con un cono ó un cilindro, se la obtendrá cortando las dos superficies por medio de planos auxiliares perpendiculares al eje de la superficie de revolución.

— Cuando la base del cono ó del cilindro es un círculo, y, como de ordinario acontece, el eje de revolución es perpendicular al plano de dicha base, se obtendrán círculos que se proyectan en su verdadera magnitud sobre el plano de la base, siendo, por tanto, sencilla la determinación de los dos puntos comunes. Cuando la base del cono ó del cilindro no es un círculo, será necesario construir por puntos la intersección de cada plano auxiliar con el cono ó el cilindro. Para evitar esta dificultad se hace uso de las proyecciones oblicuas. Si, por ejemplo, se trata de una superficie de revolución y un cilindro, se proyectan los paralelos de la superficie de revolución sobre el plano de la base del cilindro, sólo por las perpendiculares á esta base y por paralelas á las generatrices del cilindro; la proyección será un círculo igual al paralelo proyectado; por otra parte, la intersección del plano auxiliar con el cilindro se proyecta según la base misma del cilindro, viniendo á ser fácil la determinación de los puntos comunes. Si se trata de una superficie de revolución y de un cono, se proyectan los paralelos de la superficie por rectas trazadas por el vértice del cono; la proyección es un círculo del cual se trazan fácilmente el centro y el radio; la intersección del plano auxiliar con el cono se proyecta según la base del cono y la determinación de los puntos comunes no ofrece ninguna dificultad.

— Si se trata de construir la intersección de dos superficies de revolución cuyos ejes se cortan, es preferible emplear esferas en lugar del planos como superficies auxiliares. Sean S y S' las dos superfi-

cies; se toma el plano vertical de proyección paralelo al plano de los ejes, y para plano horizontal uno perpendicular al eje de una de las dos superficies, á la *S* por ejemplo. Sea *O* el punto de concurso de los ejes. Si se considera una esfera que tenga el punto *O* por centro, ésta cortará á las dos superficies según dos paralelos de las mismas, los cuales paralelos se proyectarán en el plano vertical según dos rectas; el punto común de estas dos rectas será la proyección vertical de los puntos comunes á los dos paralelos y se deducirán fácilmente las proyecciones horizontales correspondientes.

Se puede, como lo ha hecho Mr. Dunesme, extender este procedimiento al caso en que la superficie *S'* sea un elipsoide de tres ejes desiguales, haciendo que el eje medio de la superficie sea perpendicular al plano vertical. En este caso, las secciones circulares del elipsoide se proyectan según dos rectas sobre el plano vertical; si consideramos una de estas secciones, y por su centro se levanta una perpendicular á su plano, esta perpendicular encontrará al eje de la superficie de revolución *S* en un punto *O;* y si se considera la esfera que tiene este punto *O* por centro y que contiene la sección circular considerada, ella cortará la superficie de revolución según un paralelo, que se proyectará sobre el plano vertical según una recta. La solución del problema es, pues, la misma que en el caso de dos superficies de revolución, con la única diferencia que las esferas auxiliares, en lugar de estar descritas desde un centro fijo, lo están según un centro *O* variable, pero situado siempre sobre el eje de revolución.

— El trazado gráfico de todos y cada uno de estos problemas y otros que se refieren á la misma cuestión, pueden verse consultando cualquiera de las muchas obras de Geometría Descriptiva que existen.

Aplicaciones.— La importancia de la determinación de la linea que nos venimos ocupando es extraordinaria, sobre todo para la resolución de los muchos y variadísimos problemas que á la Estereotomía se refieren, una de las ramas más importantes de la construcción.

Interscendantes.

Definición.—Se ha dado este nombre á las curvas en cuyas ecuaciones los exponentes sean números irracionales, tales como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, etcétera.

Historia.— Esta denominación fué empleada por Leibnitz. *Go. Gal Leibnitii opera omnia.* (Genève, 1763. T. III.)

Inversas.

Preliminares. — Si suponemos tres puntos, SAa, en línea recta (figura 1), se dice que dos de ellos, Aa, son simétricamente inversos con relación al tercero S (origen), si los segmentos SA, Sa, satisfacen á la igualdad

$$SA\,.\,Sa = \overline{SK}^2,$$

siendo SK una magnitud prefijada, numérica ó lineal, de signo convenido. Esta constante $\overline{SK}^2$, que convendremos en representar por K^2, se designa con el nombre de *potencia de inversión.*

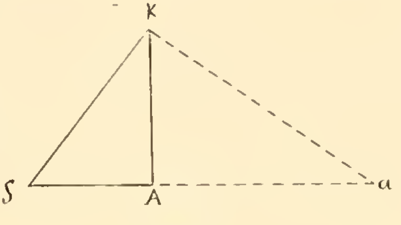
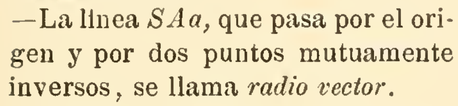
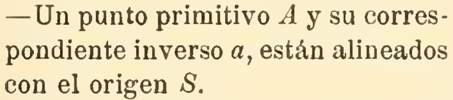


Figura 1.


—La línea SAa, que pasa por el origen y por dos puntos mutuamente inversos, se llama *radio vector.*


—Un punto primitivo A y su correspondiente inverso a, están alineados con el origen S.

— Si la potencia de inversión K^2 es positiva, estarán ambos puntos, primitivo é inverso, á un mismo lado del origen.

— A una potencia negativa, corresponden signos distintos en los segmentos. Así, pues, los puntos inversos estarán á distinto lado del origen.

— Para un origen y potencia constantes, á cada punto primitivo corresponderá un solo inverso.

— Si varias líneas tienen un punto común M, serán sus inversas concurrentes en otro m, alineado con el anterior y el origen.

— Para una potencia nula es el origen inverso de todos los puntos del espacio.

Definición. — Dado un sistema de puntos, ABC (fig. 2), sobre un plano, si con relación á otro punto S del mismo plano y á una potencia prefijada $\pm K^2$, se determinan sus respectivos inversos $abc....$, de suerte que se verifique:

$$SA\,.\,Sa = SB\,.\,Sb = SC\,.\,Sc = \,.....\quad K^2$$

ó

$$\Sigma A\,.\,\Sigma a = \Sigma B\,.\,\Sigma b = \Sigma C\,.\,\Sigma c = \,.....\, - K^2$$

se dice que ambos sistemas forman figuras ó *curvas inversas.*

Cualquiera de ambos sistemas se pueden considerar como primitivo respecto del otro; por eso se dice que forman figuras ó curvas mutuamente inversas.

Clasificación.—Si en ambos sistemas cada primitivo y su correspondiente inverso están á un mismo lado del origen, se dice figuras

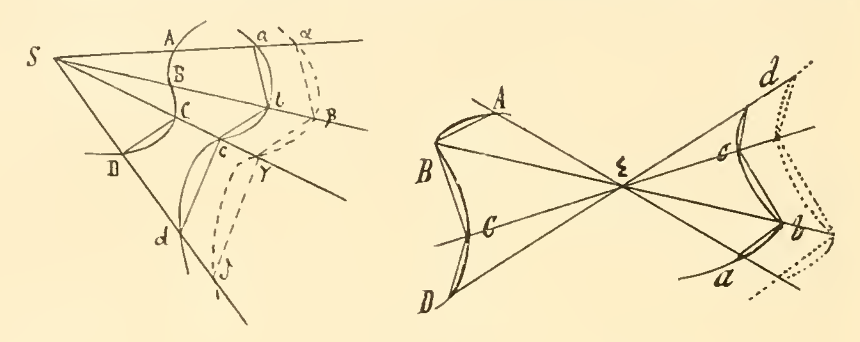


Figura 2

ó curvas inversas positivas; en el caso contrario, se dice figuras ó curvas inversas negativas.

Ecuación.—El procedimiento empleado para obtener una figura inversa, se llama *transformación por radios vectores recíprocos;* el punto S es el polo, y la constante K, el módulo de la transformación.

Para establecer las fórmulas de transformación, supongamos, en primer lugar, que la curva propuesta está definida en coordenadas polares por la ecuación

$$F(\rho, w) = 0$$

el punto fijo S siendo el polo. Designando por r el radio vector de la curva inversa, se tendrá, por definición,

$$r \cdot \rho = K^2, \quad \text{de donde } \rho = \frac{K^2}{r};$$

por consiguiente, la curva inversa tiene por ecuación:

$$F\left(w, \frac{K^2}{r}\right) = 0.$$

Sea, en segundo lugar, $\varphi(x, y) = 0$ la ecuación de la curva propuesta referida á un sistema de ejes rectangulares que pasan por S. Llamemos ξ, η las coordenadas del punto m que corresponden al punto $M(x, y)$ de la curva dada; se tendrá

$$\frac{x}{\xi}=\frac{y}{\eta}=\frac{\rho}{r}$$

y por ser $r^2=\xi^2+\eta^2$ y $\rho^2=x^2+y^2$, y haciendo la transformación conveniente, se encuentra que la curva inversa de la propuesta tiene por ecuación:

$$\varphi\left(\frac{K^2\xi}{\xi^2+\eta^2}, \frac{K^2\eta}{\xi^2+\eta^2}\right)=0.$$

Propiedades.—Al círculo descrito, desde el origen S como centro, con un radio igual á K, se llama *círculo director*, y en este supuesto, se puede decir que *curva, ó figura inversa de otra cualquiera, es el lugar geométrico de los pies de las polares correspondientes á todos sus puntos relativamente al círculo director.*

—La recta AB que une dos puntos primitivos y la ab que une sus inversos, son antiparalelas con relación al ángulo de los radios vectores.

— La recta que une los inversos ab, $\alpha\beta$, de dos puntos, con relación al mismo origen y á distinta potencia, son paralelas.

— Dos figuras inversas de una misma primitiva, con relación al mismo origen y á distinta potencia son homotéticas, pasando á ser el origen centro de semejanza, siendo la razón de homotesia igual al cociente entre las constantes de inversión.

— La inversa de una recta que no pasa por el origen, es una circunferencia que pasa por él.

— Las tangentes á curvas inversas en puntos inversos, forman ángulos iguales con el radio vector y se cortan sobre el eje radical; entendiendo por eje radical de los círculos, la perpendicular á la línea de los centros, que goza de la propiedad de que cada uno de sus puntos tiene igual potencia, relativamente á ambos círculos.

— La inversa de una recta L, con relación á un origen S, fuera de su dirección, y á una potencia arbitraria K^2, es una circunferencia O que pasa por el origen.

— El sistema de una recta y un círculo de cualquier modo situados en un plano, pueden siempre ser considerados como figuras mutuamente inversas, tomando por origen cualquiera de los extremos del diámetro perpendicular á la recta y como potencia el doble rectángulo de las distancias del origen á la recta y al centro del círculo.

— La inversa de una circunferencia, con relación á su centro como origen y á una potencia igual al cuadrado de su radio, es la misma circunferencia. Esta circunferencia, cuyos puntos son inversos de sí mismos, se llama *circunferencia directora.*

— Dos circunferencias concéntricas pueden considerarse como inversas con relación al centro como origen y á una potencia media geométrica entre sus radios.

— La inversa de una circunferencia, con relación á un origen sobre su contorno y á una constante de igual diámetro, es la tangente á la circunferencia por el diametral del origen.

— Una circunferencia primitiva es, á su inversa, como la potencia del centro de semejanza á la primera es á la constante de inversión, el cual viene á ser, con distinto enunciado, el conocido teorema: «líneas homólogas de dos circunferencias son proporcionales».

— La circunferencia secante que corta á dos circunferencias fijas en un par de puntos inversos, determina en sus segundas intersecciones otro par de inversos.

— En circunferencias mutuamente inversas, las cuerdas que unen dos puntos primitivos y sus correspondientes inversos son concurrentes con el eje radical.

— Las líneas que unen entre sí los primitivos ó los inversos, determinados sobre circunferencias inversas por dos transversales, describen en sus intersecciones tres rectas perpendiculares á la línea de los centros, que son: el eje radical y las polares del origen relativamente á ambos círculos.

— Si una circunferencia es tangente externa á una de dos circunferencias fijas y tangente interna á la otra, estarán los contactos en línea recta con el centro de semejanza inversa.

— Las tres circunferencias descritas sobre las diagonales de un cuadrilátero completo, tienen común el eje radical.

— Las cuatro circunferencias que, pasando por un centro de semejanza, son osculadoras á dos fijas en las intersecciones que sobre éstas determina un círculo octogonal, tienen un punto común sobre la circunferencia armónica. Sus centros son cuatro puntos en línea recta.

— La inversa de la polar de centro de una cónica es una cónica.

— La inversa de una cónica que tiene por foco el polo es una concoide circular.

— La inversa de una parábola, que tiene por vértice el polo, es una cisoide.

— La inversa de una hipérbola equilátera es una lemniscata.

Aplicaciones.—Muchas de las propiedades apuntadas y otros teoremas y problemas, tienen demostración y solución sirviéndose de las líneas inversas, así como en una porción de construcciones gráficas, como entre otras, en aquella de trazar circunferencias tangentes á

tres circunferencias que tienen un punto común, pudiéndose consultar la *Revista Calasancia* (t. XVI y siguiente), donde se encontrará toda esta teoría perfecta y extensamente desarrollada.

Involuta.

Definición.—Curva móvil que, por las intersecciones sucesivas de sus diversas posiciones, da lugar á otra que se llama *envolvente* (ver esta voz).

Propiedades.—Estas líneas serán tangentes á la envolvente en todas sus posiciones.

—Si por su forma ó por las condiciones de su movimiento, dos posiciones consecutivas de la involuta no se cortan, no habría línea envolvente ó sería preciso considerarla como imaginaria.

Ionoide.

Ækimghans *(Die lemniskate.— Archives de Grunert)* ha dado este nombre á una línea imaginada por él para el particular estudio del movimiento sobre una curva dada.

Irracionales.

Definición.—Se denominan así á las curvas en que una de sus coordenadas está relacionada con la otra por una función irracional.

Propiedades.— Estas curvas, como las transcendentes (ver esta voz), presentan, á diferencia de las algebraicas, que nunca los tienen, puntos de parada y angulosos.

Para el trazado de los lugares geométricos correspondientes á una ecuación de esta especie, es necesario determinar los límites en que se hace preciso variar una de las coordenadas para que la otra sea real, y después dar valores á la primera, comprendidos entre estos límites. Además, se buscarán las particularidades que presentan las tangentes en los puntos más notables y se determinan las asíntotas siguiendo la propia marcha que en las curvas transcendentes.

Ejemplos.—A fin de indicar el procedimiento á seguir en la construcción de esta clase de curvas, expondremos, como vía de ejemplos, algunos de los que más usualmente se citan en los autores modernos, ya sea en el sistema cartesiano, ya en el polar, que son los dos más generalizados.

Ejemplos en el sistema cartesiano.—1.° Sea la ecuación:

$$y = x + 1 \pm \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)x}{x+3}},$$

la cual nos muestra que la recta $y = x + 1$ es un diámetro relativo

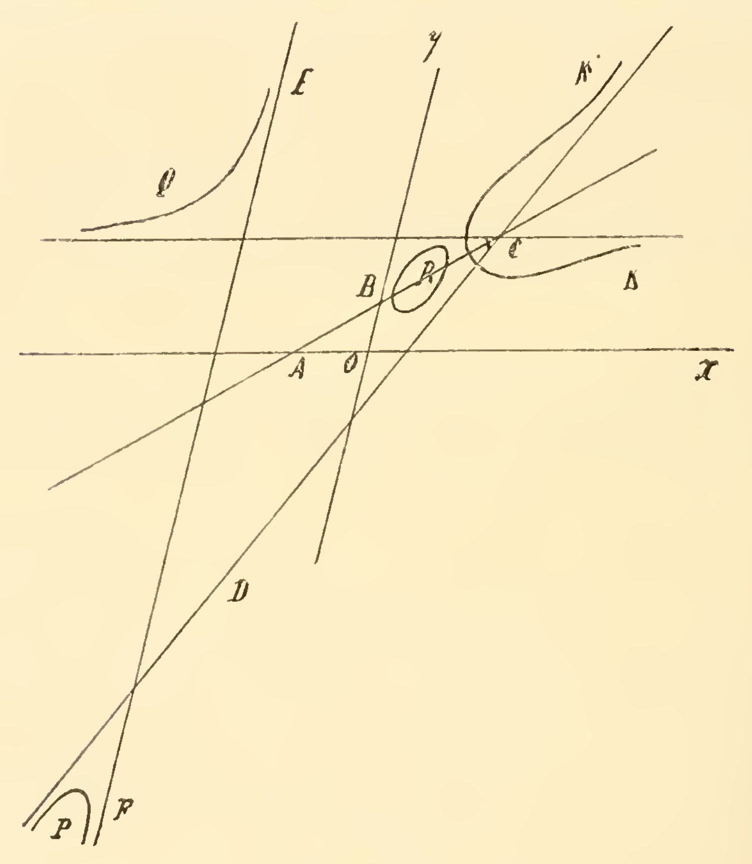


Figura I.

á la dirección de Oy; y será racional, si x está comprendido entre las tres series de valores de $-\infty$ á -3, de 0 á 1 ó de 2 á $+\infty$.

La cantidad subradical se puede poner bajo la forma

$$\frac{(x-1)(x-2)x}{x+3} = x^2 - 6x + 20 + \frac{-60}{x+3},$$

y el radical, extrayendo la raíz, será:

$$x - 3 + \frac{11}{2x} + \frac{\lambda}{x^2};$$

y tomando el signo $+$, será:

$$y = x + 1 + \left(x - 3 + \frac{11}{2x} + \frac{\lambda}{x^2}\right);$$

de donde resulta, que la curva tendrá por asíntota la recta

$$y = 2x - 2.$$

Se tiene

$$y - 2x + 2 = \frac{11}{2x} + \frac{\lambda}{x^2}$$

y se ve, por tanto, que del lado de las x positivas, la curva está, con respecto á su asíntota, en la región positiva, es decir, en la región del origen y del lado de las abscisas negativas en la región opuesta. Igual resultado que para la asíntota $y = 4$ se obtiene tomando e signo — del radical. La curva presenta la forma indicada en la figu ra 1. Cuando x varia de $-\infty$ á -3, se obtienen las ramas P y Q, asíntotas á las rectas CD, EF y á las CK y EF respectivamente; cuando

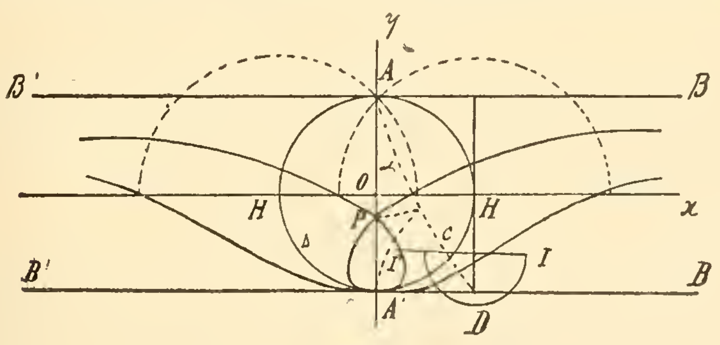


Figura 2.

x varía de 0 á 1 se tiene un óvalo BR, y, por último, cuando x varía de 2 á $+\infty$ se obtiene una rama KK', asíntota á CK y CD.

2.° Consideremos el lugar que corresponde á la generación siguiente: Sea un círculo Δ (fig. 2), y sobre este círculo un punto fijo A; sea BB' la tangente á Δ, en el punto A', diametralmente opuesto á A. Si por este punto se traza una transversal ACD, que encuentre en C al círculo Δ y á BB' en D; desde el punto C como centro, con CD por radio, se describe un semicírculo que encuentra la perpendicu-

lar bajada desde C sobre AA' en los puntos I é I'; se pide el lugar de estos puntos I.

La ecuación de este lugar es dada por la ecuación (*Géométrie Analytique*, Longchamps):

$$x = \frac{\pm\left(\frac{d}{2} - y\right)\sqrt{\dfrac{\frac{d}{2} + y}{d}} + y + \frac{d}{2}}{\pm\sqrt{\dfrac{\frac{d}{2} - y}{d}}}, \text{ siendo } AA' = d.$$

Ecuación que prueba que la curva está situada entre las tangentes paralelas BB' y $\beta\beta'$. A todo valor de y, comprendido entre $\frac{d}{2}$ y $-\frac{d}{2}$, corresponden cuatro valores de x iguales dos á dos y de signo contrario.

Poniendo la ecuación bajo la forma

$$x^2 = \frac{\frac{d}{2} + y}{\frac{d}{2} - y}\left\{\frac{d}{2} - y \pm \sqrt{d\left(y + \frac{d}{2}\right)}\right\}^2$$

se ve que la ecuación $\left(\frac{d}{2} - y\right)^2 = d\left(y + \frac{d}{2}\right)$, que se puede poner bajo la forma

$$y^2 - 2dy - \frac{d^2}{4} = 0,$$

nos da las ordenadas de los dos puntos dobles de la curva. El que corresponde á la raíz positiva es un punto aislado; el otro, el punto P, es real y se construye como indica la figura.

Los puntos de encuentro de Ox con la curva, se determinan por medio de dos círculos, que se describen desde los puntos H y H' como centros, con $AH = AH'$ por radio.

En resumen; la curva tiene el aspecto general que indica la figura.

Ejemplo en coordenadas polares.—Sea la ecuación

$$\rho = e^{\frac{1}{\sqrt{(w-1)(2-w)}}}$$

w no podrá variar más que entre los valores 1 y 2. Tomemos el signo $+$ para el radical; para $x = 1 + \varepsilon$ y para $w = 2 - \varepsilon$, ρ es infinito.

Busquemos las asíntotas; se tiene para $w = 1$:

$$d = \lim . \rho . \text{sen} . (1 - w) = \lim . e^{\frac{1}{\sqrt{(w-1)(2-w)}}} . \text{sen}(1 - w).$$

Haciendo $w - 1 = \frac{1}{z^2}$, se tendrá:

$d = \lim \frac{e^{Az}}{z^2}$ para $z = \infty$; de donde $d = \infty$, y por tanto, no tiene la curva ninguna asíntota.

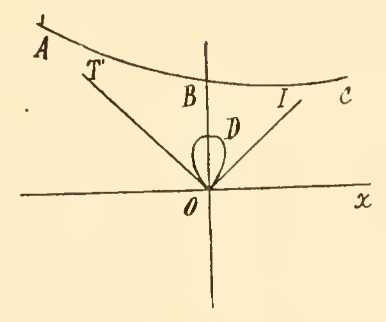


Figura 3.

Si se toma el signo $-$ del radical, se tiene:

$$\rho = e^{\frac{1}{\sqrt{(w-1)(2-w)}}}$$

para $w = 1$ y $w = 2$, $\rho = 0$.

La curva tiene, pues, la forma indicada; la rama ABC corresponde al signo $+$ del radical, y la rama OD tiene por tangente en el origen las rectas OT y OT' correspondiente al signo $-$; se ve, ade más, que el origen es un punto anguloso.

Isentrópicas.

Definición.— Nombre particular que se da en Fisica Matemática á las líneas de eutropia constante.

(Ver *adiabáticas.*)

Iso-atmoterma.

Definición. — Línea que une los puntos de la atmósfera que tienen la misma temperatura media anual.

— Estas líneas pudieron ser en el origen del globo, y durante largos períodos de su historia, cuando el calor propio de la tierra se dejaba sentir con más ó menos intensidad al exterior, paralelas con dicha superficie terrestre; pero más tarde, cuando por la interposición de la costra sólida era cada dia menor la influencia de la temperatura propia del globo, perdióse dicho paralelismo, é inclinándose las líneas hacia la tierra, llegaron á encontrar en diferentes puntos á la misma superficie terrestre, originándose de aqui las líneas isotermas terrestres.

Isobarométricas.

Del griego ἴσος, igual; βαρύς, peso, y μετρον, medida.

Definición.— Se denominan isobarométricas ó isóbaras las curvas que pasan por los puntos de la tierra en que la amplitud media de las variaciones barométricas son las mismas.

Historia.— Kamtz fué el primero que propuso el trazado de estas curvas, cuya situación y formas conducen á resultados importantes para el estudio de la influencia que la configuración de las tierras y la extensión de los mares ejercen sobre las oscilaciones de la atmósfera.

Sobre el curso que estas líneas siguen, y las causas que influyen en sus curvaturas geográficas puede consultarse, Poggendorffs, *Annalen* (Tomo XXXVII, págs. 245, 258, 468 y 481). Vicente Ventosa, *El huracán de Madrid* (Bolonia). Daussy, *Comptes rendus* (T. III, página 156). Humboldt, *Cosmos* (T. I, pág. 298), etc.

Propiedades.— Consultando un mapa de estas líneas, se ve que ellas marchan en la dirección de los paralelos geográficos, pero no coinciden con ellos á causa de ser sumamente irregulares; corresponden á las amplitudes cada vez mayores á medida que avanzan hacia el N. y parecen estrecharse lentamente, de modo que parece se asemejan á la forma de un ocho, para concluir por dos sistemas separados.

— Se deduce, asimismo, que la altura media del barómetro es algo menor en el Ecuador, y generalmente en los trópicos que en las zonas templadas, pareciendo adquirir su máximo en Europa occiden-

tal, entre los paralelos de 40 y 45°. En el Indostán, sin duda debido á sus altas cadenas de montañas y su península triangular, así como en las costas orientales del nuevo continente hacia el punto en que las aguas calientes del Gulf-Stream se dirigen al E. (Terra Nova) se presentan oscilaciones isobarométricas más considerables que en las Antillas y en la Europa Occidental.

— Desde luego se comprende la dificultad de un trazado de estas líneas por la falta de datos necesarios para ligar entre sí los fenómenos que presentan las variaciones del barómetro, fenómenos que, según Rozet, sólo pueden hacer conocer las alteraciones de las masas de aire en las diferentes estaciones. Además, la altura barométrica cambia considerablemente con la latitud geográfica, con la altura del lugar de observación, y, según Mr. Ramond, con las diferentes estaciones del año.

— Mr. Flangergues dice que las fases de la luna tienen influencia en las oscilaciones del barómetro, y Mr. Daussy manifiesta que los vientos reinantes son la causa principal que determinan la disminución de la presión atmosférica; y donde quiera que esta presión disminuye, la altura media del mar aumenta en la misma proporción.

— Humboldt ha observado que sobre el Ecuador el máximo de altura barométrica se tiene á las nueve de la mañana, y el mínimo, á las cuatro de la tarde durante el día, y que por la noche se obtiene otro máximo á las once y otro mínimo á las cuatro de la madrugada.

— Por último, significaremos que las variaciones que se reproducen regularmente por períodos horarios ó anuales en la presión atmosférica, los cambios bruscos, por lo común peligrosos, que tienen lugar accidentalmente, y en general, todos los fenómenos cuyo conjunto constituye el estado del cielo, deben atribuirse en gran parte al poder calorífero de los rayos del sol.

Isoclínicas.

Del griego ἴσος, igual, y de κλισις, inclinación.

Definición.—Se denominan así las líneas que unen los puntos de la Tierra, en que la inclinación de la aguja imanada es la misma.

Se dice también *isoclinales.*

Historia.—La primera carta de las líneas isoclínicas fué levantada en 1768 por Wilcke. De la figura que ellas presentan dedujo Hausteen, *Untersuchungen über den Magnetismus der Erde*, la existencia de cuatro polos magnéticos, hipótesis que ha sido abandonada. Ross ha determinado el lugar del polo Norte magnético durante la segunda

expedición de su tio Juan Ross, de 1829 á 1833 *(Abhandlungen der K.K. geologischen Reichsanstalt*, t. II, 1855, 1.ª parte, pág. 3.ª), y el del polo Sur en la expedición antártica que dirigía él mismo, de 1839 á 1843. A Sabine *(Contributions to terrestrial Magnetism*, 1840, página 139) se debe el notable mapa de las líneas isoclínicas en el Océano Atlántico, relativo á los años 1825 y 1837, y también puede verse Humboldt, *Ueber die seculære Verænderung der Magnetischen Inclination (Ann. de Poggendorff*, t. XV, pág. 322).

Propiedades.—Las líneas isoclínicas responden á una idea compleja, porque se refiere la inclinación al horizonte, y como la dirección del horizonte cambia de un punto á otro, éstas serán las líneas que marcarán inclinaciones iguales sobre un plano con cada uno de sus puntos.

—Según Ross, que, como antes hemos dicho, determinó el lugar de los polos Norte y Sur magnéticos, el primero está situado á los 70°,5′ de latitud, 99°,5′ de longitud occidental, está 5° más alejado del polo de rotación de la Tierra que el polo Sur magnético, situado á los 75°,5′ de latitud y 151°,48′ de longitud oriental. La diferencia de las longitudes entre los dos polos magnéticos es de 109°.

— De las líneas de esta clase, aquella que liga los puntos en que la inclinación es *cero*, es *la línea sin inclinación* llamada *Ecuador magnético* (ver esta voz).

— Los diferentes sistemas de líneas isoclínicas se ligan á la gran línea sin declinación, cuyas variaciones de forma y posición cambian las latitudes magnéticas é influyen sobre la inclinación hasta en las más apartadas regiones.

— La inclinación sufre variaciones diurnas y seculares, pero sus leyes son poco conocidas.

— La inclinación está sometida, además, á cambios periódicos. Arago habia reconocido desde el otoño del año 1827, que la inclinación es mayor á las nueve de la mañana que á las seis de la tarde, lo contrario de la intensidad. Asimismo, Borda fué el primero en dar á conocer que la inclinación cambia por la influencia de la altura. También se altera en las profundidades.

Isocromáticas.

Definición.—Se da en Física el nombre de curvas isocromáticas á las líneas trazadas en las superficies de este nombre.

Historia.—Mr. Bertin *(Annales de Chimie et de Physique*, 3.ª serie, tomo LXIII, pág. 57, 1861) da el nombre de superficie isocromática

al lugar de los puntos del espacio en que la diferencia de marcha del radio ordinario y del extraordinario que se propagan, según una misma dirección tienen un valor dado.

— Esta superficie sirve á Mr. Bertin para conocer la forma de las franjas que se observan al través de una lámina de un cristal, de uno ó más ejes determinando la de las curvas, secciones producidas por el plano de las láminas en esta superficie, ó sea por las formas de las líneas isocromáticas.

Ecuaciones y formas.—Sean, en primer lugar, en los cristales de un eje, y llamemos u el radio vector de la superficie isocromática, ρ el de la superficie de la onda, n_o y n_e los índices ordinario y extraordinario, δ el valor constante de la diferencia de marcha y (x, y) las coordenadas rectilíneas de la meridiana de la superficie isocromática, se tiene:

$$\delta = u\left(\frac{1}{\rho} - n_o\right),$$

y para ecuación de esta meridiana.

$$n_0^2x^2 + n_e^2y^2 = (\delta + n_0u)^2 = \left(\delta + n_0\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2;$$

$$[(n_e^2 - n_0^2)\,y^2 - \delta^2]^2 = 4n_0^2\delta^2(x^2 + y^2), \qquad (1)$$

la cual tiene la forma general expresada en la figura 1, siendo la parte punteada una rama parásita, que no conviene á la solución del

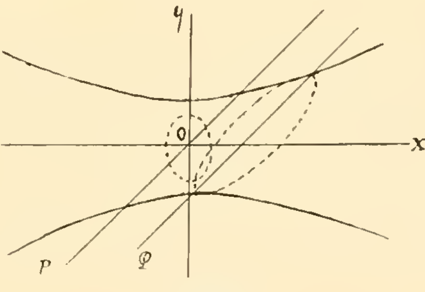


Figura 1.

problema físico, y la forma general de la rama útil se aproxima, en la parte cercana, al eje de las y, á una hipérbola cuya ecuación es

$$n_e y^2 - n_0 x^2 = \frac{n_e\,\delta^2}{(n_e - n_0)^2},$$

y cuyo eje transverso es el eje de las y, pero cuyas ramas infinitas no admiten asíntotas.

— Si la lámina del cristal es perpendicular al eje, la sección en la superficie isocromática por un plano que tiene esta dirección, es un círculo cuyo radio ρ se obtiene haciendo $y = \rho$ y $x = e$ en la ecuación (1), y será

$$\rho^2 = \frac{\delta^2(n_0^2 + n_e^2) \pm n_0 \delta \sqrt{n_e^2 \delta^2 + (n_e^2 - n_0^2)^2 e^2}}{(n_e^2 - n_0^2)^2},$$

ó, aproximadamente,

$$\rho^2 = \frac{\delta e}{n_e - n_0},$$

cuyos círculos consecutivos ó anillos se obtendrán reemplazando δ por $p\frac{\lambda}{2}$; y se ve que sus diámetros crecen como las raíces cuadradas de los números enteros.

— Si la lámina del cristal es paralela al eje, la forma de las curvas isocromáticas obtenidas por los planos que siguen esta dirección, son próximamente hipérbolas, y si en la ecuación de la meridiana (1) se reemplaza y por e, el valor de x representará uno de los ejes de estas hipérbolas:

$$4 \,.\, n_0^2 \delta^2 x^2 = (n_e^2 - n_0^2)^2 e^4 - 2\delta^2 (n_e^2 + n_0^2) e^2 + \delta^4.$$

Para valores muy pequeños de δ, x^2 es positivo y muy grande; la hipérbola admite el eje de las x por eje transverso, para $\delta = e (n_e - n_0)$, $x^2 = 0$, y la hipérbola se reduce á sus asíntotas; para valores de δ mayores, x^2 es negativo; el eje de las x es el eje no transverso.

El conjunto de las hipérbolas obtenidas, haciendo

$$\delta = p\frac{\lambda}{2},$$

está representado por la figura 2.

— Si la lámina del cristal es oblicua al eje, las secciones de la superficie isocromática, ó sea las líneas de esta clase, son curvas de cuarto grado, que tienden hacia dos círculos cuando la sección es casi perpendicular al eje ó hacia dos hipérbolas cuando le es casi parale

la. En el caso de una oblicuidad de 45°, son dos rectas perpendiculares á la sección principal de la lámina.

— Supongamos en segundo lugar el caso de los cristales de dos ejes. La superficie isocromática tiene ahora por ecuación:

$$[(n'^2 + n''^2)\,x^2 + (n''^2 + n^2)\,y^2 + (n^2 - n'^2)\,z^2 - \delta^2]^2 =$$
$$= 4\,(x^2 + y^2 + z^2)(n'^2 n''^2 x^2 + n''^2 n^2 y^2 + n^2 n'^2 z^2).$$

La sección hecha en esta superficie por el plano de las xz que contiene los ejes ópticos, comprende una rama parásita cerrada y

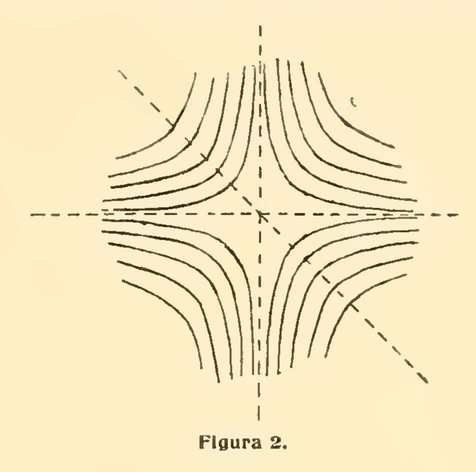


Figura 2.

admite dos direcciones asintóticas á la otra rama, paralelamente á los ejes ópticos.

Las secciones de los otros planos coordenados nos dan curvas de cuarto grado, comprendiendo una rama parásita, pero cuya parte útil es una curva cerrada.

— Si la lámina es paralela al plano de los ejes, las secciones de la superficie isocromática ó curvas isocromáticas que se obtienen por planos de dicha dirección, difieren poco en su parte central de hipérbolas que tienen por asintotas comunes las direcciones paralelas á los ejes ópticos. La ecuación de estas hipérbolas se obtienen haciendo $y = e$ en la ecuación (2) y considerando que δ es muy pequeña con relación á e, y será:

$$n^2 z^2 - n''^2 x^2 = \frac{2nn''\delta\left(e - \dfrac{\delta}{n'' - n}\right)}{n^2 - nn''}$$

para $d = (n'' - n)\,e$, la hipérbola se reduce á sus asíntotas; para valores más pequeños de δ, el eje de las z es el eje transverso, mientras que para valores mayores lo es el de las x.

— Si la lámina es perpendicular á la línea media ó á la línea suplementaria, las curvas isocromáticas obtenidas responden á diversas

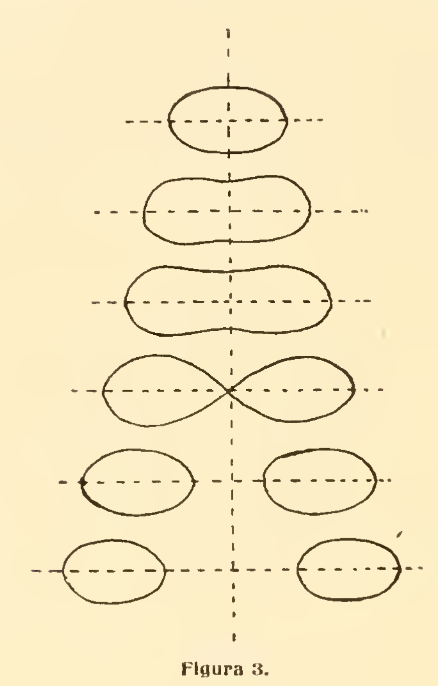


Figura 3.

formas de lemniscatas. Para los valores pequeños de δ, presentan dos ramas cerradas alrededor de cada uno de los ejes; para valores máximos, no tienen más que una sola rama cerrada alrededor de los ejes. Las dos formas de curvas están separadas (fig. 3) por una curva en 8, que corresponde á un valor conveniente del espesor e de la lámina.

— Si la lámina es, por último, perpendicular á uno de los ejes, las líneas isocromáticas, tomadas en su conjunto, son análogas á lemniscatas deformadas.

Isócrona.

Del griego, ἴσος, *igual* y χρόνος, *tiempo*.

Definición.—Curva á lo largo de la cual un cuerpo pesado descenderá de alturas iguales en tiempos iguales.

Historia.—Huygens, según resulta de las cartas de M. Charles Henry, publicadas en su obra *Huygens et Roberval* (pgs. 27 y 29), á principios de 1660 había asegurado el isocronismo de las oscilaciones del péndulo, obligando á éste á describir una cicloide *Horologium oscillatorium, etc.;* pero Leibnitz propuso en 1687, *Nouvelles de la République des lettres*, el célebre problema de la curva *isócrona*, llamada por él de los *accesus æquæbilis;* problema que fija la atención de todos los geómetras de su tiempo.

En 1689 Leibnitz, *Acta eruditorum*, publica una Memoria sintética *De línea isochrona in qua grave sine aceleratione descendit*, que contiene la solución de dicho problema, en la cual la ecuación de esta curva se expresa por

$$\frac{dy}{dt} = k \quad \text{y} \quad v^2 - v_0^2 = 2g(y - y_0),$$

y eliminando el tiempo é integrando la ecuación resultante encuentra una parábola cuadrato-cúbica, cuya ecuación, si se transporta el origen al punto de partida, es

$$9g^2K(x + c)^2 = (2gy - K^2)^3,$$

siendo c una constante.

Leibnitz, sin embargo, no expresa el método por medio del cual llega á estos resultados, y señala solamente que de todas las curvas que responden á la cuestión, aquella á lo largo de la cual el descenso será más rápido, tendrá su tangente vertical en el punto de partida, y termina proponiendo este nuevo problema: «Encontrar la curva que un cuerpo pesado debe recorrer, para que su distancia á un punto fijo varíe cantidades iguales en tiempos iguales»; problema que resuelve en una Memoria publicada asimismo en *Acta eruditorum*, 1694, con el título *Constructio propia problemati de curva isochrona paracentrica,* que tampoco encierra la explicación de su solución.

Jacobo Bernouilli busca la solución de estos problemas de Leibnitz y la publica en 1690, *Acta eruditorum. Analysis problematis antehac propositi de inventione lineæ descensus á corpore gravi percurrendæ uniformiter, sic ut temporibus æqualibus æquales altitudines emetiatur;* tratando la cuestión por análisis infinitesimal con el objeto, dice, de invitar á su autor á resolver el problema que les va á proponer, y propone el de la catenaria (ver esta voz).

Varignon generaliza el problema buscando la curva que un cuerpo debe describir en el vacío para aproximarse igualmente á la horizontal en tiempos iguales, siendo supuesta cualquiera la ley de la pesantez (*Nouvelle mécanique*, 1725).

Por último, es Mampertuis (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1699 y 1730) el que describe y resuelve completamente, y en su mayor generalidad, el problema de la línea isócrona, tomando la hipótesis de un medio resistente.

Ecuación.—La ecuación de esta curva en el vacío se obtiene fácilmente de la manera siguiente: Supongamos que el móvil, al llegar al punto x, posee un grado de velocidad igual á la que hubiera adquirido cayendo perpendicularmente de la altura Ay; tracemos zn, paralela á xy, y desde el punto x, la recta xm, perpendicular á la zn, y tomemos Ay por eje de las x, y será $Ay = x$, $xy = y$. Si consideramos á yz infinitamente pequeño, ó, lo que es igual, si tomamos yz como diferencial de Ay, mn será la diferencial de y, y el arco xn, la del elemento de la curva.

Ahora, por ser $xm = yz = dx$ y $mn = dy$, será

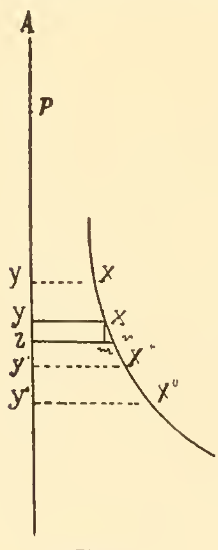


Figura 1.

$$xn = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

siendo la velocidad en el punto x igual á

$$\sqrt{Ay} = \sqrt{x}.$$

Si, pues, llamamos dt al tiempo de la caída, según el arco infinitamente pequeño xn, se tendrá

$$xn = dt\sqrt{x},$$

y por ser $dx = dt$, según la naturaleza del problema

$$xn = dx\sqrt{x},$$

y, por tanto,

$$dx\sqrt{x} = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

de donde

$$dy = dx\sqrt{x - 1},$$

é integrando

$$y = \int dx \sqrt{x-1} = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$$

lo que nos da en definitiva

$$y^2 = \frac{4}{9}(x-1)^3,$$

y haciendo $x - 1 = z$

$$\frac{9}{4} y^2 = z^3,$$

ecuación de una parábola cúbica cuya abscisa es igual á z, su ordenada es y y su parámetro tiene por valor $\frac{9}{4}$.

Propiedades. — Para obtener el punto en que la curva encuentra al eje de las y, si se hace $z = o$, se tendrá $x = 1$; de donde se desprende que el origen no esta en el punto A, sino en P, haciendo $AP = 1$.

Así, pues, para que el móvil descienda según la ley que marca el problema, antes de tocar el vértice P de la curva deberá tener una velocidad igual á la que adquiere un cuerpo cayendo libremente de la altura AP. Esta altura, siendo igual á la unidad, cuando el parámetro sabemos vale $\frac{9}{4}$, nos dice que el cuerpo deberá recorrer libremente los $\frac{4}{9}$ del parámetro antes de encontar la curva que luego recorrerá con las condiciones del problema.

Isodinámicas.

Del griego ἴσος, *igual*, y δύναμις, *fuerza*.

Definición.—Se denominan así las curvas que unen los puntos de la Tierra en que la intensidad magnética es la misma.

Historia. — Taylor con Hanksbe, determinaron el decrecimiento de la intensidad de la fuerza magnética con la distancia, y al propio resultado llegaron Muschenbræck y Mitchell en Inglaterra. El primero que se ocupó del trazado de estas curvas fué Hansteen, *Untersuchungen über den Magnetismus der Erde* (Christiania, 1819), habiéndole seguido MM. Duperrey, Sabine y otros en la publicación de mapas en que se indican.

Propiedades.—Estas líneas, según Rozet, difieren tanto de las pa-

ralelas al Ecuador terrestre, cuanto los meridianos magnéticos difieren de los meridianos terrestres; pero existe una cierta analogía entre las líneas isodinámicas y las líneas isotermas; las inflexiones son sensiblemente las mismas, y parece que los puntos de cada meridiano, en que la intensidad es un mínimum, son también los puntos de mayor calor.

— En un mismo lugar de la tierra la intensidad no es constante, como lo ha probado Mr. Lamont *(Carl's Repertorium für experimental, Physik,* t. IX, 1873) para Munich, en cuyo lugar ha aumentado de 1853 á 1871, disminuyendo, al propio tiempo, la declinación y la inclinación.

— En un mismo lugar, la intensidad parece presentar un mínimum hacia las diez de la mañana y un máximum hacia las diez de la noche.

— Se da también este nombre á ciertas líneas usadas en Termodinámica, que representan los cambios de volúmen y de presión que experimenta la unidad de peso de un cuerpo, cuando este cuerpo emite ó absorbe una cantidad de calor equivalente al trabajo exterior perdido ó producido.

Isogeotermas.

Del griego ἴσος, *igual;* γῆ, *tierra,* y θερμός, *calor.*

Definición.—Se da este nombre á las curvas que unen los puntos de igual temperatura en el interior de la tierra.

Historia.—Sobre estas líneas puede consultarse Humboldt *(Cosmos,* tomo I, pág. 198).

Propiedades.—Lo mismo los geólogos partidarios del calor central, que suponen que desde los 2.000 metros de profundidad aumenta el calor de un modo continuo, como aquellos otros que suponen que, desde cierta fracción del radio terrestre, la temperatura hasta el centro es uniforme y variante, según la fracción del radio, opinan que á los 1.500 ó 2.000 metros de la superficie del globo, las líneas isogeotermas son regulares y paralelas unas á otras, distando entre sí, más ó menos, según que la roca por donde pasan sea mejor ó peor conductora del calor.

— Entre las isogeotermas comprendidas entre los 1.300 metros y la superficie del globo no se observa regularidad alguna. Ellas se presentan más ó menos alabeadas y con numerosas inflexiones que dependen, no tan sólo del relieve del terreno, sino también de la temperatura del aire ambiente.

— La posición de estas líneas no siempre se pueden precisar por la

temperatura de los manantiales, puesto que ésta depende de causas muy complejas y numerosas, y se halla en relación con la temperatura de la capa terrestre de donde surge, con el calor específico del suelo y con la cantidad y temperatura de las aguas fluviales que difiere esencialmente de las que tienen las capas inferiores de la atmósfera. Los manantiales fríos podrán darnos la temperatura media sólo en el caso de que estén puros de toda mezcla con las aguas que descienden de las alturas ó con las que vienen de capas muy profundas, y que, además, recorran un trayecto subterráneo á la profundidad constante de 13 á 19 metros en nuestros climas y de poco más de un metro, según ha observado Boussingault, en las regiones equinocciales.

Isogónicas.

Del griego ἴσος, igual, y γῶνος, ángulo.

Definición.—Se da este nombre á las curvas determinadas por los puntos de la tierra que en el mismo instante presentan igual grado de declinación magnética.

Historia.—El cosmógrafo Alonso de Santa Cruz. *Navarrete. Noticia biográfica del cosmógrafo Alonso de Santa Cruz* (págs. 3 y 8), acometió en 1530, siglo y medio antes que Halley, la empresa de trazar el primer mapa general de las variaciones magnéticas. Deseo tan ardiente era entonces el de conocer de una manera exacta la dirección de las curvas de declinación magnética, que, en 1585, Juan Jaime hizo con Francisco Gali la travesía de Manila á Acapulco, sin otro objeto que probar en el mar del S. el instrumento que acababa de inventar para este uso. *Essai politique sur la Nouvelle Espagne.* (T. IV, página 110.)

La desviación de las líneas magnéticas, cuyo descubrimiento se atribuye ordinariamente á Gasendo, era todavía un secreto para el mismo Guillermo Gilbert, mientras que antes de él, Acosta, *Historia natural de las Indias* (T. I, c. 17), instruído por marinos portugueses reconocía en toda la superficie de la tierra cuatro líneas sin declinación y que condujeron, á consecuencia de los debates sostenidos por Enrique Bond y Beckborrow, á Halley á la teoría de los cuatro polos magnéticos.

Cristóbal Colón tiene el mérito incontrastable de haber sido el primero en descubrir *una línea magnética sin declinación* como á los 3º al O. del meridiano de una de las Azores, la isla de Flores. Humboldt. *Examen critique de la historie de la Geographie.* (T. III, páginas 44, 48 y 60). Este descubrimiento señala un punto memorable en

la historia de la Astronomía náutica, y ha sido justamente celebrado por Oviedo, Las Casas y Herrera. Los que con Livio Saunto atribuyen este descubrimiento á Sebastián Cabot, no tienen en cuenta que el primer viaje de este célebre navegante, emprendido á expensas de los comerciantes de Bristol, y coronado con la toma de posesión del continente americano, fué cinco años después de la primera expedición de Colón.

Estas líneas han sido figuradas en varios mapas; pudiéndose ver aquellos cuyo trazado es debido á Barlow y Duperrey en 1825.

Propiedades.—Las curvas isogónicas son casi todas sumamente irregulares. Todas convergen hacia su polo magnético N. situado sobre la bahía Baffin y la tierra de Banks, es decir, cerca del circulo polar ártico y hacia el polo magnético S. que está, según todas las probabilidades, entre los 14 y 15° del polo austral. En Europa, el punto en que la declinacióu es mayor, unos 30°, corresponde á Escocia é Irlanda. En el extremo NO. de Irlanda, la desviación es de 45°.

— En los mapas se señalan dos líneas sin declinación ó agónicas, muy sinuosas, las cuales no formarán probablemente más que una sola que se encontrará á través de las regiones polares. Una de ellas parte de la bahía de Hudson, atraviesa el Canadá, pasa cerca de New-York, continúa su trazado á través del Atlántico, roza el cabo de San Roque y viene próximamente en línea recta á cortar el meridiano de París hacia los 65° de latitud austral. Esta línea pasaba por París en 1663. La segunda línea sin declinación es menos regular y menos conocida. Se encuentra una rama al E. de Spitzberg y en el mar Blanco; luego se pierde su trazado sobre el continente asiático; se la viene á encontrar en el mar de Okhotsk, sigue las costas del Japón, y después de una fuerte inflexión, gana la India, que atraviesa de E. á O., pasa por el golfo de Bombay, tira hacia el E., corta Java, atraviesa las islas de la Oceanía, costa de Australia y se va á perder en el mar del Sur.

— Entre las dos líneas sin declinación mencionadas, es decir, en el Océano Atlántico, en Africa, en Europa y en la mitad occidental del Asia, la declinación es generalmente occidental; fuera de estas partes, es oriental.

— Las líneas isogónicas vienen á formar un ángulo de 30 á 40° con los meridianos (*Revista Minera*, 1890, pág. 125); pero no se puede establecer relación alguna entre dichas líneas.

— La declinación magnética experimenta variaciones seculares, anuales y hasta de hora en hora, por lo cual las líneas isogónicas se

modifican constantemente y su trazado resulta siempre imperfecto. Hasta entrado el siglo XVII no comenzó á generalizarse el conocimiento de la desviación regular de las líneas sin declinación.

— Si, por consecuencia de su movimiento secular, llegan algunas de estas líneas á pasar de la superficie del mar sobre un continente ó sobre una isla un tanto considerable, se detienen allí largo tiempo y se doblan á medida que avanzan más allá.

— Según M. Wolf, *Correspondance entre las variations du magnetisme terrestre et les taches solaires, Comptes rendus* (t. XLVI, pág. 485, 1857), las variaciones medias de cada año dependen sensiblememte de la frecuencia de las manchas solares. En Paris es actualmente de —5′ por año.

— Aquellos lugares en que la magnitud magnética es invariable, tales como la parte occidental de las Antillas y el Spitzberg, ó no experimentan sino lentas variaciones seculares, son los únicos en que se podrán fijar las líneas de demarcación por medio de la brújula, sin tener en cuenta las correcciones de la declinación de la aguja y sin exponerse al peligro de ser cambiada á la larga por la acción magnética del globo la superficie legalmente comprobada de las propiedades. *(Philos. Transact for*, 1806, 2.ª parte, pág. 248). *On the permanency of the compass in Jamaica since*, 1660.

— Una de las cuestiones cuya solución importa más á la teoría física del magnetismo terrestre es, saber si los dos sistemas ovalados de líneas isogónicas, en apariencia aislados, ó sean el de las regiones del Norte del Asia Oriental, entre la cadena de Werchojansk, Jakontsk y la Corea Septentrional, y aquel del mar del Sur, casi bajo el meridiano de Pitcairn y del Archipiélago de las Marquesas, entre los 20° de latitud boreal y 45° de latitud austral, deben conservar su forma singular durante todo un siglo, ó si al cabo se disolverán desarrollándose. (Erman, *Ann. de Poggend*, t. XXI, pág. 129.)

Isológicas.

Consultar los trabajos de E. de Jonquieres. *Nouvelles Annales de Mathématiques* 1864, sobre un sistema de generación especial de ciertas curvas.

Isoparamétricas.

Del griego ἴσος, *igual*; παρά, *junto á*, y μετρον, *medida*.

Definición.—Se designan con este nombre las curvas que tienen igual parámetro.

—El parámetro es la constante que se encuentra en la ecuación de una curva cualquiera. Por ejemplo, en la curva cuya ecuación es

$$y^4 = a\,x\,y + 4x^2,$$

a es el parámetro que representa una linea recta.

— En la elipse, hipérbola y parábola el parámetro es la doble ordenada que pasa por un foco.

— El parámetro viene á ser en las curvas cuya ecuación le contienen, la línea que determina sus dimensiones.

Isoperimetras.

Del griego ἴσος, *igual*, y περίμετρον, *perímetro*.

Definición.—Reciben este nombre las curvas que tienen un mismo perimetro.

Historia.—Con motivo de la contienda científica entablada entre los hermanos Jacobo y Juan Bernouilli, el primero propuso al segundo el problema de *encontrar una curva, entre todas las que tengan igual perímetro ó la misma longitud, tal que en ciertas condiciones encierre el mayor ó más pequeño espacio, ó que, haciendo una revolución alrededor de su eje, produzca la mayor ó más pequeña superficie ó los más grandes ó más pequeños sólidos.* Juan Bernouilli da la solución, que habia comunicado á Leibnitz en el *Journal des Savants*, aunque sin análisis. Entonces su hermano pidió á éste la demostración de sus resultados por no concordar con los suyos propios, naciendo de estas cuestiones el motivo de la división entre ambos hermanos.

Jacobo Bernouilli publicó la solución de este problema, bajo el título de *Analysis magni problematis isoperimetrici (Acta eruditorum*, 1701) poco tiempo antes de morir.

El descubrimiento del cálculo de variaciones por Lagrange (*Mémoires de Turin*, t. II, 1762), es sin duda debido á la solución que él da del problema de las isoperimetras.

En 1718 se apercibe Juan Bernouilli de los errores que contiene la solución que él dió sobre este problema, y refunde toda la teoria pu-

blicando la obra *Remarques sur ce qu'on á donné jusqu'ici de solutions des problemes sur les isoperimètres (Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, 1718) sobre distintas relaciones que las de su hermano. En esta obra manifiesta que de este problema obtuvo dos soluciones, las cuales había dado á conocer á la *Académie Royale des Sciences*, la cual no la publicó hasta las Memorias de 1706. La razón de este retraso la explica M. de Fontenelle en la *Histoire de l'Académie* de este año.

Esta teoría, desarrollada en seguida por Euler en su Memoria *Problematis isoperimetrici in latissimo sensu accepti solutio generalis* que presentó en 1732 á la Academia de San Petersbourg, y que se publicó en los *Commentaires* de esta Academia, fué seguida por otra en 1736. En ellas, Euler rompe la tradición seguida en la solución de este problema y lo trata en formas generales, y sobre todo, donde lo desarrolla por completo es en su bella obra *Méthodus inveniendi lineas curvas maximi minimive propietate gudentes* con ocasión del descubrimiento del cálculo de las variaciones.

Propiedades.—De todas las curvas planas de igual longitud, la que envuelve la mayor superficie es la circunferencia de círculo.

— Dados dos puntos en un plano, la curva de longitud dada cuyos extremos sean estos dos puntos fijos, y cuyo segmento con relación dada en el plano, sea un máximum, es un *arco de círculo.*

— De todas las curvas isoperímetras que se pueden trazar sobre un plano entre dos puntos dados, aquellas que girando al rededor de un eje dado en el plano engendran la superficie máxima ó mínima son dos *catenarias* cuyas curvaturas están en sentido contrario.

— De todas las áreas planas envueltas por dos curvas isoperímetras, aquella que engendra el volumen mínimo por revolución es la *curva elástica*..

— La curva que girando alrededor de un eje engendra la superficie mínima que encierra un volumen dado, tiene por ecuación:

$$dx = \frac{(y^2 \pm b^2)\,dy}{\sqrt{4a^2y^2 - (y^2 \pm b^2)^2}},$$

la cual, si la constante b es nula, representa un círculo ó el eje de las x, y si b es diferente de cero, pertenece á la curva descrita por uno de los focos de una elipse ó de una hipérbola que rueda sin resbalamiento sobre el eje de las x, como lo ha demostrado Mr. Delaunay. (*Journal de Mathématiques* de M. Liouville, t. VI, pág. 309.)

— Asimismo se debe á Mr. Delaunay (*Journal de Liouville*, t. VIII, página 241) el siguiente importante teorema:

«La curva isoperímetra de longitud dada, que encierra un área máximum sobre una superficie, goza de la propiedad que en cada uno de sus puntos su radio de curvatura es proporcional al coseno del ángulo formado por su plano osculador y el plano tangente á la superficie.»

Isopiézica.

Definición.—Se llama así en Hidráulica á la línea ideal que une los extremos de las alturas piezométricas de todos los puntos de una conducción.

— Las alturas piezométricas son de gran interés para la determinación de las presiones y del gasto, y el conocimiento de esta línea es en muchos problemas de no escasa importancia.

Ver *Traité d'hydraulique* de Bresse, Collignon, etc.

Isóptica y ortóptica.

— Se ha nombrado *isóptica* á la línea lugar del vértice de un ángulo constante formado por dos tangentes á una curva.

— Si el ángulo es recto, la línea se llama *ortóptica.*

— La isóptica y ortóptica de las cicloides y epicicloides, son estas mismas curvas prolongadas ó reducidas.

— Pueden verse estudios sobre estas líneas en *Intermediaire des Mathematiciens,* 1895, págs. 278, y 1896, pág. 291; y también *Nouvelles Annales,* 1846, págs. 127, y 1876, pág. 97, y en *Nouvelle Correspondance Mathématique,* 1877, pág. 233, etc.

Isoquimenas.

Del griego, ἴσος, igual, y de χειμών, invierno.

Definición.—Se da este nombre á las curvas que unen los puntos de la Tierra que tienen la misma temperatura media en invierno.

Son, pues, un caso particular de las líneas isotermas. (Ver esta voz.)

Historia.—Este nombre se debe á Humboldt, y sobre este punto es aplicable lo que se dice, en el propio lugar, al tratar de las curvas isotermas.

Propiedades.—Las líneas isoquímenas no son, de ningún modo, paralelas á las isotermas.

— Consultando un atlas térmico, se ve que la isoquímena de 0° pasa

por Irlanda, se aproxima á Spitzberg; después, dirigiéndose al SO. y tocando en toda la Escandinava, atraviesa Alemania, costea Francia, y bajo la influencia de la cordillera alpina, remonta el paralelo de 45°, en donde encuentra á la isótera de 22°,5. A partir de aquí, se dirige á la Crimea, en donde su curvatura se hace mucho mayor, y pasa por el Asia Menor aproximándose al paralelo 36: corta la cordillera caucásica, atraviesa el Caspio y sigue por el Turquestán. Por consiguiente, la amplitud de sus oscilaciones llega á ser de más de 40° de latitud, y como en el Cáucaso encuentra la isótera de 25°, existe en este punto, entre la temperatura media del mes más caluroso y la del frío, la diferencia de 25°. Mayor es todavía la diferencia de isóteras é isoquímenas en el Asia, en donde, pasando el Ural, la isótera de 15° corta en ángulo recto á la isoquímena de —20°, ó sean 35° entre las temperaturas de invierno y estío, que distan aún más en la Siberia.

Isoraquias.

Del griego *isos*, igual, y *rachia*, pleamar.

Definición.—Se da este nombre á las curvas que unen los puntos del globo en que tiene lugar la pleamar al mismo tiempo.

Historia.—Estas líneas se conocen también con el nombre de *cotidales* (del inglés, *tide*, marea); han sido construidas por Whewell, que en Mayo de 1833 presentó á la Sociedad Real de Londres una Memoria titulada *Ensayo de una primera aproximación de una carta de líneas cotidales*, en cuya Memoria indica su autor los medios de verificar el trazado de estas líneas en todos los mares y figuran en muchos atlas de Geografía física. Gillman, *Enc pop ilus. (Meteorología*, tomo IV, pág. 91), pudiéndose ver La Sala, *Construcciones en el mar* (página 121). Mr. Chazallon ha ideado un aparato llamado *mareógrafo* que determina la altura de las mareas.

Propiedades. —Los atlas en que se representan estas líneas, permiten ver con facilidad la marcha que sigue la onda inmensa que constituye la marea. En los mares abiertos y grandes como el Océano, esta onda se propaga de una manera regular y con una velocidad igual á la del movimiento diurno, aumentada de la velocidad propia de la luna. En las inmediaciones de los continentes este movimiento se aminora.

— La configuración de las costas ejerce una gran influencia sobre la altura de las mareas, modificando las líneas isoraquias. Todas las demás circunstancias iguales, la altura de la marea es tanto mayor

cuanto más la dirección de la costa se aproxima á ser perpendicular á la dirección de la corriente producida por la marea.

— El estudio de estas líneas ha perdido ya la importancia que adquirió en cierto tiempo.

Isóteras.

Del griego ἴσος, igual, y θερος, estío.

Definición.—Se da este nombre á las curvas que unen los puntos de la Tierra que tienen la misma temperatura media en estío.

Son, pues, un caso particular de las líneas isotermas. (Ver esta voz.)

Historia.—Este nombre se debe á Humboldt, y sobre este punto es aplicable lo que se dice en el propio lugar al tratarse de las curvas isotermas.

Propiedades.—Las líneas isóteras no son, de ningún modo, paralelas á las isotermas.

— Consultando un atlas térmico, se nota que en toda la extensión de la Europa continental estas curvas cortan en ángulo recto á las isoquímenas, pero al aproximarse á las Islas Británicas ó á las Escandinavas, retroceden bruscamente, de tal modo en algunos puntos, que las isotérmicas se dirigen sin encorvarse al SE., marcando una trayectoria muy larga.

— Estas líneas se alejan poco de los círculos de latitud, con los cuales, no obstante, forman ángulo, cuyo valor es mayor á medida que se aproximan al continente asiático.

— En el Atlántico, estas curvas casi pasan paralelas á las isoquímenas. La temperatura máxima estival difiere de la mínima invernal tan sólo en unos 5°; así, en el NO. de la Islandia, la isótera de 5° coincide con la isoquímena de 0°, y próxima á las Azores, la curva de 20°, correspondiente al mes de Julio, encuentra á la de 15°, temperatura media del mes de Enero.

Isotermas.

Del griego ἴσος, igual, y θερμός, caliente.

Definición.—Se da este nombre á las curvas que unen los puntos de la Tierra que tienen la misma temperatura media anual.

Clasificación.—Si se hacen pasar líneas por los puntos que poseen las mismas temperaturas medias de invierno, se llaman las *isotermas de invierno ó isoquímenas.*

Semejantemente se obtendrán las *isotermas de verano,* que reciben el nombre de *isóteras.*

Historia.—El sistema de estas líneas, así como su denominación, fué propuesto junto con las de *isóteras ó isoquímenas* (ver estas voces) en 1817 por Humboldt, *Sur les lignes isothermes. (Mem. de Phys. et de Chim. de la Société d'Arcueil,* t. III, págs. 143-165), siendo objeto de detenidos estudios y aumentado su número por Kœmtz. *(Metéreologie,* t. II, páginas 41-43-67 y 96.) Dove, en el *Jahrbuch* de Schumacher para 1841 (pág. 289); Mahlmann, en la traducción (2.ª parte, pág. 60) de la obra de Humboldt, *Recherches sur les causes des inflexions des lignes isothermes, en l'Asie centrale;* Trevelyan, en el *New Edimb. Philos (Journal de Jameson,* núm. 18, pág. 154); Arago, *Comptes rendus*, t. I, pág. 268); Mr. Marié Davy, *Metéreologie;* E. Combescure *(Sur quelques, questions que l'on peut rattacher á la théorie des lignes isothermes permanentes*, 1870), etc.

Propiedades.—Estas líneas son muy sinuosas, afectando algún paralelismo entre si. Todas ellas presentan sobre las costas occidentales de Africa y Europa una convexidad con respecto al polo, y todas se deprimen hacia el Ecuador; en el O., hacia la América del Norte, y en el E., hacia el interior de Rusia; luego se elevan sobre las costas occidentales de América y orientales del continente Asiático.

— Mientras más se avanza hacia el N., más las líneas isotermas se separan de la dirección de los paralelos terrestres. Su irregularidad viene á ser más pronunciada á medida que se avanza al N., y parece disminuir, al contrario, aproximándose al polo Austral.

— De la disposición de estas líneas que se deprimen constantemente hacia el S., en el interior de los continentes, mientras que en los mares se elevan hacia el N., resulta que no es en el mismo polo donde reina el mayor frío. Según los meteorologistas, existen dos polos de frío, es decir, dos puntos del globo que presentan un mínimum de temperatura media. Sir David Brewster coloca uno de estos polos en América á los 73° de latitud y 102 de longitud O. (cerca del cabo Walker), y el otro, en Asia, á los 73° de latitud y 78 de longitud. Mr. Kœmtz asigna á estos puntos la temperatura media, para el primero, de 19°, y para el segundo, de —17°.

— La isoterma media anual de mayor temperatura del globo es de unos 27°5, y se la conoce con el nombre de *ecuador térmico;* y las de menor temperatura, las que pasan por los polos de frío.

— Todo lo que altera los poderes absorbentes y emisivos en algunos puntos situados en paralelos iguales, produce una inflexión en las líneas isotermas. La naturaleza de estas inflexiones, los ángulos en que las líneas isotermas, isóteras é isoquímenas cortan los círculos de latitud; la posición del vértice de su convexidad ó de su concavi-

dad con relación al polo del hemisferio correspondiente, son efectos de causas que modifican, más ó menos poderosamente, la temperatura bajo las diferentes latitudes geográficas. La latitud del lugar no influye sino hasta cierto punto en el clima, como lo prueba la isoterma de 0° que pasa en el hemisferio boreal por puntos cuya latitud difiere en 23°. La gran regularidad de la curva austral, que sigue constantemente el paralelo de 65° latitud, se explica porque bajo dicha latitud la superficie es oceánica y no influye en ella, ni la altitud, ni las demás causas modificadoras del clima en los continentes; por el contrario, la curva boreal presenta grandes irregularidades por pasar por continentes y océanos.

— La isoterma de 0°, correspondiente al hemisferio austral, no es la única de irregularidad absoluta, sino que todas las comprendidas entre ella y el paralelo 40 son líneas circulares. Así, pues, se ve que la temperatura es más uniforme y está mejor distribuida en el hemisferio austral que en el boreal.

— Examinando un atlas térmico, se ve que si bien las inflexiones de la curva austral son mayores que las correspondientes á la boreal, y mientras la primera pasa en dos puntos por latitudes inferiores á 20°, la segunda no desciende en ningún punto de su trayectoria más de los 25, esta diferencia consiste en las corrientes frías que de los mares antárticos se dirigen hacia el Ecuador, mientras que los depósitos oceánicos del hemisferio boreal están casi por completo separados del mar Artico.

— Las isotermas correspondientes á puntos del globo situados más allá de los 40° de latitud boreal, se acercan al polo en el eje de los dos océanos, y al Ecuador en el de los continentes. La isoterma de 0 desciende de un modo muy notable hacia la America del Norte y el Asia, mientras que en el Atlántico se acerca muchísimo al polo. Por eso los países cuya latitud pasa de los 40° son muy fríos y nivosos. Por el contrario, no solamente no hiela en el Atlántico, sino que las corrientes termales originarias de la región tropical le comunican hasta el paralelo 70 tal cantidad de calor que templa á la atmósfera; esto explica la inflexión de la isoterma boreal de 0 hasta los 73°, mientras que la curva austral no pasa de los 65; pero inmediatamente que la primera toca en las costas escandinavas, retrocede muchos grados hacia el S., llegando en la Siberia hasta el 50.

— Estas líneas sólo indican la temperatura media anual, ó sea el cociente de dividir por doce las temperaturas medias de todos los meses del año; pero no bastan para determinar el clima de la región, el cual depende de otras muchas causas que hacen variar sus

formas. Estas causas, unas tienden á elevar la temperatura y otras á hacerla descender. Entre las primeras pueden citarse la proximidad de una costa occidental en la zona templada, la configuración particular de los continentes que están divididos en penínsulas numerosas, los mediterráneos ó los golfos que penetran profundamente en las tierras, la orientación, la dirección S. y O. de los vientos reinantes, la falta de pantanos, la carencia de bosques, la serenidad constante del cielo durante los meses de verano, y la proximidad de una corriente pelágica si sus aguas son más calientes que las del mar circundante. Entre las segundas se colocan la altura sobre el nivel del mar de una región que no presente cimas considerables, la cercanía de una costa occidental para las latitudes altas y medias, la configuración compacta de un continente cuyas costas están desprovistas de golfos, una gran extensión de tierras hacia el polo, una posición geográfica tal, que las regiones tropicales de igual longitud estén ocupadas por el mar, una cadena de montañas que por su forma y dirección se oponga al acceso de los aires calientes, los bosques de gran extensión, un buen número de pantanos, un cielo nebuloso de verano y muy puro de invierno.

— Para que en el trazado de las líneas isotermas no influya la altura sobre el nivel del mar, y al objeto de hacer más homogéneas las relaciones térmicas entre los diversos puntos del globo, elimínase la altitud á que está situado cada uno de aquéllos, empleando las fórmulas usuales de corrección barométrica.

— Considerando las diferentes zonas en que la superficie terrestre queda dividida por las líneas isotermas, se ha hecho la siguiente denominación de las mismas:

Zonas isotermas.	—Tórrida ó ecuatorial de	30°	á	25
	Caliente.............	25	á	20
	Dulce...............	20	á	15
	Templada...........	15	á	10
	Fría................	10	á	5
	Muy fría............	5	á	0
	Glacial..............	0	á	—x

— Grande es la influencia isotérmica en la distribución de las plantas en la superficie del globo, aparte de excepciones que naturalmente hay que atribuir á condiciones especiales de la localidad; pero es mayor aún la de las líneas isóteras é isoquímenas, como manifiesta Gillman. (*Enciclopedia pop.-ilus.* T. II, pág. 578.)

Cuando se señalan sobre las cartas mensuales los puntos de la tierra en que la temperatura está por encima ó por debajo de la temperatura media en la misma latitud; las líneas de igual diferencia que se obtienen se denominan *isanómalas*.

Mr. Lamé, *Théorie mathématique de la chaleur*, considera en el plano y en la esfera sistemas de líneas á las que ha dado la denominación de isotermas, y que gozan, entre otras, de las propiedades siguientes:

— Los solos sistemas circulares isotermos, tanto en el plano como en la esfera, son los círculos concéntricos ó del mismo polo y los círculos que pasan por dos puntos.

— Los solos sistemas circulares dobles, isotermos y octogonales á un mismo tiempo, sea en el plano ó sobre la esfera, son igualmente los círculos que pasan por dos puntos ó los del mismo polo.

En Termodinámica se llaman isotermas á las líneas que representan los cambios de volumen ó de presión que experimenta la unidad de peso de un cuerpo cuando la temperatura permanece constante.

— Las líneas isotermas representan, pues, las propiedades elásticas de la substancia á la temperatura considerada.

—La forma de estas líneas depende de la naturaleza del cuerpo considerado. En el caso de un gas se tiene

Figura 1.

$$pv = p_0 v_0 (1 + \alpha t)$$

para cada valor dado á t, el segundo miembro es constante; la ecuación de una línea isoterma es, por consiguiente,

$$pv = \text{constante},$$

ecuación que representa una hipérbola equilátera referida á sus asíntotas.

— Cuando el punto figurativo se mueve sobre la curva isoterma (figura 1.ª) en el sentido *MN.*, es decir, cuando el volumen aumenta, se tiene el calor absorbido; cuando el volumen disminuye, ella nos da el calor emanado.

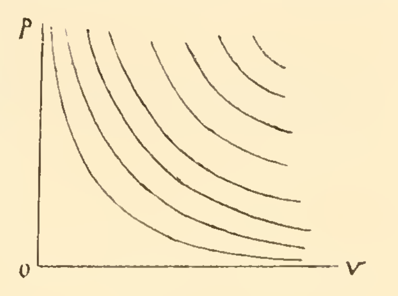


Figura 2.

— Dando á *t* valores diferentes se tendrá una familia de curvas (figura 2.ª), que serán las líneas isotermas para diferentes temperaturas.

Para otras propiedades de estas líneas, ver *Adiabáticas.*

Caso particular. — Consideremos el caso de un cuerpo, en parte en el estado líquido y en parte en el estado de vapor. Como la presión es independiente del volumen cuando la temperatura es dada, la línea isoterma es una paralela al eje de los volúmenes. Si el volumen viene á ser suficientemente grande, todo el cuerpo pasa al estado de vapor, y el diagrama se continúa por una curva *BC* (fig. 3.ª), análoga á una hipérbola equilátera; si, por el contrario, el volumen es suficientemente reducido, todo el cuerpo pasa al estado líquido, y si se quiere disminuir aún el volumen, bastará emplear presiones grandes y rápidamente crecientes, lo que nos da una rama de curva *AD*, que se eleva bruscamente, y muy aproximada del eje de las presiones.

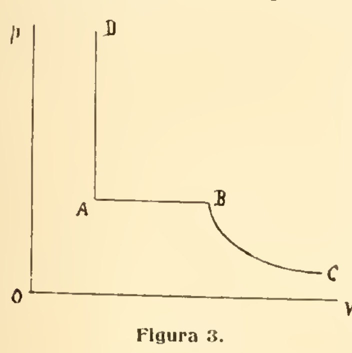


Figura 3.

Iso-termobata.

De las voces griegas *isos*, igual; *thermos*, calor, y *bathos*, profundidad.

Definición. — Dase este nombre á las líneas que unen los puntos de igual temperatura á diversas profundidades del mar.

— El conjunto de estas líneas forman los llamados *iso-termobatos*, por medio de los cuales se facilita notablemente la inteligencia de las observaciones de las temperaturas á las diferentes profundidades del mar.

Puede consultarse la obra de Gillman, *Enciclopedia popular ilustrada. Metereologia*, t. IV, pág. 84.

Isotrepente.

Definición.—Reciben este nombre las curvas, tales como la elipse, que goza de la propiedad de tener por sintrepente otra igual á ella. (Ver *Sintrepente.*)

J

Jacobiana.

Definición.—Si consideramos tres curvas primitivas dadas por sus ecuaciones

$$\varphi = a_x{}^m = 0, \quad \psi = a'_x{}^{m'} = 0, \quad \varkappa = a''_x{}^{m''} = 0,$$

se da el nombre de jacobiana á la curva representada por el desvanecimiento de la determinante funcional, es decir, por

$$\frac{1}{m \,.\, m' \,.\, m''} \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \varkappa}{\partial x_1} & \frac{\partial \varkappa}{\partial x_2} & \frac{\partial \varkappa}{\partial x_3} \end{vmatrix} \equiv (aa'a'')\, a_x{}^{m-1} a'_x{}^{m'-1} a''_x{}^{m''-1} = 0.$$

Historia.—El nombre de jacobiana dado á esta curva, es debido á estar representada por una determinante funcional, ó sea el jacobien, según el nombre de su inventor Jacobi, *De determinantibus functionalibus (Journal de Crelle*, t. XXII). Se puede consultar Hesse, *Journal de Crelle* (t. XLI, pág. 286), y Clebsch, *Curven deren Coordinaten ellipt. Functionen eines Parameters sind (Journal de Crelle*, tomo LXIV); Imber, *Cours de Géométrie Analitique* (pág. 845).

Propiedades.—La jacobiana es una curva del orden $m+m'+m''-3$, y viene á ser el lugar de los puntos en que las polares lineales, relativamente á las tres curvas dadas, se cortan en un mismo punto.

— Esta línea pasa por los puntos comunes á las tres curvas dadas. En efecto; si se multiplican las dos primeras líneas del determinante funcional por x_1, x_2 respectivamente, y se le suma á la tercera multiplicada por x_3, esta última estará ahora compuesta de los términos

$m\varphi$, $m'\psi$, $m''\chi$, y el determinante se desvanece al mismo tiempo que estas funciones. En este caso se presenta una particularidad muy importante para las aplicaciones de esta línea y que se puede expresar por la siguiente propiedad.

— La jacobiana de tres curvas $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\chi = 0$, toca en cada uno de sus puntos comunes la curva $\chi = 0$, cuando φ y ψ son del mismo orden; si el punto común es un punto doble para χ, este punto será asimismo un punto doble para la jacobiana, y las tangentes de esta última curva en este punto se confunden con las de $\chi = 0$.

— Si todas las curvas de un haz tienen en un punto fijo un punto múltiple del orden r, la jacobiana tiene en el mismo lugar un punto múltiple del orden $3(r-1)$. Como todas las primeras polares de una curva algebraica tienen, en un punto múltiple del orden r de esta última, un punto múltiple del orden $r-1$, y la jacobiana del haz de estas polares es al mismo tiempo la hessiana de la curva primitiva, resulta que la hessiana posee, en un punto múltiple del orden r para la curva, un punto múltiple del orden $3r-4$.

— La jacobiana es, en ciertas circunstancias, idéntica á la curva de Hermite (ver esta voz).

Jubizí.

Definición.—Este nombre se ha aplicado en la antigüedad á una cierta clase de arcos, cuya forma hoy no está bien determinada cuál pueda ser.

Historia.—En las *Ordenanzas de Sevilla* (Tit. *Albañiles*, fol. 15-V) se lee: «..... assi redondos y jubizies, como escazaris».

Junquillo.

Definición.—La moldura cuyo perfil es redondo ó semi-circular.

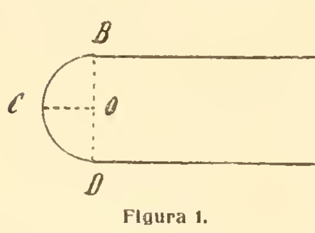


Figura 1.

Historia.— Esta denominación se encuentra usada por Fr. Lorenzo de San Nicolás *(Arte y uso de la Arquitectura*, p. I, cap. XXXI), y Villaamil *(Arqueología Sagrada*, pág. 51) aplica este nombre á las contracanales de las columnas en su tercio inferior.

Clasificación.— Si el semicírculo que forma el junquillo es saliente, se denomina *directo* (fig. 1.ª), y si entrante, *inverso* (fig. 2.ª). También recibe el nombre de *bocel ó toro*

cuando su radio es de cierta importancia, y se le llama *baqueta* cuando es muy pequeño, como se la encuentra en los nervios de las bóvedas de la Edad Media, en los hacecillos de las columnas, ó reemplazando á las aristas en los pies derechos de los vanos.

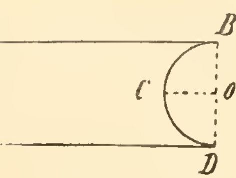


Figura 2.

Trazado.—Unidos los puntos B y D por una recta, se hará centro en el punto medio O de ella, y con un radio $OD = OB$, se trazará la semi-circunferencia BcD, que será el perfil buscado.

K

K. (Curva).

Curva que afecta la forma de la letra griega $\varkappa$, *cappa*; con centro y dos ejes de simetría.

—Su ecuación, cuando está dirigida según el eje Ox, es

$$x^2 = \frac{y^4}{a^2 - y^2},$$

y cuando lo está según el eje Oy,

$$y^2 = \frac{x^4}{a^2 - x^2}.$$

—Las ecuaciones polares en ambos supuestos son:

$$r = a \cdot \text{cotg} \cdot \theta \quad \text{ó} \quad r = a \cdot \text{tg} \cdot \theta.$$

—Ver para su construcción y propiedades: Barrow, *Lectiones geometricæ;* el *Journal de Mathem. Speciales,* 1895, pág. 201, y 1887, página 253, y el *Nou. Ann.*, 1864, pág. 41, etc.

Kampila de Eudoxio.

No se sabe á qué curva se aplicó este nombre, y que parece sirvió para resolver el problema de la duplicación del cubo.

Se cree, y así lo dice Tannery, *Mém. de Bordeaux,* T. II, 1878, página 277 á 283, que es la curva cuya ecuación cartesiana es

$$a^2 x^4 = b^2 (x^2 + y^2),$$

y cuya ecuación polar es

$$r = \frac{b^2}{a \, . \cos^2 \theta}.$$

Kohlenspitzencurve.

Esta línea, estudiada por Mr. Schoute, y cuya denominación en español parece ser *curva de punta de carbón*, carece de especial aplicación, y se puede ver un particular estudio de la misma consultando la obra *Archiv de Grünert*, 1885, y *Geom. de la Régle*, 1890, pág. 133, de G. de Longchamps.



L

Larga inflexión.

Definición. — En las Máquinas, al objeto de asegurar el movimiento rectilíneo alternativo de una varilla, se emplea la siguiente disposición: en el extremo de un balancín representado en la figura 1.ª por la recta OA y móvil alrededor de un eje horizontal proyectado en O, están articuladas á uno y otro lado dos bielas iguales, cuya proyección común es la recta AB. Los extremos de estas bielas que corresponden al punto B, están articulados por medio de dos bridas iguales proyectadas en BC, movibles alrededor de un eje horizontal proyectado en C, formando lo que se llama un contrabalancín. A las dos bielas está fijo en su punto medio un eje horizontal proyectado en M, al cual está articulado el extremo de la varilla que se trata de guiar. Para darse cuenta del movimiento que puede tomar el eje M, basta considerar el lugar descrito por un punto determinado M de una recta móvil AB, sujeta á apoyar sus extremos sobre dos circunferencias, cuyos centros son O y C, y sus radios, OA y CB. Este lugar es el que se conoce con el nombre de *curva de larga inflexión*.

Historia. — En las Memorias de la *Société Royale des Sciences*, de Lille, de 1836 y 1837, pág. 5 y siguientes, se encuentra dada y discutida la curva de larga inflexión, especie de *lemniscoide* (nombre con que la designó J. H. Vincent, *Nou. Ann.*, 1884, pág. 64) del sexto grado, que goza de las propiedades que luego precisaremos. Mr. Babinet comunicó á la *Société Philomatique*, el 21 de Abril de 1838, un trabajo sobre la Memoria anterior. Este físico dedujo la ecuación de la curva por el principio de las velocidades virtuales (*Bulletin de la Société Philomatique* y *Journal de l'Institut*, 1.ª sección).

Asimismo, Mr. Prony, en una Memoria inserta en los *Annales des Mines*, en 1826, y Mr. Vincent en otra, *Théorie du paralelogramme de Watt et de la courbe á longue inflexion*, inserta, en 1837, en *Recueil de la Société de Lille*, se han ocupado particularmente del estudio de esta

línea, siendo más ventajoso el calcular las coordenadas del punto M para una posición dada del balancín, como lo hace Mr. Belanger (*Traité de Cinématique,* pág. 256), que es como lo expresamos á continuación.

Ecuación.—Sean Ox y Oy los ejes coordenados trazados por el punto O, horizontal el primero y vertical el segundo, y sean MD

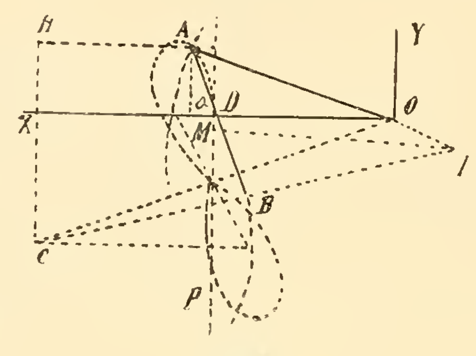


Figura 1.

y OD las coordenadas y y x del punto M, cuyos valores tratamos de determinar.

Para ello, consideremos

$$OA = R,\ CB = r,\ AB = l,\ AM = \lambda,\ AOX = \alpha,$$

y tracemos la recta AH paralela á Ox y las Aa y CH paralelas á Oy Se tendrá

$$Oa = R\cos\alpha \qquad \text{y} \qquad Aa = R\,\text{sen}\,\alpha,$$

de donde se deducen las distancias CH y AH, y por consecuencia, la hipotenusa AC del triángulo rectángulo AHC y el ángulo agudo CAH. En el triángulo ABC se conocerán los tres lados, y se puede deducir el ángulo CAB. La suma de los ángulos CAH y CAB se encuentra ahora conocida; este es el ángulo de AB con el eje Ox, que representaremos por β. Y se tendrá

$$x = R\cos\alpha + \lambda\cos\beta,$$

$$y = R\,\text{sen}\,\alpha - \lambda\,\text{sen}\,\beta.$$

Este cálculo es indispensable para apreciar la separación entre

la curva y la tangente en el punto múltiple, que un dibujo hecho á gran escala pondría de manifiesto.

Forma y propiedades.— La curva de larga inflexión tiene la forma de un 8 alargado, y el punto múltiple está situado sobre la recta que une los centros O y C.

La tangente en el punto múltiple se confunde sensiblemente con la curva en una larga extensión, de manera que en los límites convenientes, el punto M puede ser considerado como describiendo aproximadamente una línea recta.

—A partir del punto M hacia arriba, la curva se separa de la tangente al punto múltiple, quedando á la izquierda de esta línea, y que, por la parte de abajo del punto M, la curva se separa de la tangente quedando á su izquierda. En ambas porciones, superior é inferior, cambia la curva de sentido formando á manera de folios.

Construcción.—Esta curva puede ser construída por puntos, porque si se da al balancín una posición cualquiera AO, el punto B se obtiene por la intercesión de dos arcos de círculo descritos desde los puntos A y C como centros, con radios respectivamente iguales á la longitud de la biela y á la del contrabalancín; la posición de la biela queda así obtenida, y basta marcar el punto M cuya distancia al punto A es conocida.

Para trazar la tangente en el punto M, se prolongará el radio CB hasta su encuentro en I con el radio OA, y este punto I será el centro instantáneo del movimiento de la biela; por consiguiente, trazando la MI se tendrá la normal en M á la curva descrita, y trazándole una perpendicular por el punto M, ésta será la tangente.

Caso particular. — En el caso particular de que el balancín y el contrabalancín sean iguales, que es el más común, la curva de larga inflexión recibe particularmente el nombre de curva de Watt (ver esta voz).

Latitud.

Del latino, *latitudo*.

Latitud celeste.—Definición.— Se llama latitud de un astro al arco del círculo de latitud comprendido entre la eclíptica y el centro del astro considerado.

Clasificación.— La latitud puede ser *geocéntrica* ó *heliocéntrica*, según que se suponga á la tierra ó al sol colocado en el centro de la esfera celeste.

Propiedades. — La latitud de un astro es boreal ó austral, según

esté al N. ó al S. de la eclíptica, y se cuenta de 0° á 90° á partir de esta línea.

La latitud sirve de coordenada para con la longitud, fijar la posición de un astro ó de un punto cualquiera sobre la esfera celeste. Su valor no se determina por la observación, sino que se deduce de otras coordenadas obtenidas directamente usando las fórmulas de transformación.

— Como el sol se mueve en la eclíptica, su latitud geocéntrica es 0°; pero para los planetas, esta latitud varía desde 0°, que es la de los puntos en que sus órbitas cortan la eclíptica, hasta una magnitud igual á la inclinación del plano de aquéllas con relación al de ésta. Esto es lo que ha hecho imaginar el *zodiaco*, banda ó zona de la esfera celeste que contiene las órbitas de los planetas.

— La latitud heliocéntrica es siempre la misma cuando un planeta se encuentra en el mismo punto de su órbita, mientras que la geocéntrica varía con los cambios de posición de la tierra con relación al planeta.

— Las latitudes de las estrellas no sufren otras alteraciones que las causadas por la aberración de la luz y por una pequeña variación, nombrada secular, debida á un cambio extremadamente pequeño de la eclíptica.

Latitud terrestre.—Definición.— Se llama latitud de un punto de la tierra al arco del meridiano comprendido entre este punto y el ecuador.

Propiedades.— La latitud es boreal ó austral, ó positiva ó negativa, según que el punto á que se refiere está en el hemisferio boreal ó austral, y se cuenta de 0 á 90° desde el ecuador hacia los polos. También se dice septentrional ó meridional.

— Todo lugar situado en el ecuador tiene 0° de latitud, y todos los situados sobre un mismo paralelo terrestre tienen exactamente la misma latitud. En los polos ella valdrá 90°.

— La diferencia en latitud de dos puntos cualesquiera de la superficie de la tierra es el arco de meridiano comprendido entre los paralelos á el ecuador que pasan por estos mismos puntos.

— Con esta coordenada y la longitud se fija la situación de un lugar sobre la superficie de la tierra.

— El complemento de la latitud recibe el nombre de *colatitud*, la cual no es otra cosa que la distancia cenital del polo.

Determinación de la latitud.— Los diferentes métodos que se conocen para la determinación de la latitud, ya sea geográfica ó astronómica, tienen por fundamento las relaciones ó teoremas siguientes.

1.° La latitud de un punto es igual á la altura del polo sobre el horizonte de este punto; y

2.° La latitud de un lugar es igual á la diferencia entre la declinación y la distancia cenital de una estrella en el momento de su culminación ó de su paso por el meridiano del lugar.

Estos métodos, para los cuales es necesario el empleo del círculo mural, teodolito, sextante, etc., se encuentran en los diferentes tratados de Geomorfia, y su exposición cae fuera de los límites de este trabajo. Así, pues, indicaremos que, entre otros, se tienen el de Mr. Bessel, observando los pasos de estrellas por el primer vertical; el de las observaciones extra meridianas, empleado frecuentemente en el mar. *Cours de Navigation et d'Hydrographie*, E. P. Dubois (página 355); aquel en que se hace uso de las digresiones de la polar (*Traité de Geodésie*, Puissant, t. I, pág. 186), y aquellos en que se determina bien por la altura meridiana del sol. *Cours de observations et de calculs nautiques* (Krantz), ó bien por las alturas de la polar (*Geodésie*, Francœur, pág. 401).

Latitud geocéntrica.— El arco que mide el ángulo que el radio ó recta que une el centro de la tierra con un punto de la superficie forma con el plano del ecuador se llama *latitud geocéntrica.*

Esto es consecuencia de la forma elipsoidal de la tierra, por lo que la vertical de un lugar de su superficie no coincide con el radio correspondiente al mismo más que en los polos y en el ecuador, siendo necesario en algunas ocasiones, como sucede en el cálculo de las paralajes, servirse de esta latitud que se relaciona con la geográfica por la siguiente expresión, debida á Mr. Bessel:

$$tg.\ \varphi' = 0.9933254\ tg.\ \varphi,$$

en la que φ' es la latitud geocéntrica, y φ, la geográfica.

— La latitud geocéntrica es, pues, inferior á la geográfica. La diferencia de ambas es nula en el ecuador y en los polos, y máxima y bastante considerable á los 45°.

Latitud geodésica.— En las triangulaciones geodésicas, cuando se conoce la latitud de uno de los vértices de la red, obtenida directamente, se calculan por medio de ciertas relaciones las de todos los demás, y á las latitudes así obtenidas se las denomina *geodésicas.*

— La latitud geodésica de un lugar no siempre coincide con la geográfica ó astronómica del mismo á causa de las desviaciones que la vertical experimenta por la desigual distribución y falta de homogenidad de la masa terrestre.

Variabilidad de las latitudes.— El primero que puso de manifiesto que las latitudes de los diferentes puntos de la tierra experimentaban variaciones con el tiempo, fué el astrónomo inglés Airy en 1840, y luego el italiano Fergola. Hoy está plenamente confirmada dicha variabilidad, la cual es periódica, y el valor del periodo ó tiempo en que ella tiene lugar es de 427 días, valor que parece concordar con el teórico obtenido por la Mecánica celeste, según las más recientes investigaciones.

Así, pues, el eje de rotación de la tierra se mueve en el interior de ésta en un período de tiempo casi anual, si bien la amplitud de la oscilación es pequeñísima, pues viene á ser de dos á tres décimas de segundo de arco.

— En las aplicaciones de las funciones elípticas á la Geometría sobre una curva de tercer orden, Clebsch, y con motivo de sus tangentes imaginarias, considera una especie de superficie anular que puede ser transformada en un anillo ordinario por deformación continua y que, como la superficie de Riemann, será útil en el estudio de las funciones elípticas.

En esta superficie existen dos sistemas de curvas, y á las cuales les da el nombre de *curvas de latitud* y curvas meridianas.

— Las curvas de latitud, sobre las cuales la parte imaginaria del argumento es constante, son en su dirección perpendiculares á las curvas meridianas (ver meridiana) y á ellas pertenecen en particular las dos ramas de la curva en sí misma.

—La relación anarmónica de cuatro puntos de encuentro reales de cada curva con la tangente á la rama tricuspidal de la curva primitiva, es constante.

— Las curvas de latitud forman parte de un sistema de curvas, que se obtienen construyendo sobre cada tangente de la curva de tercera clase la forma hessiana y el haz relativo á la forma binaria cuadrática, obtenida por los puntos de encuentro de la tangente en cuestión con la curva.

— Se puede consultar Harnack, *Ueber die Verwerthung der elliptischen Functionen für die Geometrie der Curven dritten Grades (Math. Annalen.* T. IX.)

Lemniscata ó lenticular.

Del griego λημνισκος (nudo de cintas.)

Definición.—Lugar de los puntos en que sus distancias á otros dos fijos es constante é igual al cuadrado de la mitad de la distancia de estos puntos.

Clasificación.—La lemniscata no es más que un caso particular de la cassinoidea, pero la recíproca no es cierta; toda cassinoidea no es una lemniscata. En su consecuencia, derivándose de la ecuación general de la cassinoidea (ver esta voz) que allí se expresa, y siendo varias las formas que de dicha ecuación se derivan según el valor de la relación $\frac{b}{a} \gtreqless 1$ se demuestra que estas curvas derivadas ofrecen ciertas analogías con las secciones producidas en el cono, sobre todo al comparar las áreas de estas tres curvas derivadas con las tres de las secciones cónicas; de aquí, sin duda, las denominaciones de

$$\begin{array}{ll} \text{lemniscata hiperbólica} & \\ \quad\text{» parabólica} & \frac{a}{b}\left\{\begin{array}{l} > 1 \\ = 1 \\ < 1. \end{array}\right. \\ \quad\text{» elíptica} & \end{array}$$

Historia.—*El Comte de Fagnano* es el primero que se ha ocupado de esta curva en su obra *Produzzioni mathematiche* (Pesaro, 1750). Una figura de la lemniscata orna el frontispicio de su obra. Fagnano descubrió sus principales propiedades, que son de una gran importancia en la teoría de las funciones elípticas, pero sus demostraciones son todas geométricas. La teoría analítica se debe á Euler (M. de Petersbourg, t. V. 1751, pág. 52), y Sturm descubre la expresión de su área *(Ann. Mathem., de Gergonne);* Bernouilli las estudia, y Serret, en *Journal Liouville* (t. VIII, pág. 499), y en su obra *Mèmoire sur les propietés de la lemniscate et des courbes elliptiques de première classe.* Asimismo se tienen, entre otros, los trabajos de Mr. Fuss *(Mémoires de la Académie des Sciences de Saint Petersbourg,* 1824); de Mr. D'André *(Nou. Ann.,* t. V., pág. 331); de Mr. Bonnet (P. Ossian, *Sur les propietés de la lemniscate et sur les ombilics des surfaces,* 1845); de Mr. Bergery *(Géométrie des courbes appliquées á l'industrie),* etc.

Ecuación.—Llamemos $2a$ la distancia FF' (fig. 1.) entre los dos

puntos fijos; M un punto de la curva $MF = \rho$, $MF' = \rho'$ y $\rho\rho' = a^2$. Si se toman por ejes la recta FF' y la perpendicular en su medio, su ecuación es:

$$(y^2 + x^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 = a^4;$$

de donde

$$y^2 = a\sqrt{4x^2 + a^2} - (x^2 + a^2).$$

Forma.—La curva es simétrica con relación á los ejes coordenados, y el punto O es un punto de ella. La distancia de los diferentes

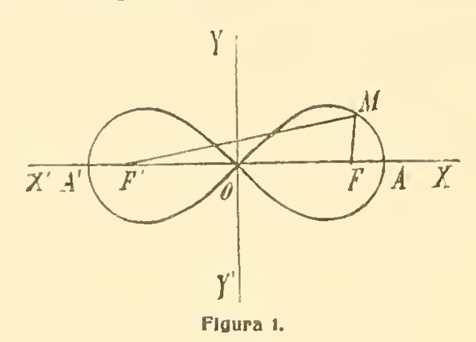


Figura 1.

puntos de la curva á los dos fijos F y F', varían en razón inversa el uno del otro.

Para obtener los puntos en que la curva corta al eje de las x, supongamos $y = 0$, se tendrá:

$$(x^2 - a^2)^2 = a^4,$$

lo cual nos da

$$x^2 = 2a^2, \quad \text{de donde } x = \pm a\sqrt{2},$$

ó bien

$$x^2 = 0, \quad \text{de donde } x = 0.$$

Los primeros valores corresponden á los puntos A y A', que se llaman *vértices*. El segundo, al punto O, que es el *centro*.

Todas las líneas que pasan por el centro y se terminan en la curva, son divididas en este punto en dos partes iguales y se llaman *diámetros*.

Si se hace variar x de O á $a\sqrt{2}$, se reconoce que y aumenta, para disminuir luego; basta, para asegurarse de ello, dar á x valores particulares, tales como $\frac{a}{10}$, $\frac{2a}{10}$, $\frac{3a}{10}$..... Se verá que el mayor va-

lor de y tiene lugar entre $x = \frac{8a}{10}$ y $x = \frac{9a}{10}$, y que la curva afecta la forma señalada en la figura.

Propiedades.—El área total de esta curva es igual á cuatro tercios de a^2.

— La integral que expresa el arco de la lemniscata posee propiedades análogas á las de la integral, que representa un arco de círculo. Que existe una relación algebraica sencilla entre los límites de las integrales que expresan dos arcos de lemniscata, el uno doble del

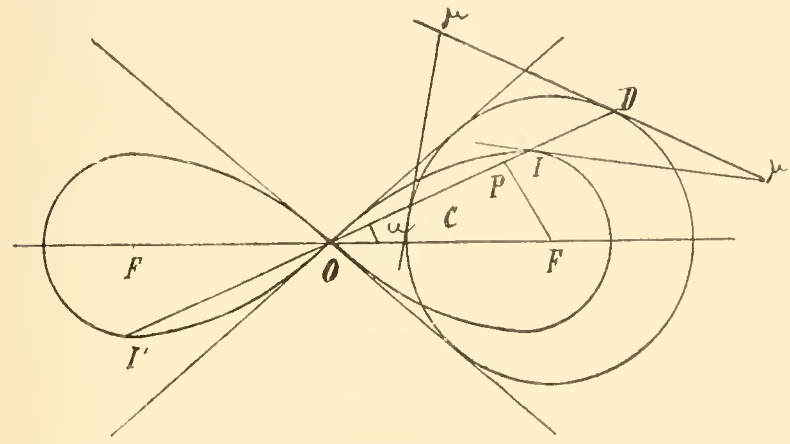


Figura 2

otro, de modo que un arco de lemniscata puede, como un arco de círculo, ser duplicado ó dividido en dos partes iguales por una construcción geométrica. Estos teoremas fueron ya conocidos por Fagnano.

— El lugar geométrico de los vértices de un sistema de hipérbolas equiláteras que tienen el mismo centro y un punto común, es una lemniscata; y el lugar de los focos de las mismas curvas es también una lemniscata que las corta octogonalmente (*Journal Liouville*, tomo VIII, pág. 499), Serret.

— Los arcos de esta curva, contados á partir de un punto fijo, son recorridos, al mismo tiempo que sus cuerdas, por un móvil pesado que parta del estado de reposo, formando la lemniscata un ángulo de 45° con la vertical y estando su centro en un punto fijo de donde parte el móvil (Fuss).

— La propiedad anterior es igualmente cierta para cuando el punto material, en lugar de estar sujeto á la acción de la pesantez, lo

está á la de una fuerza central proporcional á la distancia (Bonnet). — La sección producida en un toro por un plano tangente al círculo de garganta es una lemniscata.

Trazado.—Se puede hacer el trazado de esta curva por medio del círculo de la manera siguiente: sea (fig. 2) un círculo Δ y un punto exterior O buscado de tal manera que las tangentes trazadas desde él al círculo Δ sean perpendiculares entre sí. Dirijamos por O una

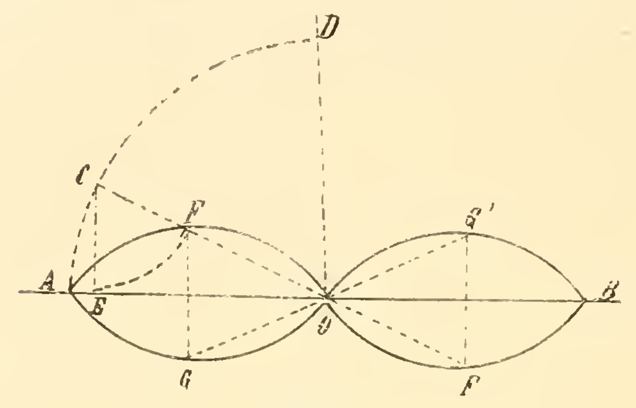


Figura 3.

secante cualquiera OCD, y tomemos $OI = OI' = CD$; el lugar geométrico de los puntos I é I' es una lemniscata de Bernouilli.

Si se trazan las tangentes en C y D á Δ y se toman $D\mu' = D\mu$, $\mu' I$ es la tangente á la curva en el punto I.

Se puede asimismo construir esta curva por medio de un semicírculo ó de cualquier otra curva, tales como la elipse, la parábola, etcétera, que tenga por base el eje principal de la lemniscata que se quiere trazar. Para ello, desde el punto medio O del eje AB (fig. 3.ª), dado y tomado como centro, se traza un cuarto de círculo ACD de radio OA ó cualquiera otra curva dispuesta simétricamente con respecto á la perpendicular OD, levantada en el punto medio AB. Si se trazan por O dos rectas igualmente inclinadas con respecto al eje y se baja desde el punto C, en que una de ellas corta el cuarto de círculo, una perpendicular CE al eje y se refiere la magnitud CE sobre CO en CF, el punto F es un punto de la lemniscata, y simétricamente se tendrán los otros F', G y G'. Repitiendo esta construcción para otro par de rectas, trazadas en las condiciones de las FF' y GG', se obtendrán otros cuatro puntos de la curva, y así cuantos se quieran.

Lemniscata de Dandelin.—Mr. Dandelin da el nombre de *lemnis-*

catas á las curvas lugares de las perpendiculares bajadas desde un punto dado sobre las tangentes de una cónica *(Nouv. Mém. Acad. de Bruxelles.* T. IV); pero estas curvas son las que se designan con el nombre de *podares.* (Ver esta voz.)

Aplicaciones.—El estudio de esta curva es de importancia, porque ella puede servir para la interpretación de las raíces imaginarias de las ecuaciones de segundo grado.

Mr. Lamé, en su tratado de *Coordonnées curvilignes* estudia el sistema cilíndrico de lemniscatas, dando á la ordinaria el nombre de *radical*, y considerando la ecuación de los parámetros termométricos del sistema de potenciales cilíndricos y conjugados, distingue la *lemniscata de largos contactos* y agrupa todas estas clases de curvas según el signo del parámetro y su valor mayor ó menor que - *log. 2,* en tres grupos, que denomina *lemniscatas dobles*, *lemniscatas flechadas* y *lemniscatas simples.*

En la obra citada se podrá también estudiar el trazado gráfico de estas líneas (pág. 221).

Lemniscata de Gerono.—Curva estudiada por Gerono en su *Cours de Gem. Analytique,* y llamada así por Marie, *Exercices de Gem. Descriptive.* Es el caso particular de la ecuación de la parábola virtual (ver esta voz) en que $b = 0$, y resulta para ecuación de esta línea,

$$a^2 y^2 = x^2 (a^2 - x^2).$$

Lemniscata esférica ó hipópeda.—Curvas intersecciones de la esfera con los cilindros de base circular, que le son tangentes interiormente.

Su nombre se debe á Schiapparelli, que las utilizó para representar las trayectorias del movimiento de anomalía de los planetas.
— Sus ecuaciones son:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad (z - b)^2 + y^2 = (a - b^2).$$

—Ver la *Sfere omocentriche*, de dicho autor.

Levantamiento.

Definición.—Línea que, según Eratóstenes, atravesaba en su más vasta extensión el viejo continente de E. á O., es decir, hacia el grado 36 de latitud próximamente, sin interrupción alguna.

Historia.—Esta idea de Eratóstenes se hallaba de acuerdo con la hipótesis de que el eje prolongado del mar Mediterráneo debía tocar en regiones nuevas, habiendo llegado Estrabon á suponer (T. I, página 65, y II, pág. 118), y Humboldt, *Examen critique* (T. I., pági-

na 152), que en el hemisferio N., quizás bajo el paralelo del estrecho de Gades, de la isla de Rodas y del país de Tina, podían existir, entre las costas occidentales de Europa y las orientales del Asia, *otros muchos continentes habitados.*

— En el diafragma de Dicearco, la línea de levantamiento sigue el Tauro, las cadenas del Demavend y del Yndo-Kho, el Kuen-lum, que limita al Tíbet por el N. y las montañas de las Nubes, en las provincias chinas de Sse-tschnan y de Kuang-si.

— Puede consultarse Humbolt, *Asie centrale* (T. I, págs. 104, 114, 118, 164, y T. II, págs. 413 y 438).

Lexell (Curva de).

Definición.— Con este nombre se distingue la línea situada sobre la superficie de la esfera y sobre la cual están colocados todos los vértices de los triángulos de igual base é igual superficie.

Historia.— Esta curva ha sido estudiada por Lexell, que vivió en el siglo XVIII, y publicada en las *Actes de Petersbourg*, T. V, reproduciéndose en muchas de las ediciones de la *Geométrié* de Legendre.

Propiedades.— La ecuación de esta curva es de segundo grado, siendo, por consiguiente, una cónica esférica (ver esta voz), y, por tanto, un circulo no máximo de la esfera. *Nouvelles Annales* (T. VII, página 175.)

— Si se considera el triángulo polar P del triángulo T, generador de la curva, se ve que tiene un ángulo dado y un perímetro constante, y que si él describe un círculo, el lado R opuesto al ángulo dado de P envuelve un circulo, y viceversa. Así, pues, en virtud de las propiedades de las figuras polares recíprocas sobre la esfera, se pueden considerar como correlativos los dos teoremas siguientes:

«El lugar del vértice de un triángulo esférico que tiene una base dada y una suma de ángulos dados, es un círculo de la esfera que contiene el triángulo». «La envolvente de la base de un triángulo esférico que tiene un ángulo dado y un perimetro dado, es un círculo de la esfera que contiene el triángulo.

Límite de las nieves perpetuas.

Definición.—Se llama así, en Geología, á la línea generalmente curva que expresa los puntos en que en cada hemisferio el agua se presenta sólida de un modo permanente.

Propiedades. — La altura donde esto se verifica varía con la latitud; observándose que, mientras en la costa noruega desciende hasta los 700 metros, en el Himalaya se eleva hasta 5.000.

— Respecto al límite de los hielos polares, sólo se puede decir en tesis general, que los del hemisferio N. no suelen pasar de los 80°, mientras en el del S. llegan á los 60°.

— Los hielos y las nieves temporales ofrecen tan poca importancia en la Física terrestre, que no merecen ser examinados.

Línea de los centros de gravedad.

Definición. — Se ha dado este nombre á la que pasa constantemente por el centro de gravedad de una magnitud variable, según una ley determinada.

Historia. — Leibnitz, *Constructio problematis ducendi rectas quæ tangunt lineas centrorum gravitatis. Miscellanea Berolinensia*, 1706, se ocupó de estas especies de líneas, dándoles el nombre con que aquí se indican y determinando los medios de verificar el trazado de sus tangentes, tal como á continuación lo expresamos.

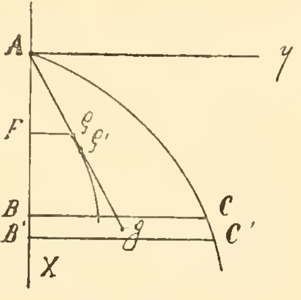


Figura 1.

Casos particulares. — Sea, por ejemplo (fig. 1), un trilíneo rectángulo ABC, limitado por una curva definida AC; cuando la base BC de esta figura se mueve paralelamente á sí misma, el centro de gravedad G describe la línea AG, que es la línea de los centros de gravedad en este particular caso.

Para trazar la tangente á esta curva AG en el punto G, centro de gravedad de la figura ABC, supongamos sea g el del segmento adicional infinitesimal $BCB'C'$, y G' el del nuevo trilíneo $AB'C'$; GG' será el elemento de la curva considerada, cuyo elemento prolongado pasa por el punto g, y la posición límite del punto g es el punto medio de BC; por consiguiente, la tangente en G á la línea de los centros de gravedad, pasa por el punto medio de la base del trilíneo, ó sea por el medio de BC.

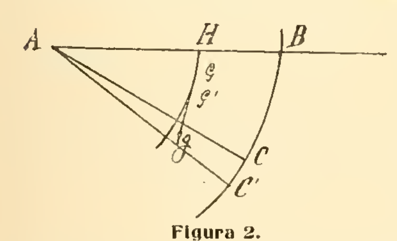


Figura 2.

— Si $AB = x$, $BC = y$, $AF = z$ y $GF = n$; Leibnitz da para valor del coeficiente angular de la tangente á la curva lugar de los centros de gravedad del trilineo

$$\frac{dz}{dn} = 2\,\frac{xfydx - fxydx}{yfydx - fy^2dx}.$$

— Si consideramos ahora el sector variable ABC (fig. 2) limitado por una curva cualquiera BC; HG será la línea de los centros de gravedad; G, el centro de gravedad de ABC; G', el del sector ABC', y g, el del adicional infinitamente pequeño CAC'; y la tangente en G á la línea HG pasará por el punto que divide AC en la relación de 1 á 2, á partir de su extremo C.

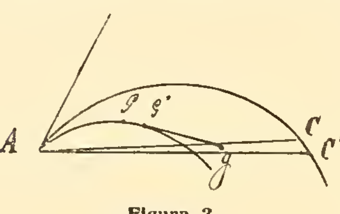


Figura 3.

— Si la curva BC (fig. 3) parte del punto A y que el lado fijo del ángulo que determina el sector sea la tangente en A á esta curva; el sector se transformará en un segmento de una base y la construcción de la tangente se hará como en el caso anterior.

— Si consideramos, por último, el lugar del centro de gravedad de un arco variable de una curva dada; sea A (fig. 4) el extremo fijo de este arco, C su extremo móvil, C' un punto infinitamente próximo de C, y G el centro de gravedad del arco AC; la tangente en G á la línea de los centros de gravedad será GC, puesto que la posición límite del medio g y de CC' está en C.

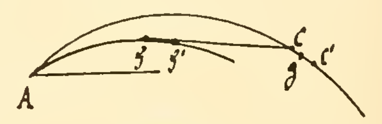


Figura 4.

Líneas de curvatura.

Definición.— Se llama línea de curvatura el lugar de los puntos de una superficie, en los cuales las normales infinitamente próximas se encuentran consecutivamente.

Historia.— El nombre de *líneas de curvatura* aplicado á esta especie de curvas fué dado por Monge *(Traité d'Analyse*, 1807), pudiéndose citar diferentes trabajos relativos á las mismas, entre otros, los de Mr. Joachimsthal *(Journal* de Mr. Crelle, t. XXX); Poncelet *(Propietés projectives)*; Jacobi *(Journal Liouville*, t. XI); Catalán *(Nouve-*

lles Annales, t. VI), Valsonn (año 1854), Hellermann (id. 1858); Del Beccaro (*Annali di Tortolini*, 1859); Abate Aoust (*Comptes rendus*, 1859 y 1861), y Mr. Charles, que en 1840 publicó una Memoria en que trata de las líneas de curvatura de las superficies de segundo orden, etc.

Ecuación.— La ecuación de la normal en un punto (x, y, z) de una superficie será:

$$X - x + p\,(Z - z) = 0$$
$$Y - y + q\,(Z - z) = 0,$$

y en el punto

$$(x + dx,\ y + dy,\ z + dz),$$

se tendrá asimismo

$$X - (x + dx) + (p + dp)\,(Z - (z + dz)) = 0.$$
$$Y - (y + dy) + (q + dq)\,(Z - (z + dz)) = 0.$$

La condición de encuentro es,

$$\frac{dx + pdz}{dp} = \frac{dy + q\,.\,dz}{dq},$$

ecuación que, teniendo en cuenta las relaciones,

$$dz = p\,.\,dx + q\,.\,dy$$
$$dp = r\,.\,dx + s\,.\,dy$$
$$dy = t\,.\,dy + s\,.\,dx$$

en las que r, s y t designan las derivadas parciales

$$\frac{d^2z}{dx^2},\ \frac{d^2z}{dx.\,dy}\ \text{y}\ \frac{d^2z}{dy^2}$$

se transforman en

$$[(1+q^2)s - pqt]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + [(1+q^2)r - (1+p^2)t]\,\frac{dy}{dx} +$$
$$+ pgr - (1+p^2)s = 0, \qquad (1)$$

que es la ecuación diferencial de la proyección de las líneas de curvatura sobre el plano de las xy.

Propiedades.— Para cada punto de una superficie hay siempre dos

líneas de curvatura que se cortan á ángulos rectos en dicho punto. En efecto; la ecuación (1) atribuye dos valores distintos á $\frac{dy}{dx}$, y si para simplificar se dirige el eje de las z según la normal al punto considerado de la superficie, y que, por consecuencia, se toma el plano tangente por plano de las xy; p y q serán nulos y la ecuación anterior, para el punto origen, se reduce á

$$s\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (r + rt)\frac{dy}{dx} - s = 0,$$

que nos dice que los valores de $\frac{dy}{dx}$ serán recíprocos y de signo contrario. De aquí, por consiguiente, lo enunciado.

— En toda superficie existen, pues, dos series de líneas de curvatura que la dividen en cuadriláteros curvilíneos infinitamente pequeños, cuyos lados se cortan en ángulo recto é indicarán la posición de las dos curvaturas de la superficie; es decir, las líneas, según las que presentará alrededor de cada punto la curvatura máxima ó la mínima.

— Como la ecuación (1) es de segundo grado con relación á $\frac{dy}{dx}$, su integral contendrá una constante arbitraria elevada al cuadrado; y si se quiere determinarla de modo que la línea de curvatura pase por un punto dado de la superficie, se hallarán dos valores que corresponderán respectivamente á las lineas de curvaturas de cada sistema.

— Eliminando r y t por medio de las ecuaciones

$$dp = r \,.\, dx + s \,.\, dy$$
$$dq = s \,.\, dx + t \,.\, dy,$$

y teniendo en cuenta que

$$dz = p \,.\, dx + q \,.\, dy,$$

la ecuación (1) toma la forma

$$dp\,(dy + q \,.\, dz) = dq\,(dx + p \,.\, dz)$$

que es muy digna de notarse.

— Las dos líneas de curvatura que pasan por un punto, son tangentes á las dos secciones principales.

— Si se calculan los radios de curvatura de la superficie para un punto determinado, es decir, las porciones de la normal comprendidas entre el punto y aquellos en que es cortada por las dos normales próximas, se encuentra que coinciden en magnitud y en posición con los radios de curvatura de las secciones principales.

— Se deberá tener presente que los puntos de encuentro de las normales no son los centros de los círculos osculadores de las líneas de curvatura, porque estas normales se cortan consecutivamente y son tangentes á una misma curva, propiedad que no tienen las normales trazadas por los centros de curvatura de una curva alabeada. Asimismo, las líneas de curvatura pueden ser planas, sin que sus círculos osculadores se confundan con los de las secciones principales, bastando para ello que sus planos osculadores sean normales, y que, por consiguiente, las líneas de curvatura sean las de más corta distancia sobre la superficie.

— Si una línea de curvatura trazada sobre una superficie es plana, los planos tangentes á la superficie á lo largo de esta línea forman todos un ángulo constante con el plano de la línea.

— Si dos superficies se cortan según una línea de curvatura común, la una á la otra se cortarán según el mismo ángulo en todos los puntos de esta línea.

— Si dos superficies se cortan octogonalmente, se cortarán recíprocamente según dos líneas de curvatura.

— Si tres superficies se cortan octogonalmente, la intersección de dos, cualesquiera de ellas entre sí, es una línea de curvatura de la una y de la otra.

— Las normales de una superficie, trazadas por los diferentes puntos de una línea de curvatura, forman una superficio desarrollable, puesto que dos normales consecutivas se encuentran. Para obtener la ecuación de esta superficie, bastará eliminar x, y, z, entre la ecuación de la superficie propuesta, las de una normal.

$$\left.\begin{aligned} X - x + p\,(Z - z) = 0 \\ Y - y + q\,(Z - z) = 0 \end{aligned}\right\}$$

y la ecuación (1) que expresa que el punto (x, y, z), está sobre la línea de curvatura. Esta ecuación resultará de segundo grado con relación á z. Si es susceptible de descomponerse en dos factores, igualándolos separadamente á cero, se obtendrán las ecuaciones dis-

tintas de dos superficies que contendrán respectivamente los centros de una y otra curvatura de la superficie propuesta. Si esta descomposición no es posible, los centros de las dos curvaturas se encontrarán colocados sobre dos hojas distintas pertenecientes á una superficie única.

— Una normal cualquiera á la superficie propuesta, toca á la vez á las dos hojas que contienen respectivamente los centros de una y otra curvatura, y si se hacen pasar por esta normal dos planos tangentes á estas dos hojas, dichos planos se cortarán en ángulo recto.

— Cuando la superficie que contiene los centros de una de las curvaturas corta á la superficie que contiene los centros de la otra, los puntos de intersección se llaman el *lugar de los centros de curvatura esférica,* porque cada una de las tangentes á este lugar será una normal de la superficie, que la cortará en un punto A, para el que se verificará que las dos curvaturas tendrán evidentemente el mismo radio y el mismo centro, de suerte que serán iguales, como sucede en todos los puntos de una esfera.

El conjunto de todas las tangentes al lugar de los centros de curvatura esférica, cortará á la superficie según una curva A, A', A''..... que recibe el nombre de *línea de las curvaturas esféricas*, la cual corta necesariamente á todas las líneas de ambas especies de curvaturas.

La ecuación de la proyección sobre el plano de las xy de esta línea, es

$$[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]^2-4(1+p^2+q^2)(rt-s^2)=0.$$

— Cada una de las aristas de retroceso de las superficies desarrollables normales, cuya reunión forman las dos hojas de la superficie, lugar de los centros de curvatura, es una línea de más corta distancia sobre esta última superficie.

— Si se concibe un hilo que tenga uno de sus extremos fijo sobre un punto de la línea de intersección de las dos hojas, que contienen respectivamente los centros de una y otra curvatura; atirantando este hilo, y haciéndole mover de manera que esté en parte ajustado á esta intersección y la porción libre dirigida en el sentido de la tangente, el extremo opuesto trazará la línea de curvaturas esféricas sobre la superficie propuesta.

Casos particulares.—No se ha encontrado todavía un método gráfico, sencillo y general, que sirva para construir las líneas de curvatura sobre una superficie curva cualquiera, si bien la cuestión ha

sido resuelta para los casos particulares de casi todas las superficies empleadas en las bóvedas, donde tiene gran aplicación el conocimiento de esta clase de curvas para la formación de las juntas de dovelas.

Así, por ejemplo, para todas las superficies cilíndricas, las generatrices y las secciones rectas son evidentemente las líneas de mínima y máxima curvatura. En el cono, éstas son las generatrices y las curvas cuyos puntos están á igual distancia del vértice; en el cono circular, las líneas de máxima curvatura son los círculos paralelos á la base. En las superficies de revolución, y por consecuencia en la esfera, las líneas de máxima y mínima curvatura son las secciones meridianas y los paralelos.

— Líneas de curvatura del elipsoide.

Sea

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

el elipsoide dado, siendo $a > b > c$.

Las proyecciones de las líneas de curvatura sobre el plano de las $x\,y$, serán, para uno de los sistemas, las elipses

$$\frac{x^2}{X^2} + \frac{y^2}{Y^2} = 1;$$

X é Y, siendo las coordenadas de un punto de la hipérbola,

$$X^2 - \frac{a^2(a^2 - b^2)}{a^2 - c^2}\, Y^2 = \frac{b^2(a^2 - b^2)}{a^2 - c^2},$$

y para el segundo sistema, las hipérbolas

$$\frac{x^2}{X^2} - \frac{y^2}{Y^2} = 1,$$

cuyos semi-ejes son las coordenadas de un punto de la elipse

$$X^2 + \frac{a^2\,(a^2 - b^2)}{a^2 - c^2}\, Y^2 = \frac{b^2\,(a^2 - b^2)}{a^2 - c^2}.$$

Sobre el plano de los ejes mayor y menor, las proyecciones de los dos sistemas de líneas de curvatura son dos elipses.

— Monge ha demostrado que, por cada línea de curvatura del elipsoide, pasan tres cilindros de segundo orden, cuyos ejes coinciden con los del elipsoide.

— En el paraboloide elíptico de ecuación

$$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b} \qquad a > b > 0,$$

la ecuación diferencial de las líneas de curvatura, será

$$\frac{1}{ab^2} \cdot \frac{y^2 dy^2}{x^2 dx^2} + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} + \frac{x^2}{a^2 b} - \frac{y^2}{ab^2}\right) \frac{1}{x^2} \cdot \frac{y.dy}{x.dx} - \frac{1}{a^2 b} \cdot \frac{y^2}{x^2} = 0,$$

que integrada, es

$$y^2 = cx^2 + \frac{ab(a-b)c}{b+ac},$$

y haciendo variar c, se tendrán las proyecciones sobre el plano de las xy de todas las líneas de curvatura. Estas proyecciones serán dos elipses si se tiene $c < 0$ y dos hipérbolas para $c > 0$. Los centros de estas líneas estarán en el origen.

Líneas de Ribaucour.

E. Césaro. *Nouvelles Annales*, 1888, pág. 174, da para ecuación intrínseca de las espirales sinusoides (Ver esta voz) la ecuación:

$$s = \frac{n+1}{n-1} \int \frac{d\rho}{\sqrt{(n+1)\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{2n}{n-1}} - 1}};$$

y señala que, en general, la ecuación

$$s = \frac{n+1}{n-1} \int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^m - 1}}$$

representa una espiral sinusoide si $n = \frac{2n}{n-1}$ ú otra familia de líneas, á la que denominó *líneas de Ribaucour*, en el caso en que

$$n = 2\,\frac{n+1}{n-1}.$$

— Si una espiral sinusoide de índice n rueda sobre una recta, su polo describe una línea de Ribaucour de índice $\frac{n-1}{n+1}$.

— Se puede estudiar esta clase de líneas consultando, entre otros, los siguientes trabajos: *Étude des élassoides*, de A. Ribaucour, *Journal de Baltaglini*, 1886, pág. 23 á 43, y *Nouvelle `Correspondance Mathématique*, 1880, pág. 224.

Lisseneoides.

Definición.—Denominación dada á las líneas de fiujo más completas que afectan las corrientes sin llegar á producir turbación marcada en el agua.

Historia.— El nombre de *lisseneoides* aplicado á estas curvas se debe á Mr. Rankine, que las considera en la segunda parte de su Memoria *Sur les propietés de certaines lignes de flot. (Philosophical Transactions*, 1863).

Aplicaciones.—Mr. Rankine considera estas líneas aplicables á la dirección de las popas de los navíos, y juntamente con otras líneas introducidas al mismo objeto por Mr. Scott Roussell, se demuestra que por la acción de ciertas presiones sobre la superficie del agua, las oleadas vienen á contarse más fácilmente, cuanto las cimas de sus crestas se las encuentran en ángulo recto.

Logarítmica.

Logarítmica, de logaritmo, del griego λογος, relación ó razón, y ἀριθμός, número.

Definición.—Curva trascendente, en la cual la relación entre las dos coordenadas rectangulares correspondientes á un mismo punto es la misma que la que existe entre un número y su logaritmo.

También se le ha dado el nombre de *logística*, cuando representa logaritmos de base cualquiera.

Historia.— Esta curva ha sido tratada por los más hábiles matemáticos, con objeto de examinar la naturaleza de los logaritmos.

Beaune propuso á Descartes, y éste ensayó sin llegar á resolverlo, el problema de encontrar la curva cuya subtangente sea una cons-

tante; y Leibnitz prueba que es una logarítmica, en su Memoria *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus*, etc. *(Acta Eruditorum*, 1684). P. Nicolás la estudia en su tratado *De lineis logarithimicis spiralibus hyperbolicis* (Tolosa, 1696), y más tarde, Guido Grandi, en su obra *Geometria demostratio hugenianorum problematum* (Florencia, 1701), se ocupa de curiosos problemas de esta curva y de los sólidos que engendra, cuyos problemas trata también Huyghens, en su obra publicada por Gravesanda con el titulo de *Christiani Hugenii Zulchemii, dum viveret Zeleni toparchæ, Opera varia* (Leyde, 1724).

La naturaleza de esta curva sirvió de base para la discusión sostenida por Leibnitz y Euler de que los números negativos no tenian logaritmos reales, contra Bernouilli y D'Alembert, que pretendian lo contrario; siendo Euler el que, si no resolvió, por lo menos cortó la cuestión, refiriendo los logaritmos á funciones circulares.

Pascal, Roberval, Wallis, Laire, Pardies, etc., se han ocupado también de sus propiedades; debiéndose á Vincent un estudio particular sobre esta curva, publicado en 1824, bajo el título de *Considerations nouvelles sur la nature des courbes exponentielles et logarithmiques.*

Ecuación.— Siendo x é y las coordenadas de un punto de la curva, su ecuación será

$$x = a \,.\, lg \,.\, y \quad \text{ó} \quad y = a^x,$$

siendo a la base del sistema de logaritmos, del cual OB, OC, OD son los logaritmos de BQ, CR y DS.

Propiedades.— Si $x = 0$, se tendrá $y = a^0 = 1$; de donde se deduce que la curva corta el eje de las y á una distancia OP del origen igual á la unidad.

—Para valores positivos y crecientes de x, los de y serán positivos y aumentarán de valor.

Si se toma x negativa, su ecuación será

$$y = a^{-x} \quad \text{ó} \quad y = \frac{1}{a^x};$$

de donde resulta que y será una fracción, tanto más pequeña, cuanto que x negativa sea mayor.

Se ve, pues, que la logarítmica forma una rama única, abierta, que se aleja á derecha é izquierda del eje de la y y que tiene por asíntota al eje de las x negativa.

— La subtangente es constante. En efecto; la expresión de la subtangente es:

$$S_t = \frac{y \, . \, dx}{dy},$$

y se la obtiene, diferenciando la ecuación $x = a \, . \, lg \, . \, y$, que nos dará

$$dx = a \frac{dy}{y}, \quad \text{de donde} \quad \frac{ydx}{dy} = a;$$

por tanto, es igual á la base.

Trazado.— La construcción de esta curva se obtiene por pun-

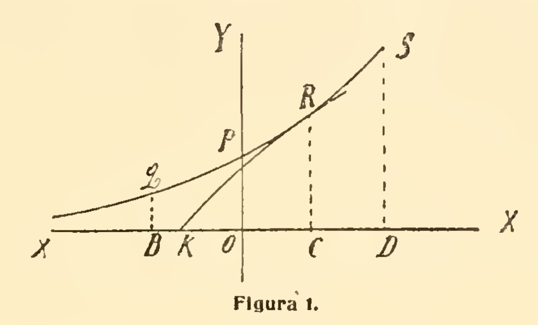


Figura 1.

tos, haciendo sucesivamente en la ecuación $x = 1, x = 2, x = 3.....$ y construyendo los valores de $y = a$, $y = a^2$, $y = a^3.....$ por procedimientos geométricos; y lo propio para valores negativos de x. Los puntos restantes se unirán por un trazado continuo.

Tangente.— Para obtener la tangente en un punto cualquiera R, bastará bajar la ordenada RC de este punto, tomar á partir de C en el sentido inverso, que traiga la curva una cantidad $CK = a$ y unir el punto K con el R. La línea KR será la tangente.

Aplicaciones.— Hoy que la teoría de los logaritmos es enteramente conocida, no presenta interés el particular estudio de esta curva; pero sí lo tiene para el trazado exacto de la catenaria (ver esta voz), habiendo sido Leibnitz el que primeramente la aplicó para este uso.

Logarítmicas.

Definición.— Se dan en general el nombre de logarítmicas á las curvas representadas por la ecuación:

$$y = A a^{\frac{x}{B}}. \qquad (1)$$

Propiedades.— Si representamos por m una constante definida por la ecuación

$$e^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{B}},$$

la ecuación general anterior toma la forma

$$y = A e^{\frac{x}{m}},$$

en la cual e designa la base de los logaritmos naturales.

— Supongamos que la curva esté referida á dos ejes rectangulares; transportemos el origen á un punto O' del eje de las x situado á una distancia α del origen primitivo O. La ecuación de la curva para este nuevo origen será

$$y = A e^{\frac{x+\alpha}{m}} \quad \text{ó} \quad y = A e^{\frac{\alpha}{m}} e^{\frac{x}{m}};$$

de manera, que si se toma para α el valor determinado por la ecuación $m = A e^{\frac{\alpha}{m}}$, se tendrá un origen para el cual la ecuación (1) se reduce á

$$y = m e^{\frac{x}{m}}.$$

— Para estudiar el carácter de las curvas contenidas en la ecuación (1), bastará considerar la ecuación anterior. Ahora, si x aumenta positivamente desde el valor O hasta ∞, la ordenada y aumenta desde m hasta $+\infty$; y si x varía desde O hasta $-\infty$, y es siempre positiva y disminuye indefinidamente; luego la ecuación representa una curva, tal como la CD, que tiene por asíntota el eje de las x negativo, y que encuentra al eje de las y en un punto B, cuya ordenada $oB = m$.

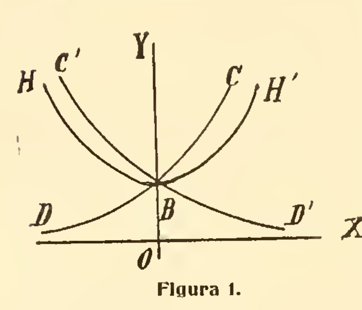


Figura 1.

— La ecuación $y = m e^{-\frac{x}{m}}$ representa una rama de curva, $C'D'$, aná-

loga á la anterior, pero que se aproxima cada vez más al eje de las x positivas.

—Todas las logarítmicas son curvas semejantes. Porque cambiando y en Ky y x en Kx en la ecuación (2), se tiene, para ecuación de una curva homotética á la propuesta,

$$y = \frac{m}{K} e^{\frac{Kx}{m}},$$

y haciendo $m' = \frac{m}{K}$,

$$y = m' e^{\frac{x}{m'}},$$

ecuación de una logarítmica cuyo parámetro m' es cualquiera.

Logocyclica.

Definición.—Se da este nombre á la curva envolvente de un círculo cuyo centro está sobre una parábola dada, y que tiene por radio la distancia del centro al foco de la parábola.

Historia.—Mr. Booth es el primero que descubrió las relaciones de esta curva con el círculo y la logarítmica, dándole por esta razón el nombre de *logocyclica*, *Quarterly Journal of Mathem*, núm. 9, página 38, 1858, y núm. 10, pág. 127, 1859, Londón.

Antes de ser conocida con este nombre, esta curva fué tratada por diferentes matemáticos para la resolución de algunos problemas; pudiéndose citar, entre otros, los trabajos de M. Agnesi, *Instituzioni analt.* (T. I, pág. 378), Milán.—G. Casali, *Instituti Bononiensis Commentarii* (T. IV, pág. 13), Bononiœ.—Riccati y Saladini, *Instituzioni analt* (T. I, pág. 328.—*Problema novum*, Bononiœ.)—Quetelet, *Dissertatio de quibusdam locis geometricis nec non de curva focali* (Gand, 1819). E. Kulp, *Hœssus Mannhim,* 1823.—Mr. Midy, *Nouvelles Ann.* (T. III, página 293, 1844), que la deduce del *fólium* de Descartes, y Mr. Montucci, *Nouvelles Ann.* (T. V, pág. 470, 1846), que la estudia con el nombre de estrofoide. Lehemus propuso nombrarla *kukumacida. (Aufgaben aus der höheren Mathematik*, 1842, pág. 120).

Ultimamente, M. Tortolini ha publicado una Memoria sobre las propiedades de esta curva, en la cual se pueden ver detalles muy interesantes sobre la misma. *Ann. di Mat. pura ed applicata* (T. III, año 1860).

Propiedades.—Si se toma el foco por polo, y por eje aquel de la parábola, la curva recíproca de la logocyclica coincide con ella misma; propiedad que es análoga á la del círculo.

— Esta curva tiene por asíntota la directriz de la parábola que sirve para su generación.

— Siendo V el punto de intersección de dos tangentes á esta curva, trazadas por dos puntos recíprocos, R y R', y, por consecuencia, los dos sobre la logocyclica; y si T es el medio de RR', la recta VT es perpendicular á la RR' y toca á la parábola en un punto que llamaremos G.

—Si O es el vértice de la parábola, el ángulo ROR' es un ángulo recto.

— Si las rectas RG y RG' son normales á la logocyclica, VR y VR' son iguales, y están igualmente inclinadas sobre la cuerda RR', como sucede en el círculo.

— El lugar del punto V es una *cisoide*, que tiene el vértice de la parábola por punto de retroceso, y la directriz de la parábola por asíntota.

— La suma de las distancias al eje de los puntos R y R' es igual á la distancia al mismo del punto G.

—Si C y C' son los puntos de intersección de las tangentes VR y VR', con una perpendicular al radio vector FRR', dirigido por F, la suma $FC+FC'=$constante, y además $VC=VC'$.

— El lugar de los puntos C y C' es una cardioidea.

— Se verifica que log. $(FR)=\dfrac{\text{arc. parábola } OG-GT,}{a}$, propiedad que muestra su parecido á la *logarítmica.*

— La logocyclica es una curva cuadrable.

— Si F y A son dos puntos fijos; AY, una perpendicular sobre FA, y si desde F trazamos una recta cualquiera que encuentre en T á la perpendicular, tomando sobre esta recta $TR=TR'=IA$, los puntos R y R' pertenecen á la logocyclica y se llaman *recíprocos.* Si hecho esto se describe una parábola que tenga F por foco y A por vértice, si tienen todas las propiedades anteriores. Se confunde esta curva con la que con el nombre de estrofoide describió Montucci.

Longitud.

Del latino, *longitudo.*

Longitud celeste.—Definición.—Se llama longitud de un astro al arco de la eclíptica, comprendido entre el círculo de longitud y el punto equinoccial de primavera ó punto vernal.

Clasificación.—La longitud puede ser *geocéntrica* ó *heliocéntrica*, según que se la calcula, suponiendo á la Tierra ó al Sol colocado en el centro de la esfera celeste.

Propiedades.—Se cuenta de 0 á 360° á partir del punto vernal y en el sentido directo, es decir, en el sentido del movimiento de la Tierra en su órbita, ó sea en el del movimiento propio del Sol sobre la esfera celeste de Occidente á Oriente.

— La longitud sirve de coordenada para, con la latitud, fijar la posición de un astro ó de un punto cualquiera sobre la esfera celeste.

— Para los planetas, las longitudes geocéntricas y heliocéntricas son diferentes; pero para las estrellas, cuya distancia es enorme con relación á la del Sol á la Tierra, ambas especies de longitudes se confunden.

— Todos los astros colocados sobre un mismo semi-círculo de latitud tienen una misma longitud, y los que se encuentran sobre el semicírculo de latitud opuesto, tienen una longitud que difiere 180° de la de los primeros.

— Un planeta está en su nodo, cuando sus dos especies de longitudes, la geocéntrica y la heliocéntrica, son iguales, y, por tanto, la diferencia entre estas longitudes da la distancia del planeta al nodo.

— La longitud del Sol, dada por las efemérides, es la geocéntrica, á la cual basta añadirle 180° para obtener la heliocéntrica de la Tierra.

— La longitud de la Luna, ó el movimiento de la Luna en longitud, está sujeto á las variaciones llamadas *erección*, *variación* y *ecuación ánua*. La primera, descubierta por Tolomeo, es debida á la atracción que el Sol ejerce sobre la Luna, disminuyendo la ecuación del centro en las sizigias y aumentándola en las cuadraturas. La segunda, descubierta por Tyco-Brahe, depende de la distancia angular de la Luna al Sol, teniendo su mayor valor en los octantes y anulándose en las sizigias y cuadraturas. La tercera es sólo la diferencia entre los movimieutos verdadero y medio.

— La longitud del perigeo del Sol ó perihelio de la Tierra experimenta una variación periódica, debida por un lado, al movimiento propio del Sol, que vale al año 11″,8, y, por otro, á la precesión de los equinoccios cuyo valor es de 50″,2.

Longitud terrestre.—Definición.—Se llama longitud de un punto de la Tierra, al arco del Ecuador comprendido entre el meridiano de este punto y otro fijo que se considera como el primero.

Propiedades.—La longitud es *oriental* ú *occidental*, según que el lugar considerado esté al Oriente ó al Occidente del primer meri-

diano, y se cuenta de 0 á 180°. Se puede contar de Oeste á Este desde 0 á 360°.

— Todos los lugares colocados sobre un mismo semi-meridiano tienen una misma longitud cuando ésta se cuenta de 0 á 360°, y los colocados sobre un semi-meridiano opuesto, tienen una longitud que se diferencia en 180° de la de los primeros. Los puntos que están sobre el primer meridiano tienen 0° de longitud.

— Si se distinguen dos especies de longitudes, en este caso todos los lugares colocados en un mismo semi-meridiano tienen una misma longitud, y los colocados sobre los semi-meridianos opuestos tienen una longitud que es el suplemento de la primera.

— La diferencia de longitudes de dos puntos cualesquiera de la superficie de la Tierra está medida por el arco de Ecuador comprendido entre los meridianos correspondientes á estos dos puntos.

— La elección de *primer meridiano*, ó meridiano origen, es arbitraria. En algún tiempo existió un primer meridiano universal, adoptado por Tolomeo, ó sea el que pasaba por la isla de Hierro, la más occidental de las Canarias y la más occidental también de las tierras conocidas en aquel tiempo, por lo que todas las longitudes eran orientales. Hoy cada nación tiene su primer meridiano, que suele ser el que corresponde al lugar de su más importante Observatorio, si bien existen tendencias á usar todas otra vez uno sólo, aquel del Observatorio de Greenwich, que tiene cierto carácter internacional. De esta diversidad de convenios no resulta, sin embargo, inconveniente grave, gracias á la exactitud con que han sido calculadas las diferencias de longitudes que median entre los diferentes Observatorios.

Determinación de la longitud.—Los diferentes métodos que se conocen para la determinación de la longitud, ya sea geográfica ó astronómica, tienen por fundamento el siguiente principio:

La longitud de un punto del globo tiene por medida el tiempo sidéreo que transcurre entre los pasos de una misma estrella por el meridiano del lugar y por el primer meridiano, ó lo que es lo mismo, *la diferencia de horas, que se cuenta en el mismo instante en los dos meridianos.* Esta diferencia representa, en efecto, el tiempo que tarda el Sol en recorrer, en virtud de su movimiento aparente diurno, un ángulo igual á aquel que separa los dos meridianos; por otra parte, como en veinticuatro horas el Sol recorre 360° alrededor de la Tierra, una simple proporción hace conocer el ángulo de los dos meridianos, ó lo que es lo mismo, la longitud buscada.

— Las longitudes se expresan en grados ó en tiempo. Los 360° del

Ecuador equivalen á las 24^h del día sidéreo; por tanto, cada 15° equivaldrán á 1^h.

Historia.—La determinación de la longitud ha sido célebre en la historia y se la conoce con el nombre de *Problema de las longitudes.* — Lo primero que se ocurre para resolver esta cuestión es el uso de cronómetros; bastará reglar un cronómetro con el paso del Sol por el primer meridiano, se le transporta al lugar donde se quiere hallar la longitud y se compara la hora de este cronómetro con otro regulado sobre el meridiano del lugar. Pero este medio, si sencillo hoy gracias á las inmensas perfecciones de la relojería, fué ilusorio para los primeros navegantes, y de aquí que les fuera necesario buscar en los fenómenos celestes procedimientos más seguros para determinar la longitud. En el siglo XVI, diferentes Astrónomos, tales como Munster (*Cosmographia universalis*, 1544), Gemma (*Traité d'Astronomie et de Cosmographie, avec l'usage du globe et celeri de l'anneau astronomique*, 1547), Fine (*Orontii Finei. Delphinaleis protomathesis*, 1532), Nonius (*De arte navigandi* y *Rerum astronomicarum problemata communia*, 1592), y otros, propusieron resolver este problema observando *el lugar* de la Luna en el cielo con respecto al de ciertas estrellas cuya posición es dada, y no tenían más que calcular, por las tablas del movimiento de este astro, la hora á la cual ella se debía encontrar en dicho lugar, para el país para el cual las tablas habían sido construidas, y comparar luego esta hora con la de la observación. A causa de la imperfección de la teoría de la Luna, estos métodos resultaban defectuosos.

— Propuesto por Felipe II de España un premio de 100.000 escudos al que determinase un medio de encontrar la longitud en el mar, y otro á principios del siglo XVII por los Estados de Holanda, consistente en 30.000 florines, fueron muchos los que se ocuparon de este problema, entre ellos Guillermo Nautonnier, señor de Caltelfranc, que pretendió, hacia 1610, merecer estas recompensas, indicando la inclinación de la aguja imanada como medio infalible para encontrar las longitudes, no resultando exacta su teoría de los polos magnéticos.

—En 1634, Mr. Morin publicó una obra notable titulada *Astronomía jam á fundamentis integre et exacte restituta*, etc., con la cual trató de obtener los premios indicados, por indicar en ella los medios de resolver el problema de las longitudes; pero nombrada por el Cardenal Richelieu una Comisión, compuesta de Chambon, Pascal, Mydorge, Boulanger y Herigone, ésta, no tan sólo consideró la obra defectuosa, sino que todavía le injuriaron, no consiguiendo el premio á

pesar de los grandes esfuerzos y resolución de varios problemas particulares concernientes al de hallar las longitudes. Más tarde, en 1647, publicó otra obra titulada *Science des longitudes* para uso de los pilotos, dedicada á Mazarin que le había hecho justicia. Este, en 1645, le asignó una pensión de 2.000 libras. Morin hizo que su libro *Astronomía*, etc., le examinaran Galileo, Gassendi, Gautier, Longomontarius y Hortensius, y aunque todos lo reconocieron como notable, no pudo lograr que el Estado de Holanda le diera el premio.

En 1714, el Parlamento de Inglaterra formó un comité para el examen de las longitudes. Newton, Whiston y Clarke formaron parte de él. Newton presentó una Memoria en la cual expuso diferentes métodos propios para hallar las longitudes en el mar y las dificultades que cada uno tenía, como también aquellas que presentaban los medios de determinación fundados en el empleo de los satélites de Júpiter y las observaciones de la luna. En su vista, propone un *bill* que es aceptado, mediante el cual se ofrece una recompensa de 10.000 libras esterlinas al autor de un procedimiento ó método para encontrar la longitud con la aproximación de un grado; esta recompensa sería de 15.000 libras si la exactitud llegara á dos tercios de grado, y de 20.000 si fuera de medio grado.

Harrison, guiado por estas ofertas, se dedicó al perfeccionamiento de un reloj de su invención, que después de probarlo en diferentes viajes y de presentarse á oir las opiniones de Halley, Bradley y otros sabios, obtiene en 1737, del *Board of longitude*, una subvención para continuar sus estudios, estableciéndose en Londres; y en 1749, la medalla de Copley, de la *Société royale*, por nuevos perfeccionamientos hechos á su máquina. Luego, en 1758 presenta al Parlamento su último reloj, por el cual le dan un premio de 2.500 libras, y 5.000 más por la divulgación de su procedimiento. En 1773, consigue, por último, ver recompensados sus grandes trabajos, recibiendo por ellos el complemento hasta las 20.000 libras.

El Gobierno inglés recompensa también en 3.000 libras á Euler por sus trabajos sobre la teoría de la luna; con 5.000 á los herederos de Tobia Mayer por sus *tablas lunares*, y promete otra de 5.000 á aquel que lograra algún descubrimiento de gran utilidad para la navegación.

El descubrimiento hecho en 1746 de los instrumentos de reflexión, unido al mejor conocimiento de la teoría de la luna, permiten usar hoy el método de las *distancias lunares;* para el cual los almanaques náuticos dan calculados para todos los días del mes, y de tres en tres horas, la distancia de la luna á los planetas y estrellas principales,

vistas desde el centro de la tierra. Para corregir las alturas observadas de los errores de la refracción, paralaje y depresión, se tienen las fórmulas de Borda, pudiéndose ver en la *Tabla de logaritmos*, de Callet, el tipo de cálculo que ellas exigen. También se tiene la fórmula de Mendoza, *Cours de Navigation et d'Hydrographie* (E. P. Dubois, pág. 411).

— Se encuentra en el *Traité de Géodesie*, de Puissant (T. II, pág. 265), el desenvolvimiento de Lagrange para determinar las longitudes por medio de los eclipses, método que es irreprochable bajo el punto de vista analítico, pero que no se aplica en la práctica á causa de la magnitud de los cálculos que exige.

También se emplean otros métodos, como son el paso de la luna por los meridianos de los dos lugares: el de las culminaciones de una estrella y de un borde de la luna, etc., para cuyo estudio pueden consultarse las obras *Géodesie*, de Francoeur; el *Cours d'Astronomie et de Géodesie*, de Mr. Laussedat, etc.

Indicaremos, por último, que en vez de un fenómeno astronómico, para resolver este problema, puede servirse de señales arbitrarias producidas á voluntad durante breves intervalos, las cuales pueden ser luminosas ó eléctricas. Estos métodos tienen la ventaja de poderse repetir cuantas veces se quiera, variando las circunstancias, para poder mejor tener seguridad en los resultados.

Longitud geodésica.—En los triángulos geodésicos, cuando se conoce la longitud de uno de los vértices de la red obtenida directamente, se calculan, por medio de ciertas relaciones, las de todos los demás, ó sea, se hace el *cálculo de la diferencia en longitud*, y las longitudes, así obtenidas, se las denominan geodésicas.

—Existen, para la resolución de este problema, diferentes métodos, uno de los cuales fué dado por Legendre (*Mémoire sur les operations trigonometriques dont les resultats dépendent de la figure de la terre*, 1787), y fué aplicado por Delambre para la medida del arco de meridiano entre Dunkerque y Barcelona en 1792. (*Traité de Géodesie*, de Mr. Puissant, T. I.)

Loxodromia.

Del griego λοξός, oblicuo, y δρόμος, carrera ó camino.

Definición.— Es la curva trazada sobre la superficie de una esfera ó de una superficie de revolución y que corta á todos los meridianos bajo un mismo ángulo.

Historia.— Nonius, cuyo verdadero nombre es Pedro Núñez, cos-

mógrafo del rey Emmanuel y profesor de matemáticas de la Universidad de Coimbra, publicó la obra *De arte navigandi* sobre 1560, la cual fué el punto de partida para el estudio de la loxodromia, pues en ella existe una discusión sobre la distancia y la diferencia en longitud de dos lugares indicados sobre una carta marina en que los meridianos están representados por rectas paralelas, y los paralelos, por perpendiculares á los meridianos. Con este objeto define y estudia la loxodromia á la que dió el nombre de *rumbo* ó línea *rúmbica*.

Poco después, Stevin dió á conocer algunas propiedades de esta curva, aplicándola de una manera interesante para la construcción de ciertas expresiones algebraicas, *Hipomnemata, id est de Cosmographia de praxi Géométriæ, de Statica, de Optica*, etc. (Obras de Stevin, traducidas al latín y reunidas por Snellius), y más tarde, Halley señala la curiosa propiedad de que esta curva tiene por perspectiva stereográfica sobre el ecuador una espiral de Arquímedes.

Asimismo, se tienen estudios particulares sobre esta curva, entre otros, los de Gudermann, *Relaciones notables entre la línea loxodrómica y la catenaria esférica (Journal de Crelle*, T. XI, pág. 394, 1830); los de Grunert; *Loxodromische trigonometrie* (1849); los de Wannson (*Nouvelles Annales*, T. XX, pág. 31 y 225); los de H. D'arrest, *Astron. Nach.* (T. XXXVI, pág. 351); los de Boymann, *De lineis loxodromicis in datis superficiebus* (Berlín); los contenidos en la Memoria *Ecuación de las líneas loxodrómicas sobre las superficies de segundo grado (Archr. de Grunert)*, T. VII, 1846; los en (Ibid, T. XIII, 1849), donde se puede ver la ecuación de la tangente en el vértice, por Boymann, etc.

Ecuación general.— Si llamamos r el arco de meridiano OM comprendido entre el vértice O de una superficie de revolución cualquiera, y el punto M de una loxodromia trazada sobre esta superficie; r' la distancia de M al eje Oz que es la ordenada de la meridiana tomando Oz por eje de abscisas, la ecuación general de la curva de esta especie será:

$$dr = r'd\varphi \cdot \cot\beta \quad \text{y} \quad dr = ds \cdot \cos\beta,$$

en que las letras tienen la misma significación que la expresada en la figura de la hélice cónica (ver esta voz).

Propiedades.— La rectificación de un arco de loxodromia BB' no depende sino de la del arco de meridiana comprendido entre los paralelos de la superficie que pasan por los puntos B y B'.

— Llamando α y δ las coordenadas astronómicas de un punto de una *loxodromia* que pasa por el origen;

A el ángulo constante de la loxodromia con el meridiano;

r radio de curvatura esférica de la curva en el punto (α, δ);

h porción de la normal comprendida entre la curva y el ecuador;

r' radio de curvatura de la evoluta en el punto (α', δ');

h' porción de la normal en el punto (α', δ') comprendida entre la evoluta y el ecuador;

A' ángulo que forma la evoluta en el punto (α', δ') con el meridiano que pasa por este punto;

S' longitud de un arco de la evoluta,

se obtienen las fórmulas siguientes:

$$\log . \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\delta}{2}\right) = \alpha . \cot . A$$

$$\cot . r = \operatorname{sen} . A . \operatorname{tg}\delta$$

$$\alpha' = \alpha \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{tg} . \delta' = \pm \operatorname{tg} . A \sec . \delta$$

$$\operatorname{tg} . r . \operatorname{tg} . h = - \operatorname{cosec}^2 . A$$

$$\cot . r' = \frac{\operatorname{sen} . A . \operatorname{tg} . \delta'}{\operatorname{sen}^3 . \delta'}$$

$$\operatorname{tg} . r . \operatorname{tg} h' = - \operatorname{cosec}^2 . A . \operatorname{sen}^4 . \delta'$$

$$\operatorname{sen} . A' . \operatorname{sen} . \delta' = \pm \operatorname{sen} . A$$

$$\cos . S' . \cos A = \cos \delta'$$

$$\operatorname{tg} . \delta' = \pm \frac{1}{2} \operatorname{tg} . A \left[e^{\left(\alpha' \pm \frac{\pi}{2}\right) \cot . A} + e^{-\left(\alpha' \pm \frac{\pi}{2}\right) \cot . A} \right],$$

ecuación de la evoluta, lo que nos dice, que la evoluta de la loxodromia, no es otra loxodromia; difiere poco de la espiral logarítmica. — Si se trazan los dos círculos paralelos de latitud, $+A$ y $-A$ forman dos segmentos esféricos, y la ecuación anterior nos dice que la evoluta de la loxodromia está formada de dos espirales separadas, comprendida cada una en uno de los segmentos, y que tienen el polo correspondiente como punto asintótico.

— El arco comprendido entre dos puntos de la curva es igual á la

diferencia de sus latitudes, dividida por el coseno del ángulo constante que forma su dirección con las meridianas.

— La propiedad indicada por Halley de que esta curva tiene por perspectiva stereográfica sobre el ecuador una espiral de Arquímedes, resulta inmediatamente del teorema de que las proyecciones stereográficas de dos tangentes á la esfera forman entre sí el mismo ángulo que estas tangentes. Y resulta que, en efecto, la loxodromia corta todos los meridianos según el mismo ángulo, su proyección stereográfica sobre el ecuador deberá cortar todos los radios según el mismo ángulo, puesto que estos radios son las proyecciones stereográficas de los meridianos.

Aplicaciones.— Esta línea es de grandísima importancia en la práctica de la navegación para resolver el problema de las rutas, pues ella es la línea que describe realmente un buque en cada ruta oblicua que sigue, dirigiendo su quilla sobre un mismo rumbo de viento, por medio de la brújula.

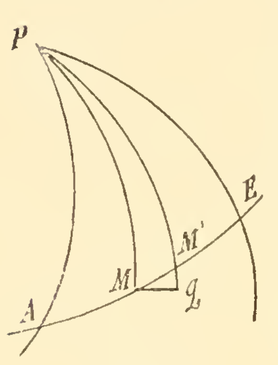


Figura 1.

Sea A el punto de partida, E el de llegada, l_0 la latitud del punto A, L_0 su longitud, l_1 y L_1 las coordenadas análogas del punto E, l y L las coordenadas de un punto cualquiera, M, de la loxodromia, las del punto infinitamente próximo, M', serán $l + dl$ y $L + dL$.

Sea z el ángulo constante PME que forma la curva con el meridiano PM. Llámese ds al elemento de curva MM', y trácese el arco de paralelo $M'Q$. El triángulo infinitesimal MQM' puede considerarse como rectilíneo y rectángulo en Q, y da las relaciones

$$M'Q = MM' . \operatorname{sen} M'MQ \quad \text{y} \quad MQ = MM' . \cos . M'MQ,$$

ó sustituyendo estas líneas por sus valores

$$dl = ds . \cos . Z$$

$$dL . \cos . l = ds . \operatorname{sen} . Z \quad \text{ó} \quad dL = \frac{ds . \operatorname{sen} . Z}{\cos . l},$$

que integradas nos dan, definiéndolas entre l_0 y l_1, y entre L_0 y L_1,

$$l_1 - l_0 = s . \cos . Z, \qquad (1)$$

$$L_1 - L_0 = \text{tg}.Z\left[\text{log.nep.tg}\left(45^\circ + \frac{1}{2}l_1\right) - \text{log.nep.tg}\left(45^\circ + \frac{1}{2}l_0\right)\right], \quad (2)$$

cuyas fórmulas comprenden la resolución del problema de las rutas en la navegación.

El cálculo se facilita tabulando la función

$$\varphi(l) = \text{log . nep . tg}\left(45^\circ + \frac{1}{2}l\right),$$

tomando como argumento l, y esta tabla se llama de *latitudes crecientes*, que se encuentran en las obras de Mendoza, Guepratte, Bagay, etcétera.

La expresión (2) se puede escribir así:

$$L_1 - L_0 = \text{tg} . Z(\varphi(l_1) - \varphi(l_0)),$$

y puede considerarse como la ecuación de la loxodromia referida á las coordenadas geográficas l y L. Ésta se simplifica si se toma un punto del ecuador como punto de partida y se refieren á este punto las longitudes, porque entonces

$$L_0 = 0 \quad \text{y} \quad \varphi(l_0) = \varphi(0) = \text{lg . tg}(45^\circ) = \text{log . 1} = 0;$$

de modo que la ecuación se reduce á

$$L_1 = \text{tg} . Z . \varphi(l_1).$$

De esta ecuación se deduce que la loxodromia se compone de dos ramas inversamente simétricas respecto del ecuador, y que cada una de estas ramas gira alrededor del polo correspondiente formando una especie de espiral, pero sin llegar nunca á alcanzarlo, pues no se puede llegar á $l_1 = 90''$ sino cuando $L_1 = \infty$ ó la curva haya dado infinitas vueltas.

— Las ecuaciones (1) y (2) sirven para resolver los diferentes problemas de las rutas, suponiendo conocidas las coordenadas geográficas del punto de partida: estos problemas son seis, según que los datos conocidos sean los expresados á continuación:

1.° Se dan S y Z; 2.°, l_1 y L_1; 3.°, Z y l_1; 4.°, Z y L_1; 5.°, S y l_1, y 6.°, S y L_1, cuyas soluciones pueden verse en *Géodésie* (Francoeur, página 442).

— Las fórmulas anteriores no son sino aproximadas, pues si se quie-

re resolver el problema de la loxodromia con todo rigor, no puede admitirse, como se ha hecho, la esfericidad de la tierra, sino aceptar para ésta la forma elipsoidal. En tal caso, el arco $M\,Q$, ó elemento del paralelo del punto M, tiene por valor el producto de dL por el radio de este paralelo, que es

$$\frac{a\,.\cos l}{\sqrt{1-a^2 \operatorname{sen}^2 l}};$$

y el elemento de elipse meridiana $M'Q$ tiene por expresión:

$$\frac{a\,(1-e^2)\,dl}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 l)^{\frac{3}{2}}},$$

expresiones de MQ y MQ', que introducidas en la relación

$$MQ = \operatorname{tg}.Z.M'Q$$

nos da la ecuación diferencial de la loxodromia, que integrada y llamando L_0 á la longitud del punto en que la curva corta al ecuador, será:

$$L_1 - L_0 = \operatorname{tg}.Z\left[\log.\text{nep}.\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{1}{2}\,l\right) - \frac{1}{2}e.\log.\text{nep}.\,\frac{1+e.\operatorname{sen} l}{1-e.\operatorname{sen} l}\right] =$$
$$= \operatorname{tg}.Z.\psi(l).$$

— Si $l = 90^\circ$, será $L = \infty$, y, por lo tanto, la loxodromia gira constantemente alrededor del polo sin alcanzarle. Para $Z = 0$ será $L = L_0$, y entonces la curva es un meridiano, y para $Z = 90^\circ$ será $\psi(l) = 0$, de donde $l =$ constante, y la curva es un paralelo.

— La función $\psi(l)$, que en este caso expresa las *latitudes crecientes*, es más complicada que en el caso de la esfera. En Alemania se ha publicado una tabla de esta función y la ha reproducido en Francia Mr. Caillet. Supone un aplastamiento de $\frac{1}{303}$.

La diferencia entre los valores de las funciones $\psi(l)$ y $\varphi(l)$ puede llegar á dar hasta un error de 23′.

Para más detalles, se pueden consultar á estos objetos las obras, *Cours de Navigation*, de Mr. Dubois, y *Traité de Navigation*, de C. F. Fournier, especialmente.

Lugar geométrico.

Definición.—Se da el nombre de lugar geométrico al conjunto de los puntos que gozan de una misma propiedad.

— En general, estos puntos se suceden con continuidad, según una línea recta ó curva.

—Si consideramos una figura, F, y le asociamos por una construcción geométrica efectuada sobre ella una segunda figura móvil F', en que distinguimos particularmente un cierto punto I; cuando el movimiento de la figura F' esté convenientemente reglado, el punto I se moverá con F' y engendrará, por este movimiento, una curva Δ. Esta curva Δ es el *lugar geométrico* del punto I.

— Los antiguos nombraban *lugares planos* los que se reducían á dos rectas ó á dos círculos, y *lugares sólidos* á aquellos que necesitaban el concurso de parábolas é hipérbolas y de elipses.

Construcción de un lugar.—Para construir un lugar representado por la ecuación

$$y = f(x),$$

se dan á la variable x los valores numéricos $o, a, b, \ldots\ldots$ crecientes, y los $-p, -q \ldots\ldots$ decrecientes, ó que crezcan en sentido negativo, y se calculan los valores correspondientes de y; construyéndose los puntos que tienen las soluciones obtenidas, por coordenadas, sobre los ejes adoptados para representar el lugar, y los puntos que resulten, serán puntos de éste.

Si la ecuación tiene la forma

$$\varphi(x, y) = 0,$$

y no se puede deducir de ella el valor de una de las variables en función de la otra, por cada valor α dado á una de las variables x, por ejemplo, habrá que resolver, para obtener los valores correspondientes de y, la ecuación numérica $\varphi(\alpha, y) = 0$. Se construirán, por tanto, los puntos cuyas coordenadas sean las soluciones reales halladas, y se hace pasar por ellas una línea continua, que será el lugar buscado.

Ejemplos.—Construir el lugar representado por la ecuación:

$$y^2 - 2x = 0,$$

despejando la y, tendremos

$$y = \pm \sqrt{2x}.$$

Haciendo $x = 0$ (fig. 1.ª), resulta $y = 0$, lo que nos dice que el punto cuyas coordenadas son $(0, 0)$, es decir, el origen, corresponde á la línea ó que la línea pasa por el origen.

Haciendo ahora

$$x = 1, 2, 3, 4 \ldots..,$$

los valores correspondientes de y son:

$$y = \pm \sqrt{2}, \quad \pm 2, \quad \pm \sqrt{6}, \quad \pm \sqrt{8} \ldots..$$

Demos á x valores negativos: los correspondientes de y son imaginarios; lo que prueba que la línea no tiene punto alguno en la parte de las abscisas negativas, ó lo que es igual, que la línea esta toda ella comprendida en los ángulos superior é inferior de la derecha de los ejes.

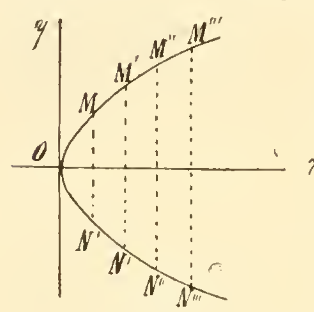


Figura 1

Se construirán los puntos M, M', M'', M'''..... N, N', N'', N'''....., cuyas coordenadas sean las diferentes soluciones reales halladas, y, uniéndolas por una línea continua, resultará la curva que indica la figura, y la cual representa el lugar geométrico de la ecuación propuesta.

— Los ejemplos que siguen son las representaciones geométricas de los lugares reales correspondientes á las ecuaciones propuestas y la de sus conjugadas (ver esta voz).

Sea la ecuación:

$$y = \sqrt{\frac{1 - e^2 x^2}{1 - x^2}};$$

se obtendrá la curva real (fig. 2.ª) $A\,C\,B\,A'\,C'\,B'\,A''\,C''\,B''\,A'''\,C'''\,B'''$, asíntotas á las rectas

$$x = \pm 1, \quad y = \pm e,$$

simétrica con relación á los dos ejes, y tiene por vértices los puntos C y C' situados sobre el eje de las y y á la distancia uno del origen, y los puntos C'' y C''' situados en el eje de las x á la distan-

cia $\frac{1}{e} > 1$. La conjugada en abscisas reales es $FC''F'F''C'''F'''$, y las otras conjugadas son cerradas.

—Sea la ecuación

$$y = \sqrt{\frac{e^2 x^2 - 1}{x^2 - 1}},$$

la cual representa en coordenadas reales (fig. 3.ª) el anillo $ABA'B'$, y las cuatro ramas CD, $C'D'$, $C''D''$, $C'''D'''$, asíntotas á las rectas

$$x = \pm 1, \quad y = \pm e.$$

La conjugada en abscisas reales es CAC', $C''A'C'''$, y la conjugada

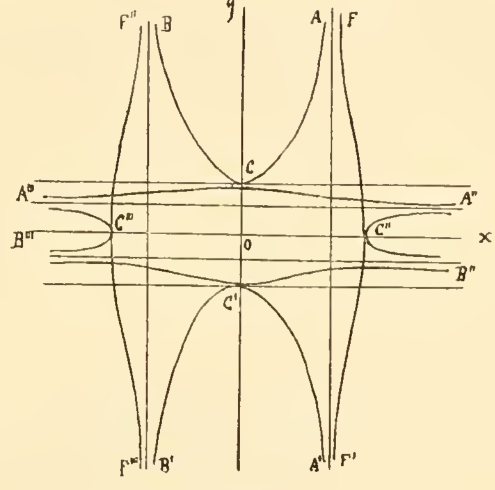


Figura 2.

en ordenadas reales es DBD'', $D'B'D'''$; las otras conjugadas están compuestas de anillos cerrados, comprendidos entre el anillo

$$ABA'B' \text{ y } CD \text{ ó } C'''D''' \text{ y } C'D' \text{ ó } C'''D'''.$$

Ecuación de un lugar.—Una línea está determinada ó definida cuando se conoce una de sus propiedades *características*, es decir, que sólo á ella pertenece. El enunciado de esta propiedad es la *definición* de la línea. Su *ecuación* es la ecuación que indica la relación constante entre las coordenadas de un punto cualquiera de dicha línea.

—De lo dicho se deduce que la ecuación de una línea es, pues, una de sus propiedades características, y es la propiedad más adecuada para el estudio de dicha línea.

—En la ecuación de una línea no deben existir más cantidades variables que las coordenadas, las que variarán variando el punto de la línea.

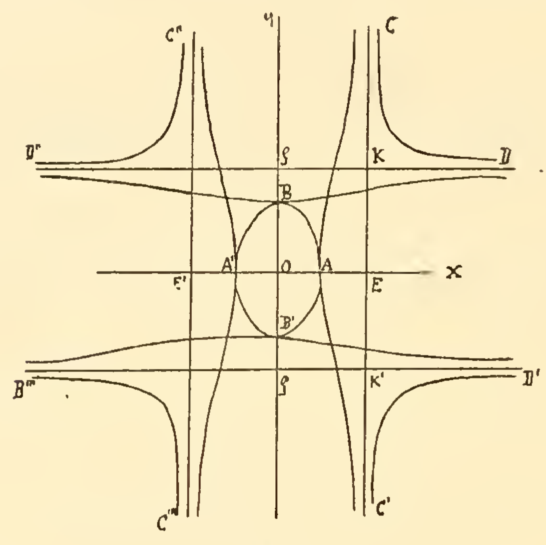


Figura 3.

Ejemplo.—Sea la parábola; se llama así á una curva en la que se verifica que la distancia de uno cualquiera de sus puntos á un punto dado es igual á la distancia del mismo punto á una recta dada.

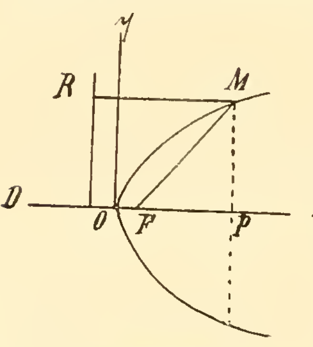


Figura 4.

Para hallar, por medio de esta definición, la ecuación de la parábola, tomaremos por eje de abscisas la recta DFx (fig. 4.ª), que pasa por el punto dado F y es perpendicular á la recta dada DR, y por eje de ordenadas la perpendicular Oy á la recta DFx en el punto medio O de la distancia FD.

Sea M uno de los puntos de la curva, cuyas coordenadas sean

$$OP = x, \quad MP = y,$$

y llamemos p á la distancia FD. Según la definición de esta curva, se tendrá la ecuación

$$MF = MR.$$

Para deducir de aquí la ecuación de la curva, se expresarán las dos cantidades variables MF y MR en función de las coordenadas variables x é y.

Se tendrá

$$MF = \sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2}$$

y

$$MR = x + \frac{p}{2};$$

luego la ecuación de la parábola será

$$\sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2} = x + \frac{p}{2}$$

y simplificando, se tiene

$$y^2 + x^2 - px + \frac{p^2}{4} = x^2 + px + \frac{p^2}{4},$$

ó

$$y^2 = 2px.$$

Propiedad general.—Si un punto cuyas coordenadas son x' é y' corresponden á una línea cuya ecuación es $f(x, y) = 0$, se tendrá $f(x', y') = 0$, en virtud de la definición de la línea. De donde se deduce que *siempre que un punto se halle en una línea, las coordenadas particulares del punto sustituídas en la ecuación, en lugar de las generales, verifican esta ecuación.*

Observación.—En lo dicho sobre el objeto de *lugar geométrieo*, sólo nos hemos referido á coordenadas cartesianas; sin embargo, de que lo propio puede hacerse con cualquier otro sistema de coordenadas, no entrando en ejemplos particulares sobre estos otros sistemas, por la extensión que habíamos de dar necesariamente á este artículo.

M

Magnéticas.

Definición.—Se denominan así las que sobre la superficie de la Tierra unen los puntos en que se observa un mismo grado ó una misma especie de variación de la aguja imanada.

Historia.—El estado magnético de la superficie terrestre fué estudiado por Euler (*Théoric nouvelle de l'aimant*, París, 1744), que propuso asimilar la Tierra á un imán de pequeñas dimensiones relativas, cuyo centro coincide con el de la Tierra; hipótesis que fué desarrollada por J. T. Mayer (*Théoria magnética*, Göttingue, 1760), y por Biot (*Traité de Physique*, t. III, pág. 12 y siguientes); por Hausteen (*Untersuchungen über den Magnetismus der Erde*, Christriana, 1819), que supone la existencia de dos imanes excéntricos de pequeñas dimensiones relativas y de potencias diferentes; por Gaüs (*Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins)*, que considera la Tierra entera como un imán y que, reuniendo el resultado de las observaciones hechas en diferentes puntos del globo, deduce fórmulas empíricas que sirven para obtener los elementos magnéticos en un punto cualquiera de su superficie. Hoy se considera que la Tierra actúa sobre la aguja imanada como si fuera un gran solenoide eléctrico, dirigido de Este á Oeste, y que la aguja imanada toma la dirección Norte-Sur cruzándose con la corriente eléctrica, y como quiera que el Norte de la aguja imanada no coincide con el polo terrestre del mismo nombre, es preciso tener en cuenta, en la manifestación de la fuerza magnética de nuestro planeta, tres clases de fenómenos, uno de los cuales corresponde á la *intensidad* variable de la fuerza misma, mientras que los otros dos comprenden los hechos relativos á su dirección variable, es decir, la *inclinación* y la *declinación.*

Estos efectos se representan gráficamente por líneas que, en general, reciben el nombre de *líneas magnéticas.* También se llaman líneas de *variación* (Hidr. Mar.).

Clasificación.—Podemos considerar una primera serie de líneas magnéticas, tales como los *meridianos, paralelos* y *ecuador*, con respecto á los polos magnéticos, cuyas direcciones serán las semejantes á las de los meridianos, paralelos y Ecuador geográficos, con respecto á los polos de la Tierra, y luego, otra serie de líneas que sirven para unir aquellos puntos que presentan igual *intensidad, inclinación* ó *declinación* medias, y que se denominan *isodinámicas, isoclínicas é isogónicas.*

La particular descripción de cada una de estas dos series de curvas pueden verse en las voces correspondientes á su denominación.

Propiedades.—La distancia y la posición relativa de estas líneas no permanecen siempre las mismas, sino que están sometidas á continuas desviaciones oscilatorias. Estos cambios complican las representaciones gráficas que corresponden á siglos diferentes, é impiden reconocer fácilmente en ellas las relaciones y analogías de sus formas.

—Si se tiene en cuenta la perpetua movilidad de los fenómenos del magnetismo terrestre, y que la intensidad, la inclinación y la declinación varían con las horas del día y de la noche, con las estaciones y con el número de años transcurridos, no se puede menos de considerar que las corrientes eléctricas de que dependen estos fenómenos, forman sistemas parciales muy complejos en el interior de nuestro globo.

— Entre las curvaturas de las líneas magnéticas y las de las isotermas, existe una notable conexión que ha sido descubierta por Sir David Brewster, como puede verse consultando las obras *Transactions of the Royal Society of Edimburgh* (t. IX, 1821, pág. 318), y *Treatise on Magnetism* (1837, páginas 42, 44, 47 y 268).

Marcha.

Definición.—Se da el nombre de *curva de marcha* á la que sirve para representar la marcha en los aparatos de distribución de las máquinas de vapor.

— Tres son los sistemas de curvas que pueden emplearse para este objeto: la curva *polar*, la *sinusoidal* y la *elíptica.*

Consideraciones generales.—Cualquiera que sea la forma del distribuidor que se emplee, el objeto de estos aparatos es el de abrir ó cerrar un orificio; basta, para estudiar el modo de conseguir este resultado, el considerar la marcha de la arista perteneciente al obturador, con relación á aquella del orificio, y como todos los puntos

están ligados invariablemente al obturador, si se conoce la ley de marcha con relación á un punto fijo cualquiera, tanto para la varilla del obturador como para la del orificio, se tendrá asimismo la marcha relativa de las dos aristas.

Si se designa por α el ángulo descrito por la manivela motriz, á partir del punto muerto, y k la fracción de camino correspondiente recorrido por el pistón, á partir también del punto muerto; conociendo α se podrá determinar k, é inversamente, bien se deseche ó se tenga en cuenta el efecto de oblicuidad de la biela motriz y cualquiera que sea el sistema de distribución que se emplee.

Si, pues, se llega á establecer la ley de marcha del obturador en función de α, se la conocerá asimismo con relación á k.

Ahora bien; si en el plano que describe la manivela motriz se dirige una recta origen paralela al eje del cilindro, la cual encontrará al eje del árbol motor; si por este punto de encuentro se trazan una serie de radios, paralelos á la manivela en cada instante, es decir, que formen el ángulo variable α con la recta origen; y si sobre cada uno de estos radios se toman longitudes iguales á las recorridas por la arista del obturador, á partir de un punto fijo cualquiera, para el valor correspondiente de α, y, por último, si se unen por un trazado continuo los puntos de esta manera determinados, se engendrará lo que en Mecánica se llama una excéntrica (ver esta voz).

La excéntrica así obtenida será evidentemente apta, para dar al obturador precisamente el movimiento que él posea. El contorno de esta excéntrica representa la ley de marcha de la arista considerada, y es lo que se llama *curva de marcha*, la cual contiene cuanto precisa para determinar en cada instante las posiciones correspondientes del obturador y del pistón.

Si la arista del orificio es fija, bastará trazar desde el polo, como centro, una circunferencia de radio igual á la distancia que separa esta arista del punto fijo tomado como origen en el movimiento del distribuidor, y si la arista es movible, se trazará la excéntrica, representando la ley de su movimiento, siempre con relación al punto fijo tomado por origen, y el contorno de esta segunda excéntrica reemplazará á la circunferencia, que en todo instante representa la arista del orificio supuesto fijo.

Cuanto queda dicho es independiente del punto fijo tomado por origen. Este punto puede ser, por ejemplo, el que corresponde á la posición media de la arista del obturador.

Esto simplifica, en ciertos casos, la ecuación de la curva de marcha.

En este último caso, la curva en cuestión, cualquiera que sea la ley de marcha que representa, tiene necesariamente una forma en 8 ó en Θ *(ver larga inflexión)*, puesto que la longitud del radio vector pasa dos veces por cero, mientras que α pasa de 0° á 360°, es decir, en el tiempo que la manivela hace un curso completo.

Conociendo la *excéntrica* ó *curva polar* (obtenida, como hemos indicado) representativa de la marcha, sea absoluta, sea relativa, de la arista del obturador, se puede transformar esta curva en una reunión de otras, perteneciente á clases distintas.

—Se emplea, por ejemplo, una curva de la clase de las *sinusoides*. Sobre un eje se toman arcos rectificados proporcionales á los descritos por la manivela motriz; y sobre una perpendicular ó una oblicua se lleva el camino recorrido por el pistón y por la arista del obturador. Si la arista del orificio es fija, se la representa en este sistema por una recta paralela al eje de los arcos, á una distancia igual á la que separa la arista del punto fijo tomado por origen común. Si esta arista se mueve, estará representada por otra sinusoide. En este sistema se pierde el beneficio de la representación directa de los ángulos descritos por la manivela, y se destruye también la continuidad de la línea del contorno de la excéntrica ó curva de marcha.

—Antiguamente se empleaba otro género de curva, llamada *elíptica*. Sobre un eje se tomaban los cursos del pistón, á una cierta escala; sobre una perpendicular ó una oblicua á este eje se llevaban los cursos correspondientes del obturador á una escala igual ó diferente. La arista fija ó móvil del orificio está representada por una paralela al eje ó por una curva elíptica. En este sistema tampoco se obtiene la representación directa de los ángulos ni de los arcos, y las intersecciones no están tampoco bien expresas.

De estos tres sistemas, el polar presenta ventajas más importantes sobre los otros bajo el punto de vista de los cálculos y de la representación gráfica de los aparatos de distribución, siendo, por consiguiente, el que se emplea con preferencia por la mayoría de los autores.

Máxima pendiente.

Distinguiremos las líneas de máxima pendiente, *geométricas* ó que se estudian en la Geometría, y las *topográficas*, que lo son en *Topografía*.

Geométricas.—Definición.—Se llama línea de máxima pendiente de

una superficie, una curva que tiene por tangente en uno cualquiera de sus puntos la perpendicular á las horizontales del plano tangente á la superficie en este punto.

Ecuación.—El plano tangente á una superficie en un punto (x, y, z) tiene por ecuación

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

las horizontales de este plano tendrán por coeficiente angular $-\frac{p}{q}$ (ver nivel); el de la proyección sobre el plano de las xy de una tangente á la superficie es $\frac{dy}{dx}$; la condición á satisfacer por (dx, dy, dz), para que el punto $(x + dx, y + dy, z + dz)$ pertenezca á la línea de máxima pendiente dirigida por (x, y, z), será, por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q} \quad \text{ó} \quad pdy = qdx;$$

ecuación diferencial que representa las proyecciones sobre el plano horizontal de todas las curvas de máxima pendiente.

Propiedades.—Cuando la superficie es plana, la línea de máxima pendiente es una recta perpendicular á la traza horizontal del plano.

— La tangente, en el caso general, á la línea máxima pendiente en un punto de una superficie, es la tangente á la superficie en este mismo punto, que forma el mayor ángulo con el plano horizontal.

— Una línea de máxima pendiente corta en ángulo recto todas las líneas de nivel (ver esta voz), y recíprocamente toda curva que goza de esta propiedad es una línea de máxima pendiente.

Aplicaciones.—Sea el elipsoide cuya ecuación es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

para obtener las líneas de máxima pendiente se integrará la ecuación

$$pdy = qdx; \qquad (1)$$

ahora bien, en este caso se tiene que

$$p = -\frac{c^2 x}{a^2 z} \quad \text{y} \quad q = -\frac{c^2 y}{b^2 z};$$

y substituyendo en la ecuación (1) y simplificando, se tiene:

$$\frac{xdy}{a^2} = \frac{ydx}{b^2};$$

ecuación en la cual las variables se separan inmediatamente. Se tendrá,

$$b^2 \frac{dy}{y} = a^2 \frac{dx}{x};$$

de donde

$$y^{b^2} = (\gamma x)^{a^2}, \qquad (2)$$

siendo γ una constante que se determina expresando que la curva buscada pasa por un punto dado. Así, por consiguiente, si se quiere buscar, de entre las líneas de máxima pendiente, aquella que deba pasar por el punto cuyas coordenadas sean

$$x = a, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

se tendrá, substituyendo en la ecuación (2)

$$g = (\gamma a)^{a^2},$$

de donde $\gamma = 0$, y por tanto,

$$y = 0,$$

que es la ecuación de la proyección horizontal de la línea buscada; ó lo que es lo mismo, la línea de máxima pendiente es la elipse principal situada en el plano de la zx. Es, por demás, evidente que esta elipse corta en ángulo recto todas las curvas de nivel.

En el caso de buscar la curva de máxima pendiente que pase por un vértice situado sobre el eje de las z, la ecuación (2) se reducirá para este punto á

$$0 = 0,$$

y queda γ indeterminada. Así debe ser, en efecto, puesto que en dicho punto el plano tangente á la superficie es horizontal, y la curva de nivel se reduce á un punto. Toda recta que pasa por este vértice, y esté situada en el plano tangente, puede ser considerada como perpendicular á la línea de nivel, y, por consiguiente, como tangente á una línea de máxima pendiente.

Topográficas.—Para completar la representación de una superficie topográfica se trazan las líneas de máxima pendiente que están representadas por curvas que cortan en ángulo recto á todas las líneas de nivel.

— Cuando las líneas de nivel están bastante cercanas, estas líneas son fáciles de trazar con una suficiente aproximación, y sus elementos son las normales comunes á las curvas de nivel consecutivas que va encontrando.

—Sobre el plano se trazan una serie de líneas de máxima pendiente que se multiplican en las partes en que la pendiente es mayor, al propio tiempo que se les hace el trazo más grueso, al objeto de hacer resaltar mejor la configuración del terreno.

Clasificación.— Entre las líneas de máxima pendiente existen dos categorias que merecen atención particular: una son las *divisorias de aguas* ó, abreviadamente, *divisorias* (ver esta voz), y otras los *talveg* ó *vaguadas* (ver esta voz); distinguiéndose unas de otras en un didujo, porque trazadas según un descenso ó declive, las primeras encuentran las curvas de nivel según su concavidad, mientras que las segundas lo verifican según su convexidad.

Aplicaciones.— Estas líneas, juntamente con las de nivel, sirven para representar sobre un plano el relieve de un terreno, y poder dentro de este sistema de representación, por planos acotados, resolver problemas importantísimos, como son: los trazados y aperturas de las vías de comunicación, establecimientos de canales de todas especies, dragados bajo el nivel del mar ó de los grandes ríos, y en general, toda clase de operaciones topográficas.

Para obras á consultar, ver el artículo *Nivel.*

Media (Línea ó fibra).

Definición.— Cuando en *Resistencia de materiales* se considera una pieza curva cualquiera, el lugar geométrico de los centros de gravedad de sus secciones normales se denomina línea ó fibra media.

Consideraciones generales.— Las piezas curvas que entran en las construcciones, y que, por consiguiente, precisa hacer su estudio bajo el punto de vista de resistencia, son de ordinario piezas simétricas con relación á un plano vertical trazado en el sentido de su longitud. La fibra ó línea media estará situada en este plano de simetría.

— Si la pieza es recta, la línea media lo será igualmente.

— Según la definición anterior, se puede concebir la pieza como engendrada por el movimiento de una figura cerrada, trazada en el plano normal á la curva de la fibra media y que se mueve de manera que su centro de gravedad coincida siempre con un punto de dicha curva tomada como directriz.

Aplicación.— El conocimiento de la forma que afecte la línea ó fibra media es de gran importancia en los fenómenos de flexión, en los que esta línea, después de modificada, se llama *curva de flexión* (ver esta voz), y en los demás esfuerzos á que las piezas estén sometidas en las *construcciones.*

Médicas.

Definición.— Puede darse esta denominación á ciertas curvas gráficas que particularmente dan á conocer el curso de las enfermedades.

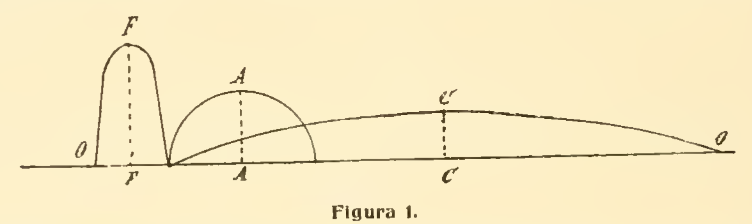


Figura 1.

Denominaciones y formas.— Entre las diferentes curvas de esta especie citaremos principalmente la *F* (fig. 1), que determina el cur-

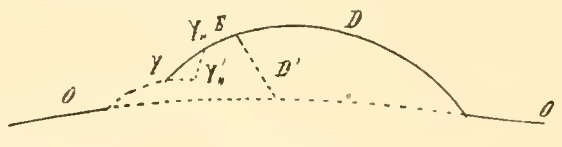


Figura 2.

so de una enfermedad fulminante; la *A;* el de una enfermedad aguda, y la *C,* el de una crónica.

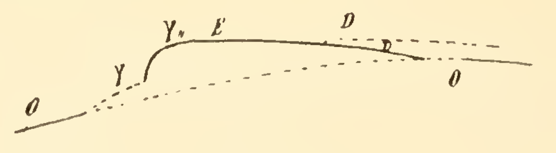


Figura 3.

Los distintos periodos de invasión, curso y resultado se expresan

también por otras líneas, tales como la de la fig. 2, en la cual OO es la curva de la salud; Y, el período prodómico; Y_n es el incremento; E, estado; D, declinación; Y_n, incremento rápido; D', la declinación rápida ó crisis. La de la (fig. 3) OO expresa la curva de la salud; Y, la invasión de una enfermedad crónica; Y_n, incremento; E, estado; D, declinación, y D', el estado crónico indefinido.

Como los dibujos demuestran, estas líneas dan á simple vista un conocimiento perfecto de las circunstancias especiales que concurren en una enfermedad cualquiera.

Medio punto.

Definición.—Se llama arco de *medio punto* aquel que es la mitad de la circuferencia, es decir, que su flecha es la mitad de la luz.

Historia.— Esta denominación de *medio punto* se encuentra ya usada por Fr. Lorenzo de San Nicolás *(Arte y uso de Arquitectura*, Parte I, cap. XXXVIII), pero también se le ha llamado *medio redondo*, Juanelo *(Obras* M. SS., lib. XVIII); conociéndosele asimismo con los nombres de *semicircular* y *circular* por su forma de *arco romano* por el uso que en la Arquitectura de aquel pueblo tuvo, y de *plena cintra* por circunstancias de la construcción.

Meridiana.

Definición.— En Geodesia se llama asi á la línea intersección de la superficie de la tierra por el plano del meridiano terrestre (ver esta voz).

Historia.—La medida de un arco de esta curva es una de las operaciones más importantes de la Geodesia, pues que nos sirve para la determinación de las dimensiones y forma de la tierra. Del tiempo de los egipcios datan las primeras medidas que se hicieron de la tierra, y éstas son debidas á Eratóstenes (1600 a. de J. C.), que midió el arco de meridiano comprendido entre Siena y Alejandría. Mr. Jornard, en su obra *Description de l'Egipte*, *antiquites* (T. X), considera que la gran pirámide de Cheops es un monumento astronómico, y demuestra que, entre otras partes que guardan relación con el grado de meridiano del Egipto, el perímetro de la indicada pirámide es $\frac{1}{120}$ parte de dicho grado. Los árabes, en 830 de nuestra era, bajo el reinado del ilustre califa El Mamoun, midieron en la Mesopotamia el grado terrestre de Singuiar. Fernel, en 1550, bajo

el reinado de Enrique II, mide, sirviéndose del número de vueltas de la rueda de un coche, con rara aproximación, el grado de París á Amiens, siendo Snellius, en 1615, el primero que hace uso de una red de triángulos para medir la distancia de Malines á Alemaër. En 1635, Norwood imita á los anteriores entre Londres y York. Picard, partiendo de una base de Villejuif á Jurisy, y sirviéndose de 35 triángulos, mide el arco de Sourdon á Malvoisine en 1670, y Cassini, en 1700, dirige la medida de la meridiana de Dunkerque á Barcelona.

A estas medidas han seguido otras muchas, y para simplificar, en el cuadro que sigue se exponen aquellas que se han considerado como más exactas.

PAÍS	Amplitud del arco medido.	Latitud del medio del arco.	Longitud del grado en metros.	NOMBRE DE LOS OBSERVADORES
Suecia........	1º 37′ 19″	66º 20′ 40″	111.488	Swanberg.
Rusia....	3 35 05	58 17 37	111.362	Struve.
Inglaterra.....	3 57 13	52 35 45	111.241	Roy, Kater.
Francia.......	8 20 00	46 52 02	111.211	La Caille y Cassini III.
Francia.......	12 22 13	44 51 02	111.108	Delambre y Méchin.
Roma.........	2 9 47	42 59 00	111.025	Boscowich.
Estados Unidos	1 28 45	39 12 00	110.880	Masón y Dixon.
Cabo de Buena Esperanza...	1 13 17.5	33 18 30	111.163	La Caille.
India.........	15 57 40	16 08 22	110.653	Lambton y Everest.
India.........	1 34 56	12 32 21	110.644	Lambton.
Perú..........	3 7 3	1 31 00	110.582	Bouguer, Godín y La Condamine.

Propiedades.—Esta línea es una curva de doble curvatura, si bien se puede suponer, sin error sensible, que sea una curva plana.

— No se puede medir directamente un arco terrestre de gran extensión, sin encontrar obstáculos en su trazado sobre la tierra, por no haber en ella ningún desierto tan grande y horizontal para que sin ellos se pudiera hacer esta operación.

— Como los extremos de un gran arco terrestre ó de línea meridiana

están muy alejados, y no se puede desde el uno distinguir el otro, se está obligado á trazar este arco sobre el suelo por medio de estaciones sucesivas. A este objeto se dispone un anteojo en el plano del meridiano de modo que su eje se mueva en dicho plano, y se coloca á lo lejos una señal en este eje; se transporta el anteojo, y, colocado de nuevo en el eje de la meridiana, se le dirige al punto anterior, y se dispone otra nueva señal en la dirección opuesta á la primera; repitiendo estas operaciones, como el eje óptico se conserva siempre en el meridiano de partida, se colocará la serie de señales suficientes que han de marcar sobre el suelo la línea meridiana.

— La operación de medir esta línea lleva consigo errores, y se prefiere formar una red de triángulos, de los cuales se determinan todos los elementos, y se busca por el cálculo la longitud del arco que atraviesa esta red y que une sus dos extremos. Conocida que sea la longitud por medio de observaciones astronómicas, se obtendrán las latitudes de los puntos extremos, y, por tanto, el número de grados de que consta el arco medido, con lo cual se determina la longitud que á un grado corresponde.

— Para mejor ilustración sobre las cuestiones relativas á la medida de estas líneas y su importancia para la determinación de las magnitudes de la tierra, pueden consultarse las obras y tratados siguientes: Maupertuis, *De la figure de la terre;* La Condamine, *Mesure des trois premiers degrés;* Blœsing, *De línea meridiana* (1700); Lagrange, *Mémoires de Berlin* (1773); Laplace, *Mécanique celeste;* D'alembert, *Recherches sur différents points du systéme du monde;* Cassini, *Méridienne de París vérifiée;* Clairant, *Théorie de la figure de la terre*, etc.; así como los tratados de *Geodesie,* de Puissant, Francœur, A. Salneuve, Benoit, Begat, etc.

— En Geometría se llama *meridiana* de una superficie de revolución la sección hecha en esta superficie por un plano que pase por su eje.

Propiedades.—Estas secciones son idénticas en cuanto á su forma, porque ellas son superponibles.

— Una meridiana y el eje de una superficie de revolución son suficientes para que ésta quede perfectamente definida.

— Cuando el eje de una superficie de revolución es paralelo á un plano de proyección, tiene una meridiana paralela á este plano; á ésta se la distingue con el nombre de *meridiana principal.*

— El plano de una meridiana es no tan sólo normal á la superficie en cada uno de los puntos de esta curva, sino que es el plano de una

sección principal, es decir, en la que la curvatura es máxima ó mínima. Por lo demás, la razón sola de la simetria es suficiente para poder afirmar que de cualquier modo que se consideren las curvas trazadas sobre una superficie de revolución, el meridiano es la sola que goza de la propiedad de ser ya máximo, ya mínimo.

— En las aplicaciones de las funciones elípticas á la Geometría sobre una curva de tercer orden, Clebsch considera una superficie especial, y en ellas dos especies de curvas, unas que llama de latitud, y otras, curvas *meridianas* (ver latitud).

Estas curvas meridianas están formadas por las tangentes de la rama tricuspidal, es decir, están determinadas sobre la superficie anular por el encuentro de un plano trazado por una tangente semejante perpendicular al plano del cuadro.

Meridiana del tiempo medio.

Definición.—Se da este nombre á la curva que suele trazarse en los cuadrantes solares y que indica el medio día en *tiempo medio* para todos los meses del año.

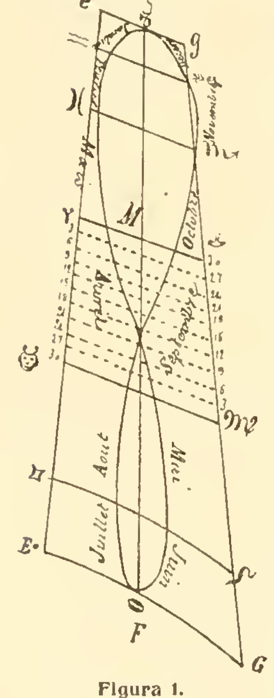


Figura 1.

Propiedades.— Esta curva presenta la forma de un ocho alrededor de la línea del medio día del cuadrante sobre que se encuentra trazada, cortándola en cuatro puntos, que corresponden aproximadamente al 15 de Abril, 15 de Junio, 31 de Agosto y 24 de Diciembre, épocas en que la ecuación del tiempo es nula.

—El nodo del ocho corresponde, poco más ó menos, á una declinación austral de 9°; es decir, á épocas próximas al 30 de Agosto y 16 de Octubre.

Trazado.— Para verificar el trazado de esta linea es necesario construir antes las zodiacales (ver esta voz) correspondientes á intervalos de un mes ó de quince en quince días. Así, por ejemplo, se trazarán las zodiacales correspondientes á los días 6 y 21 de cada mes, y llevando luego sobre cada una de ellas, á partir de la linea del medio dia, y en el sentido conveniente, una longitud que corresponda á la ecuación del tiempo para el día con respecto al cual se ha construido

cada línea zodiacal, se obtendrán diferentes puntos de la curva pedida, que unidos por un trazado continuo, nos darán la curva completa. En efecto; las líneas zodiacales se trazan eligiendo por punto de partida el paso del sol por el meridiano, es decir, el *medio día verdadero;* y, por tanto, tomando la ecuación del tiempo á la izquierda cuando ella es positiva, por preceder en este caso el medio día medio al medio día verdadero, y á la derecha, cuando es negativa, por la razón inversa se tendrá que la extremidad de la sombra del estilo deberá coincidir con la curva trazada á la hora del medio día medio.
— Del propio modo se podrá trazar la curva del tiempo medio para una hora cualquiera, calculando por interpolación la ecuación del tiempo para esta hora; pero de ordinario sólo se construye la curva del medio día medio, que se representa en la figura adjunta.
—Por virtud de esta línea, el cuadrante solar puede ser útil para los usos civiles, puesto que nos da el medio día medio.

Meridiano

Del latín, *meridies*, medio del día.

Definición.—Se llama así, en Astronomía, á un gran círculo de la esfera celeste que pasa por el cenit, el nadir y los dos polos del mundo.

Propiedades.— Este círculo es perpendicular al horizonte, al ecuador y á todos los círculos que describen las estrellas, dividiéndolos en dos partes iguales; por tanto, en virtud del movimiento diurno, cada estrella pasará dos veces por el meridiano durante una revolución, y como el movimiento se sabe es uniforme, la duración de estos pasos *(superior* é *inferior)* es exactamente la misma.

La propiedad de dividir la revolución de las estrellas en dos partes de igual duración no es visible más que cuando se trata de una estrella *circumpolar* ó cuya revolución completa se verifica por encima de nuestro horizonte. Para las otras, suponiendo el plano del meridiano indefinido, el paso inferior se hará por bajo de nuestro horizonte, no siéndonos visible. Pero en su marcha, al recorrer el arco que describen sobre dicho plano siguen la misma uniformidad, viniendo á quedar este arco dividido por el meridiano en dos partes iguales. En resumen; si á contar del meridiano se toman á un lado y otro arcos iguales de la revolución de una misma estrella, ésta pasa por dichos puntos con intervalos de tiempo sidéreo iguales, á contar de cuando lo hizo por el meridiano.
— El punto en que una estrella hace su paso superior por el meridiano de un lugar se llama *culminación* ó *punto culminante.*

— Las dos partes en que el plano meridiano divide á la esfera celeste se nombran *oriental* y *occidental.*

— La recta intersección del meridiano y del horizonte se llama *línea meridiana*, ó simplemente la *meridiana* del punto de observación; la cual, prolongada indefinidamente en el plano del horizonte que la contiene, determina en la esfera celeste dos puntos opuestos, que son el *norte* y el *sur*. Para la Europa, el punto Sur está situado al lado del cielo en que el sol alcanza cada día el punto culminante de su arco diurno; esta es la razón por la que se le denomina también *mediodía.* El punto Norte, opuesto al anterior, se encuentra colocado hacia la parte del cielo en que brillan las siete estrellas de la constelación, llamada Osa Mayor ó Carro. También se le llama *septentrión*, porque las siete estrellas de la Osa mayor fueron nombradas por los romanos *septem triones.* Si por el punto de observación se traza en el plano horizontal una línea recta perpendicular á la meridiana, esta línea se llama *la perpendicular;* ella viene á ser el eje del meridiano, y prolongada indefinidamente, nos da los puntos *este* y *oeste*, que vienen á ser, por consecuencia, los polos del dicho plano. El plano que esta línea y la vertical del lugar determinan, es perpendicular al meridiano y se distingue con el nombre de *primer vertical.*

— Sobre el meridiano se miden las declinaciones de los astros, las alturas del polo sobre el horizonte, la altura meridiana del sol ó de un astro sobre el horizonte y la distancia meridiana del cénit á un astro cualquiera.

En Geografía se llama *meridiano terrestre* á un círculo máximo de la esfera terrestre que pasa por los polos de la tierra y que se encuentra en el mismo plano que el meridiano celeste. Es propiamente la intersección de la superficie de la tierra por el plano del meridiano.

—El meridiano terrestre ó meridiana (Ver esta voz) es una línea de doble curvatura; pero en las aplicaciones á la Geografía permite el considerarla como plana, atendiendo á que el error es insensible sobre los mapas.

— Existen diferentes métodos para trazar una fracción de meridiano de poca extensión. Para longitudes regulares, se usan métodos para los cuales se utilizan la brújula, ó bien por la observación de las estrellas.

— Se ha dividido el ecuador en 360 partes iguales, y por cada una

se ha hecho pasar un meridiano. En Geografía se da también á los meridianos el nombre de grados de latitud, y la tierra presenta sucesivamente al sol cada uno de sus meridianos.

— Se da el nombre de *primer meridiano* á aquel á partir del cual se ha convenido en contar todos los demás, y con referencia al cual se cuentan las longitudes geográficas (ver longitud).

— Se da el nombre de *meridiano magnético* al círculo máximo que pasa por los polos de un imán y el centro de la tierra.

— La propiedad que los caracteriza es que una aguja de declinación que los recorra de N. á S. deberá estar constantemente contenida en su plano, y debida á esta propiedad se les puede construir gráficamente, como lo ha hecho Duperrey y los ha trazado sobre un mapa, reconociendo que no son círculos máximos de la esfera, ni tampoco curvas planas, pero que no son muy irregulares. A medida que se alejan del ecuador, tienden á aproximarse, llegando, por último, á concurrir en dos puntos extremos. Estos son los polos magnéticos de la tierra, cuya posición geográfica es:

Para uno... 70° 5′ N. y 90° 12′ O.

Para el otro. 75° 20′ S. y 130° 10′ E.

Si estos puntos se comparan con aquellos en que los ejes de los dos ecuadores magnéticos tocan la envolvente terrestre, se ve que no hay gran diferencia entre ellos, aun cuando alguna existe; lo cual se explica de una manera general, como lo hizo Tobia Mayer en 1760, admitiendo que el eje del imán no pasa por el centro del ecuador magnético, si bien está situado sobre una línea perpendicular á su plano, poco separada de este centro.

Mesócrona.

Se encuentra en *Des methodes en Géometrie,* P. Serret, pág. 132, la manera de engendrar estas líneas que no tienen interés alguno científico.

Metacéntrica.

Definición.— Se da este nombre á la curva proyección sobre el plano latitudinal del casco de un navío del lugar de los metacentros, es decir, á la evoluta del lugar de las proyecciones del centro de carena.

Consideraciones generales.— Sea un navío (fig. 1) y ab la línea de flotación; el centro de gravedad del navío está en G por encima del centro de carena c. Si se hace oscilar el navío, la línea de flotación horizontal vendrá á $a'b'$ tal que el volumen inmergido bob' permanezca igual al emergente aoa'. En la nueva posición, el centro de gravedad no cambiará, y en cambio, el de carena habrá venido de c á ocupar el punto c'. El cuerpo flotante se encuentra, por consiguiente, sujeto á la acción de un par, cuya una de sus fuerzas P está aplicada á G, mientras que la otra, el empuje π, lo estará en c'. Este par tiene por brazo de palanca Gd. Se llama *metacentro*, denominación debida á Bouguer, al punto m, en que el nuevo empuje π encuentra á la vertical del centro de gravedad cuando se hace oscilar al navío una cantidad infinitamente pequeña con relación á su posición primitiva.

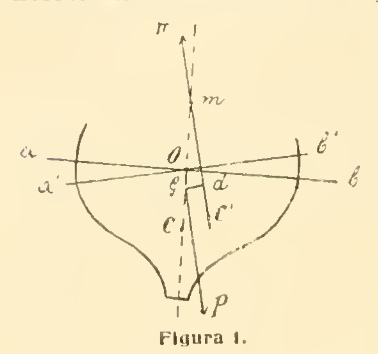


Figura 1.

Si se supone al navío dividido en un gran número de secciones verticales, cada una tendrá un metacentro, y las inclinaciones sobre una y otra banda originarán por sus proyecciones sobre el plano latitudinal y el longitudinal dos curvas metacéntricas, simétricamente colocadas, que se reúnen en la vertical del centro de gravedad en un punto que, para seguridad del buque en el agua, debe hallarse elevado sobre el centro de gravedad, en la referida vertical imaginaria; porque, de lo contrario, no sólo la embarcación no podría adrizarse, sino que zozobraría infaliblemente. Este punto es el primer metacentro.

Se llama primer metacentro latitudinal el que responde al caso en que el navío tiende á girar alrededor de un eje horizontal trazado en su plano de simetría, y primer metacentro longitudinal aquel que corresponde al caso en que el navío tiende á girar alrededor de un eje perpendicular al anterior.

Determinación y forma.— Consideremos el caso en que el navío se mueve alrededor de una horizontal trazada en el longitudinal. Si por los diferentes puntos de la línea de los centros de carena (ver esta voz), se trazan rectas que vengan á ser sucesivamente verticales, es decir, las rectas CV, $C'V'$, $C''V''$..... (fig. 2), estas rectas serán normales á la línea de los centros de carena, y, por tanto, perpendiculares á las líneas de agua AB, $A'B'$, $A''B''$..... y determinarán por sus intersecciones sucesivas una curva MD, simétrica con rela-

ción á CV, que será la evoluta de $CC'C''$....., es decir, la curva metacéntrica.

—Si el navío suponemos que se mueve alrededor de un eje perpendicular al longitudinal, se determinará como antes la curva metacéntrica, pero no será simétrica con relación al latitudinal, atendiendo á que la forma del buque es muy diferente en proa de la que tiene en popa. A igual altura, los puntos de la rama de proa se separan más prontamente de la vertical en su vértice que los puntos de la rama de popa, y la curva presenta una forma análoga á la representada en la (fig. 3.ª).

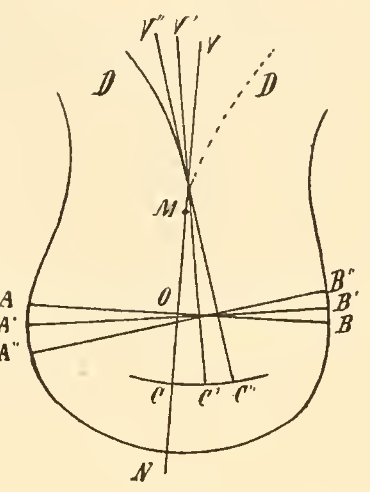


Figura 2.

—Cuando en cualquiera de los dos casos considerados se tiene la curva metacéntrica construída con cuidado, á una escala suficiente sobre el plano latitudinal, lo mismo que la curva de los centros decarena, bastará para encontrar el punto que corresponde á una línea de flotación dada por su ángulo α dirigir una tangente á la curva de los metacentros, ó una normal ó la de los centros de carena, que forme con la vertical primitiva un ángulo igual á la inclinación α.

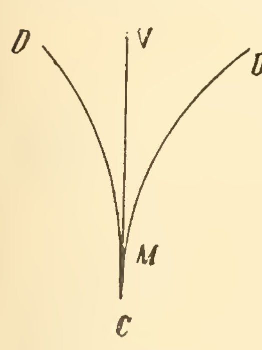


Figura 3.

—La teoría de esta curva, su determinación y cuanto á los puntos metacéntricos se refiere, es de una gran importancia para la estabilidad de los navíos, y puede estudiarse más detenidamente, entre otras obras, en las siguientes: *Théorie du navire*, Poterat; *Construction des bâtiments de mer*, Viel; *Traité du navire*, Bouguer; *Cours de Mécanique*, Bélanger; *Construction navale*, de la escuela de Brest, etc.

Metereográficas.

Del griego μετέωρος, *elevado en el aire*, y γράφω, *trazar*.

Definición.—Reciben este nombre las líneas indicatrices de las in-

tensidades de los fenómenos metereológicos señalados por los aparatos metereógrafos.

Historia.—El primer metereógrafo cuyas indicaciones quedaban trazadas en un papel, fué presentado en la Exposicion Universal de 1867 por el P. Secchi, Director del Observatorio romano, el cual, por medio de un circuito voltaico que contenía un electroimán, marcaba sobre un papel, por medio de un lápiz, la curva metereográfica.

Este aparato fué descrito por su autor y por M. Pousian.

Otros metereógrafos, tales como los construídos por MM. Hasler y Escher, sobre las indicaciones de Wild, no señalan las observaciones por medio de puntas de carbón ó de lápiz, sino que trazan las curvas metereográficas por el intermedio de agujas que pican el papel, registrado á intervalos iguales.

Aplicaciones.—Por el grado de curvatura de estas líneas se conocen las intensidades de los fenómenos á que hacen referencia.

Molino de viento.

Longchamps ha dado este nombre á la curva cuya ecuación polar es

$$r = a \,.\, \cot \,.\, 2\theta,$$

y que estudia en su *Cours de Problémes,* t. I, pág. 137.

—Presenta cuatro asíntotas, paralelas á los ejes dos á dos, y cuatro ejes de simetría.

Momentos (Curva de los).

Definición.—Se da el nombre en Estática gráfica de curva de los momentos, ó mejor de curva representativa de los momentos de flexión, á una línea cuyas ordenadas, contadas á partir de la fibra media de una viga en su estado natural, tomada como eje de las abscisas, son proporcionales á los momentos de flexión.

Trazado.—Sea (fig. 1) una traviesa cualquiera, $A_{n-1}\, A_n = l_n$, sujeta á diferentes cargas, 1.2.3.4.

Consideremos trazado un polígono funicular de distancia polar cualquiera, d, de estas fuerzas; pero en lugar de tomar este polígono al azar como en el caso de una viga apoyada en sólo dos puntos, sea el polígono de distancia polar d que pasa por los puntos A_{n-1} y A_n,

en que las verticales de los apoyos cortan al eje de las x, es decir, la fibra media en su estado natural.

Sea A_{n-1} 1.2.3.4A_n el indicado polígono. Las ordenadas, contadas á partir de su cuerda $A_{n-1}\ A_n$, representan, teniendo presente el valor del factor d, el momento de flexión M, que se produciría si la traviesa $A_{n-1}\ A_n$ estuvira sola, libremente apoyada sobre estos dos apoyos A_{n-1} y A_n.

El momento de flexión verdadero, M, será proporcional á las orde-

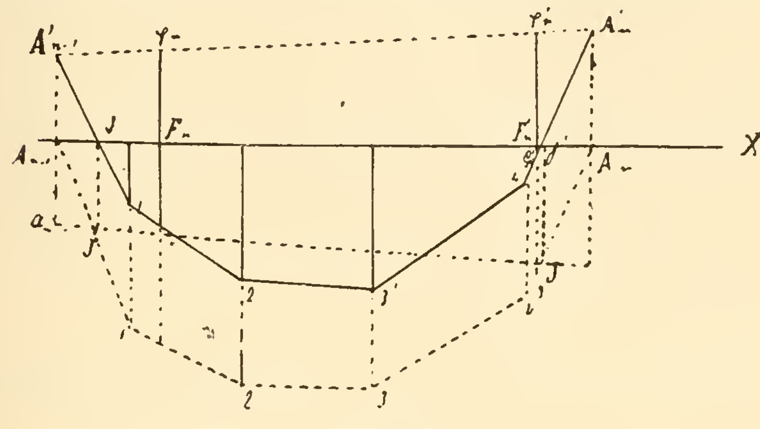


Figura 1.

nadas de este mismo polígono, contadas á partir de la línea de cerramiento $a_{n-1}\ a_n$.

Si ahora queremos contar estas mismas ordenadas á partir de $A_n A_n$, se obtendrá una nueva linea A'_{n-1} 1.'2.'3.'4.'A'_n, que será la llamada línea representativa de los momentos.

Cuando el polígono funicular primeramente trazado sea una curva, el determinado conforme á la construcción indicada será igualmente una línea *curva representativa de los momentos.*

Propiedades.—La línea obtenida es un nuevo polígono funicular de las fuerzas dadas, de la misma distancia polar d que el primero, y pasa por los dos puntos A'_{n-1} y A_n, de modo que las ordenadas A_{n-1} A'_{n-1} y $A_n A'_n$ son, teniendo el valor de d presente, los momentos de flexión sobre los apoyos A_{n-1} y A_n.

— Si consideramos el foco F_n de la izquierda, la ordenada $F_n G_n$ de la línea representativa es proporcional al momento de flexión en F_n; siendo dicha ordenada independiente de la porción de viga colocada á la derecha de la traviesa respecto al foco F_n. Lo propio puede decirse para el punto G_n.

— Se tiene por construcción:

$$F_n G_n = f_n g_n,$$

y, por consiguiente,

$$F_n G_n = f_n g_n = F_n g_n - F_n f_n.$$

El primer miembro es independiente de la porción de viga colocada á la derecha de la traviesa considerada; la ordenada $F_n g_n$ del polígono funicular $A_{n-1} A_n$ lo es también; por lo tanto, la ordenada $F_n f_n$ de la línea de cerramiento, y, por consiguiente, el punto f_n es asimismo independiente de la porción de viga colocada á la derecha de A_n.

— Por construcción se ve también que la cuerda $A'_{n-1} A'_n$ es simétrica con relación al eje de las x de la línea de cerramiento $a_{n-1} a_n$, de manera que el punto φ_n, simétrico de f_n, es por este lado independiente de la misma porción de viga.

— Las mismas circunstancias se verifican respecto al foco de la derecha.

— Cuando se necesita modificar de un modo cualquiera las cargas, longitudes de traviesa, niveles de los apoyos de la parte de una viga de sección constante colocada á la derecha de una traviesa l_n, ó llegar á suprimir esta parte de la viga sin modificar el resto:

1.° La línea representativa de los momentos de flexión en cada una de las traviesas á las cuales no se ha tratado de cambiar se modifica girándola alrededor de un punto fijo colocado sobre la vertical del foco de la izquierda de esta traviesa.

2.° Se hará lo propio con la cuerda de cada una de estas líneas, así como con la recta de cerramiento correspondiente.

— Si se hacen las mismas modificaciones sobre la parte de la viga colocada á la izquierda de la traviesa l_n, cada una de las líneas representativas del momento de flexión de que se acaba de hablar se modifican haciéndolas girar alrededor de un segundo punto fijo colocado sobre la vertical del foco de la derecha de la traviesa á la cual ella pertenece. Se hará lo propio con la cuerda de esta línea y con la recta de cerramiento correspondiente.

Momentos flexibles (Curva de los).

La determinación de esta línea, cuyas ordenadas nos dan el valor de M que entra en las fórmulas de la flexión (ver esta voz) de las

vigas rectas ó de formas curvas, puede hacerse por medio del cálculo ó sirviéndose de los procedimientos de la Estática gráfica, á cuyo efecto en el artículo citado se pueden encontrar las indicaciones necesarias para poder conocer sobre estos extremos.

Múltiples (Líneas).

Definición.—Se da este nombre al lugar de los puntos situados sobre una superficie que son múltiples, respecto de curvas arbitrarias trazadas en la misma.

Historia.—El estudio particular de estas líneas ha sido hecho por Mr. Benjamin Amiot, *Mémoire sur les points singuliers des surfaces*, 1846: y puede verse también *Mémoires de l'Académie Royale de Bruxelles* (T. XXI).

Aplicaciones.—Estas líneas no ofrecen ningún interés determinado.

N

Negativas.

Denominación dada á ciertas curvas por M. W. Roberts. (Ver *Derivadas.)*

— Esta expresión ha sido generalizada para la esfera por Mr. Faure *(Nouvelles Annales*, t. XIII, pág. 373).

Neoides.

Del griego νηός, jónico; de ναῦς, barco.

Nombre que W. J. M. Rankine propone á la *Asociación Británica* en 1863 para designar las líneas de *agua plana* (ver esta voz).

Neoides oógenas.

Del griego ᾠογενής, engendrado por un huevo.

Nombre que W. J. M. Rankine propone á la *Asociación Británica* en 1863 para designar las *líneas de agua plana* (ver esta voz) engendradas por una oval ú óvalo, en el cual se verifica que la ordenada en cada uno de sus puntos es proporcional al ángulo comprendido entre las dos líneas trazadas de éste á los dos focos.

Neutras.

Definición. —En Física se llama *línea neutra* á la que en un cuerpo, en el que los flúidos eléctricos ó magnéticos ocupan los polos, no presenta ningún fenómeno de electricidad ó magnetismo.

— Parecidamente, en Óptica se encuentran también líneas neutras en los cristales de un eje y de dos, que se reconocen cuando se estudian las coloraciones de las láminas delgadas cristalinas; y su determinación se obtiene por la discusión de la fórmula relativa á las intensidades.

—En los cristales de un eje, cuando el analizador es perpendicular al polarizador, se ve en la imagen ordinaria una cruz negra rectangular, cuyos brazos son perpendiculares y paralelos al plano de la polarización primitiva; entre estos brazos se distinguen anillos que presentan las tintas sucesivas de las franjas de interferencias. En la imagen extraordinaria, el fenómeno es enteramente complementario.

—En los cristales bi-ejes, y suponiendo el caso en que el polarizador y el analizador son paralelos ó se cruzan, las líneas neutras están dadas por la ecuación

$$\text{sen}\,.\,2\alpha = 0,$$

que se satisface para $\alpha = 0$ y $\alpha = 90°$; siendo α el ángulo que forma con el plano de polarización del polarizador el plano de polarización de uno de los rayos que se propagan según la dirección considerada.

Si la lámina es paralela al plano de los ejes, no existen líneas neutras; si la lámina es perpendicular á la línea media ó á la línea suplementaria, las líneas neutras afectan formas hiperbólicas, y si la lámina es perpendicular á uno de los ejes, las líneas neutras son sensiblemente rectilíneas.

—Para el mejor estudio de esta cuestión se puede consultar el *Cours de Physique*, de J. Jamin (t. III, fascículo III, pág. 468 y siguientes.)

Nivel.

Definición.—Las líneas de nivel de una superficie son las secciones hechas en esta superficie por planos horizontales. Se las llama también curvas *horizontales.*

Clasificación.— Distinguiremos las lineas de nivel *geométricas*, *topográficas* y *geodésicas.*

Geométricas.—Consideremos los puntos de una superficie referida á tres coordenadas rectangulares x, y, z; siendo x é y horizontales y z vertical, la figura de la superficie estará dada por una ecuación de la forma

$$z = f(x, y),$$

y la ecuación de una de sus líneas de nivel será:

$$z = h \quad \text{y} \quad f(x, y) = h,$$

designando por h una constante.

De la segunda de estas ecuaciones se deduce

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

y si llamamos p y q á las derivadas parciales de z con relación á x y á y en un punto de la superficie, se tendrá:

$$\frac{dz}{dx} = p = \frac{df}{dx} \quad \text{y} \quad \frac{dz}{dy} = q = \frac{df}{dy},$$

y la ecuación característica de una línea de nivel será:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{p}{q},$$

la cual expresa que la tangente á la línea de nivel que pasa por el punto (x, y, z), es paralela á la traza horizontal del plano tangente á la superficie en este punto.

— Si la ecuación de la superficie es de la forma $F(x, y, z) = 0$, se obtendrá la ecuación diferencial de las líneas de nivel, eliminando h entre las ecuaciones

$$F(x, y, h) = 0, \quad \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Aplicación.—Supongamos el elipsoide cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Las líneas de nivel estarán representadas por las ecuaciones

$$z = h, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2},$$

que nos dan por proyección, sobre el plano de las xy, dos elipses semejantes á la elipse principal que está situada en este plano.

Topográficas.—Para representar las ondulaciones del suelo sobre un plano ó sobre un mapa, se supone el terreno cortado por una serie de planos horizontales equidistantes. Cada uno de estos planos, por su intersección con el terreno, produce una *curva* cuya posición

se caracteriza por una acotación; el conjunto de estas secciones de nivel equidistantes, da origen á un sistema de *curvas de nivel* que representan perfectamente el relieve y da lugar á una *superficie topográfica.*

Propiedades.—Cada curva de nivel se acompaña de una cota que expresa su distancia á un plano horizontal de comparación.

— La diferencia de cota de dos líneas de nivel consecutivas se denomina *equidistancia.*

— Cuando un punto está dado por su proyección horizontal, su cota se deduce inmediatamente si esta proyección se encuentra sobre una curva de nivel, puesto que la cota de esta curva será la del punto considerado.

— Si la proyección dada se encuentra entre dos curvas de nivel, se dirigirá por dicho punto una recta cualquiera, que se considerará como traza de un plano vertical. Se determina la sección que este plano produce en la superficie topográfica, y rebatida bastará levantar, por el punto dado, una perpendicular á la traza del plano vertical considerado, hasta que la corte; y la distancia así obtenida á la escala del dibujo, será la cota del punto cuya proyección fué dada.

— Cuanto la distancia entre dos curvas de nivel sea más pequeña, la pendiente es más rápida.

— En los relieves, toda curva cerrada corresponde á puntos de nivel más elevados que aquellos de otra curva también cerrada que envuelva á la primera. En las depresiones se verifica lo inverso, y á fin de que no se confundan los salientes con las excavaciones, se inscriben generalmente sobre el plano las acotaciones de altura de las curvas de nivel extremas.

— Cuando las curvas de nivel, directamente obtenidas por la nivelación, no resultan lo suficientemente próximas para la solución de los problemas que, por su mediación, sea necesario resolver, se trazan las llamadas *intercalares* (ver esta voz).

— La distancia entre dos curvas de nivel varía según la escala del plano y según la forma del terreno que se representa. Generalmente, es de 2,50 para una escala de $\frac{1}{5.000}$ y de 5,00 metros para una de $\frac{1}{10.000}$.

— El relieve ó depresión se acusa tanto mejor cuanto mayor es el número de curvas de nivel.

Construcción.—Para la construcción ó trazado de las curvas de ni-

vel se usan diferentes métodos: el primero, que las da con más ó menos aproximación, consiste en calcular la altura de todos los vértices de la triangulación general ó secundaria y tomar los ángulos de altura ó depresión de un gran número de puntos del terreno, alrededor de cada uno de estos vértices; la distancia horizontal de cada uno de estos puntos al vértice, una vez determinada sobre el plano, se calcula con estos elementos la cota de cada uno de ellos y se unen por medio de una *curva* los puntos que tienen la misma cota. El segundo método consiste en hacer la nivelación según una serie de planos secantes y verticales, ya paralelos entre sí, ya que pasen todos por una misma vertical, con lo que se obtienen tantos perfiles como planos secantes se consideren; las proyecciones sobre el plano de las intersecciones de los perfiles y de las horizontales equidistantes, se unen por una *curva* cuyos puntos estarán todos á la misma altura. — Cuando se quiere obtener un relieve más exacto se trazan en el terreno, por medio de estacas, verdaderos polígonos de nivel cuyos planos superpuestos deberán ser tanto más aproximados cuanto más variables sean las pendientes.

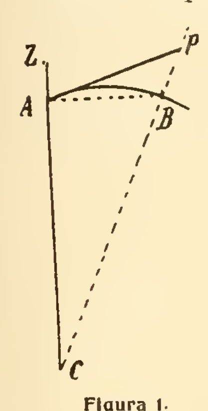


Figura 1.

Geodésicas.— Cuando la extensión de terreno objeto de una nivelación es considerable, se deberá tener en cuenta la curvatura del globo.

Sea A el lugar de observación del cual se conoce su altitud; R su distancia al centro C de la tierra; P el punto del que se quiere conocer la cota; AB el arco de círculo descrito desde el punto C, como centro con CA, por radio en el plano CAP; z el ángulo PAZ, que el teodolito hará conocer; la cota incógnita PB estará dada por la fórmula

$$PB = AB \frac{\text{sen}\, PAB}{\text{sen}\,(PAB + PBA)} = 2R\, \text{sen}\, \frac{1}{2}\, C \frac{\cos\left(z - \frac{1}{2}\, C\right)}{\text{sen}\,(z - C)}.$$

Si A es el nivel del mar, R designa el mismo radio de la Tierra; en el caso contrario, será el radio de la Tierra aumentado de la cota del punto A.

— En todos los casos, la fórmula hará conocer la diferencia de las cotas de los puntos A y P, con cuyos datos se trazarán las curvas de nivel que corresponderán á estas operaciones.

Para el conocimiento completo de esta especie de líneas, su trazado y aplicaciones que de su uso se hacen, pueden consultarse, entre otras obras, las siguientes: *Traité de Géodésie*, de L. Puissant, y la *Géodésie*, de L. B. Francoeur; el *Cours de Topographie et de Géodésie*, de A. Salneuve; el de *Géodésie*, de Mr. Benoit; el de G. Oslet; el *Traité complet sur la théorie et la pratique du nivellement*, de Mr. Fabre, y las obras de Clerc, Lalobre, Tournemine, Begat, etc.

Nocturno.

Definición.—Recibe este nombre el arco descrito por un astro sobre la esfera celeste, desde el momento de su puesta al de su salida. (Ver *Semi-nocturno.)*

Nodal.

Del latino *nodus*, nodo.

Definición.— Se da el nombre de *líneas nodales* de las láminas horizontales vibrantes á las marcadas en su superficie por la arena que en ellas se acumula. Estas líneas son debidas á un fenómeno de interferencia, explicándose por la superposición de dos sistemas de vibraciones paralelas.

Historia.— Los estudios de estas líneas no se han instituído regularmente más que en los casos que las láminas presentan formas simétricas. Mr. Chladni, *Entdeckungen zur Theorie der Klanges* (Leipzig, 1787) y *Acoustique* (pág. 98), imaginó cubrir las placas con arena fina, que al vibrar, ocupan las partes en reposo, dibujando, por consiguiente, las líneas nodales. Mr. Wheatstone, *Ann. de Pogg.* (T. XXVI, pág. 151), *Ann. de Chimie et de Phys* (2.ª serie. T. XXIII, página 313. 1824), explicó las leyes de formación de estas líneas para placas de figuras semejantes, y Mr. Koenig, *Ann. de Pogg.* (T. CXXII, pág. 238, 1862) extendió esta teoría á las placas de forma rectangular.

— La ecuación general de las placas vibrantes fué dada por Lagrange (*Œuvres*, t. I) y seguida de notables estudios hechos por Koenig, *Ann. de Pogg.* (T. CXXII, pág. 138), y la ley que liga los modos de división de una placa á la nota que le corresponde, cuando aquélla afecta la forma circular, ha sido estudiada experimentalmente por Strehlcke, *Ann. de Pogg.* (T. IV, pág. 205; t. XVIII, pág. 198. 1830-1835), y dada su teoría por Kirchhoff, *Journal de Crelle* (t. XL). La teoría de las membranas elipticas es debida á Mr. E. Mathieu, *Journal de Liouville* (2.ª serie. T. XIII y XIV).

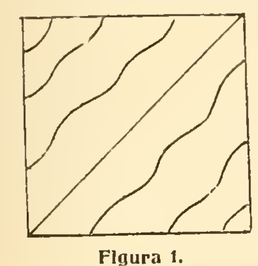
Formas y propiedades.— La manera de ser dividida una placa por las líneas nodales correspondientes á distintos sonidos puede variar al infinito. La misma figura corresponde á la misma nota; pero varias figuras diferentes pueden corresponder á la misma nota.

Las placas cuadradas ofrecen dos sistemas de líneas nodales rectilíneas, unas paralelas á los lados y las otras según las diagonales; otras veces se obtienen curvas nodales de formas variadísimas.

En las placas circulares frotadas por sus bordes, las líneas nodales son frecuentemente los diámetros, cuya dirección sólo depende del punto en que la frotación se ejecute, cuando la lámina es homogénea; pero tiende á direcciones determinadas cuando la placa ofrece líneas de resistencia máxima ó mínima.

Las líneas nodales diametrales presentan con frecuencia un movimiento oscilatorio, que se puede transformar algunas veces en una rotación continua. Se pueden obtener divisiones circulares agujereando la placa en su centro y frotando en un punto de esta parte agujereada. Se obtiene idéntico resultado fijando en el centro de la placa una varilla que se le haga vibrar transversalmente.

— En las placas de figuras semejantes que presentan un mismo modo de división, los números de vibraciones son proporcionales á los espesores y están en razón inversa de las superficies.


Figura 1.

—La ecuación general de las placas vibrantes de Lagrange admite una solución particular dada por Mr. Radan, que representa la ecuación de la figura acústica para el caso de las placas cuadradas. Suponiendo los ejes paralelos á los lados y el origen en el centro, a el lado del cuadrado y h y k dos parámetros que en general son números enteros, esta ecuación es:

$$\text{sen} \,.\, h \frac{\pi x}{a} \,.\, \text{sen} \,.\, K \frac{\pi y}{a} \pm \text{sen} \,.\, K \frac{\pi x}{a} \,.\, \text{sen} \,.\, h \frac{\pi y}{a} = 0,$$

y representando por e el espesor de la placa y por V la velocidad del sonido en una varilla de la misma substancia, el número de vibraciones dobles correspondientes á la figura $(h. k)$ será

$$N = \frac{\pi}{8} \sqrt{\frac{3}{2} \frac{Ve}{a^2} (h^2 + K^2)}$$

para el latón $V = 3600.^m$, lo que nos da, para una placa de a decímetros de lado y de e milímetros de espesor,

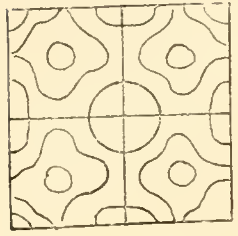


Figura 2.

$$N = 173 \frac{e}{a^2} (h^2 + K^2).$$

Como ejemplo de aplicación de estas fórmulas, tenemos las dos figuras acústicas (1 y 2), cuyas ecuaciones son respectivamente:

$$\text{sen} . 3\pi \frac{x}{a} . \cos . 4\pi \frac{y}{a} - \cos . 4\pi \frac{x}{a} \text{ sen} . 3\pi \frac{y}{a} = 0,$$

$$\text{sen} . 5\pi \frac{x}{a} . \text{sen} . 9\pi \frac{y}{a} - \text{sen} . 9\pi \frac{x}{a} \text{ sen} . 5\pi \frac{y}{a} = 0.$$

Las notas teóricas serán $9 + 16 = 25$ y $25 + 81 = 106$.

Para más detalles, puede consultarse la obra de M. G. Lamé, *Théorie Mathématique de l'élasticité des corps solides* (pág. 126).

Nodoide.

— Se ha dado el nombre particular de nodoide á la curva representada por la figura 1, la cual se aproxima á la de una cicloide alargada (ver esta voz).

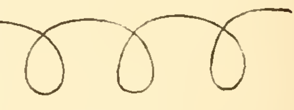


Figura 1.

Esta línea es la meridiana de la superficie estudiada y propuesta por Plateau en uno de los diferentes casos que fueron objeto de sus experiencias al efecto de poder realizar una disposición mediante la cual se obtenga un líquido substraído á la acción de la gravedad.

— Pueden consultarse *Mémoires de l'Académie de Bruxelles* T. (XVI, XXIII y XXXI), y los *Annales de Chimie et de Phisique* (3.ª serie, tomo XXX y LIII).

Normales.

Bajo esta denominación de *normales* se distinguen en Geometria dos clases especiales de curvas: unas indicadas por Brill y Nöther, y otras, por Riemann.

Normales de Brill y Nöther.—Definición.— Cuando una curva de

género dado se cambia por medio de una transformación unideterminativa, á la transformada del orden más pequeño se da el nombre de *curva normal*.

Historia.— Las curvas normales así definidas han sido indicadas, como llevamos dicho, por Brill y Nöther, *Mathe. Annalen* (T. VII), y para lo relativo á la transformación unideterminativa se puede ver Clebsch, *Leçons sur la Géométrie* (T. III, pág. 1), y Brill, *Mathe. Annalen* (tomo II, pág. 471).

Consideraciones generales.— La transformación unideterminativa de una curva en otra depende de ciertas constantes absolutas llamadas *módulos*, cuyo número debe necesariamente ser igual al número de constantes que figuran en la ecuación de la curva y no pueden anularse por dicha transformación.

— La curva normal en la que una curva general del género p se puede transformar unideterminativamente es del orden $p - \pi + 2$ si el número p es de la forma 3π, $3\pi + 1$, $3\pi + 2$, ó lo que es lo mismo, del orden $2\pi + 2$, $2\pi + 3$, $2\pi + 4$ respectivamente, y como el género de esta curva normal deberá ser igual á p, poseerá $\frac{1}{2}(p - \pi + 1)(p - \pi) - p$, ó respectivamente, $2\pi(\pi - 1)$, $2\pi^2$, $2\pi^2 + 2\pi + 1$ puntos dobles; ó también, para $p = 3\pi$, $3\pi + 1$ ó $3\pi + 2$, se puede, relativamente á un punto especial de $p + \pi - 4$, ó respectivamente, de $4\pi - 4$, $4\pi - 3$, $4\pi - 2$, puntos por los cuales pasa un número doblemente infinito de curvas adjuntas del orden $n - 3$, y donde $\pi - 1$, π, $\pi + 1$ pueden tomarse á voluntad, encontrar todavía $\frac{1}{2}(p - \pi + 1)(p - \pi) - p$, ó respectivamente, $2\pi(\pi - 1)$, $2\pi^2$, $2\pi^2 + 2\pi + 1$ pares de puntos, que con los $p + \pi - 4$ puntos citados, forman un grupo especial de $2\pi(\pi + 1) - 4$, $2\pi(\pi + 2) - 3$, $2\pi(\pi + 3) - 1$ puntos, por los cuales se puede hacer pasar un número simplemente infinito de curvas de la misma especie.

— La determinación del número de módulos de una curva puede efectuarse en conexión con la de las curvas normales; y, en efecto, si el género p es divisible por 3 ó $p = 3\pi$, la curva normal correspondiente será del orden $2\pi + 2$ y tiene $2\pi(\pi - 1)$ puntos dobles, es decir, que depende de

$$(\pi + 1)(2\pi + 5) - 2\pi(\pi - 1) = 9\pi + 5$$

constantes; y como por transformación lineal se pueden hacer desaparecer ocho de éstas, sólo restarán:

$$9\pi - 3 = 3p - 3.$$

— El examen de los otros dos casos $p = 3\pi + 1$ y $p = 3\pi + 2$, se hace de una manera análoga, y se encuentra que, como en el caso anterior, el número de constantes que restan es de $3p - 3$.

De aquí se deduce la propiedad importante de que «el número de los módulos de una curva del género p es igual á $3p - 3$». Este número ha sido indicado primeramente por Riemann, y su determinación se obtiene de maneras distintas, como se puede comprobar en el trabajo citado de Brill y Nöther, y en el de Riemann, *Théorie der Abelschen Functionen*. A Weierstrass se debe otro medio de obtener los módulos. Clebsch, *Intégrales abéliennes et connexes* (pág. 70). — Los módulos juegan en las transformaciones de determinante única el mismo papel que los invariantes absolutos en las colineaciones. Según la especie de operación algébrica empleada, se obtendrán como módulos diferentes sistemas de magnitudes; para representar en particular los módulos como relaciones anarmónicas, lo más sencillo es tomar sobre el terreno binario un campo de valores ligados á la curva, y tal que á él responda unideterminativamente un campo semejante de valores tomados con relación á la curva transformada. Estos dos campos de valores quedarán ligados proyectivamente entre sí.
— Sobre estas cuestiones señalaremos que las obras principales que pueden consultarse son las siguientes: Hermite, *Cambridge and Dublin math. Journal*, 1854, y *Journal de Crelle*, t. LII; Brioschi, *Annali di Matem.*, t. I; Gundelfinger, *Journal de Crelle*, t. LXXIV); Cayley, *Proceedings of the London Math. Society*, t. I.

Normales de Riemann. — Los normales de Riemann (*Théorie der Abelschen Functionem*, Leipzig, 1866) difieren esencialmente de las anteriores. Según este geómetra, dada una ecuación de $m^{ésimo}$ grado con relación á x y de $n^{ésimo}$ con relación á y, trata de rebajar cuanto es posible, por transformación unideterminativa, los números m y n *separadamente*, ó, en otros términos, de encontrar dos funciones algebraicas distintas la una de la otra $\frac{\psi}{\chi}$ y $\frac{\psi'}{\chi'}$, que vengan á ser nulas ó infinitas en el menor número de puntos posibles. Esto ha conducido á buscar dos haces de curvas

$$\varphi + \lambda\chi = 0 \quad \text{y} \quad \varphi' + \lambda\chi' = 0, \tag{1}$$

que cortan á $f = 0$ en el menor número posible de puntos móviles, ó

mejor dicho, determinan sobre $f=0$, dos sistemas $g_R^{(1)}$, relativamente á los cuales $R=p-\pi+1$ para $p=2\pi$ ó $p=2\pi+1$.

Las curvas de transformación de que ha hecho uso cortan á $f=0$ en $2p-2\pi-2$ puntos móviles. A los grupos compuestos de $Q=p+\pi-3$ puntos de base de los haces (1), corresponde un punto múltiplo del orden $p+\pi-3$ sobre la nueva curva. Procediendo de este modo, encontró Riemann acuerdo con lo expuesto por Aebsch.

Para $p=2\pi$ de las curvas del orden $p+2$ con dos puntos múltiples del orden $3(\pi-1)$ y $\pi(\pi-2)$ puntos dobles.

Para $p=2\pi+1$ de las curvas del orden $p+3$ con dos puntos múltiples del orden $3\pi-2$ y π^2 puntos dobles.

Se exceptúan los casos de $p=1$ y $p=2$. Para $p=2\pi+1$, la transformación se puede realizar de un número infinito de maneras distintas.

Para una transformación cuadrática en que los puntos fundamentales están respectivamente situados en dos puntos múltiplos y en uno de los puntos dobles, estas curvas normales pueden transformarse en curvas del orden p ó $p+1$ (para $p>4$). Ver Brill (*Math. Annalen*, t. II, pág. 471).

Nudo.

Definición.—En las artes del dibujo se da este nombre á la curva que resulta de la combinación de las llamadas epicicloides interiores y exteriores.

Forma.—La forma general de estas curvas es la señalada en la figura.

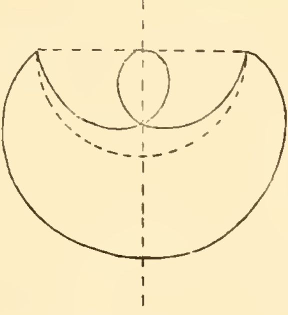


Figura 1.

Aubry dió este nombre, *Journal de Mathématiques spéciales*, 1895, página 200, y 1896, pág. 30 y 83, á la curva *espiral tangentoide* (Ver esta voz).

—También á la *lemniscata de Bernouilli* ó *hiperbólica* se la ha dado el nombre de *nudo de cinta*.

O

Ocho.

Curva cuya ecuación en coordenadas cartesianas es

$$y^4 = y^2 - x^2,$$

y en coordenadas polares,

$$r = \frac{a\sqrt{\cos . 2\theta}}{\cos^2\theta}.$$

Su nombre fué dado por Aubry, que la estudió en *Journal de Mathématiques Spéciales,* 1895, pág. 267, y se pueden consultar los trabajos de Barisien para su construcción y semejanza con la lemniscata.

Ojiva.

Definición.—Se llama *ojiva,* ó *arco ojival,* al que presenta un ángulo más ó menos pronunciado en la clave, formado por los dos arcos de un círculo.

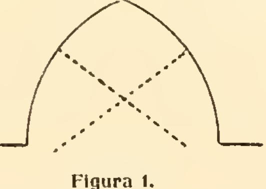
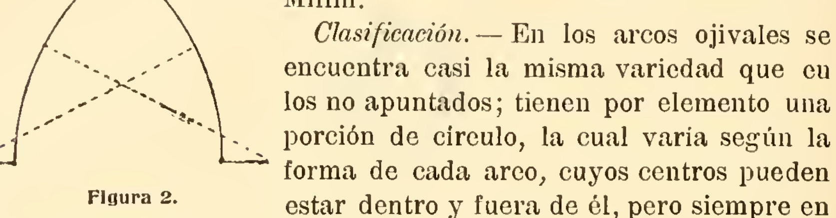


Figura 1.

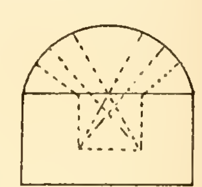
Historia.—En un texto del siglo XVI, conservado por Dn. Cange, se encuentra escrito *augiva,* y M. Le Hericher le dió este nombre considerándola derivada del latino *augere (aumentar).* Otros creen deriva de *gibbus* (giba ó joroba), y Mr. Littré la nombra *ojiva,* apoyándose en un texto de Nicolás de Brai, en que se encuentra *ogis* en el sentido de apoyo, *Catholicæ fidei validus defensor et ogis.* También se le ha dado á esta forma el nombre de arco *apuntado, todo punto ó levantado de puntos;* Fr. Lorenzo de San Nicolás, *Arte y uso de Arquitectura* (P. I, capítulo XXXVIII); Bails, *Vocabulario de Arquitectura,* y Simón García, *Comp. de Arq.* (cap. IV). Terreros la nombra arco *peraltado* en general.

Este epíteto de ojiva se aplica sólo al arco, pues la expresión de *bóveda ojival* es reciente y se atribuye á Millin.

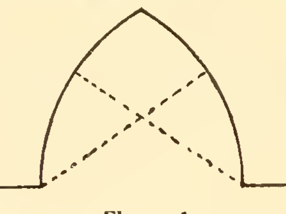

Figura 2.

Clasificación. — En los arcos ojivales se encuentra casi la misma variedad que en los no apuntados; tienen por elemento una porción de círculo, la cual varía según la forma de cada arco, cuyos centros pueden estar dentro y fuera de él, pero siempre en la misma línea de arranque (figuras 1 y 2).

Se distinguen principalmente la *aguda*, *equilátera*, *rebajada*, *conopial*, *florenzada*, *lobulada*, *peraltada* y *de herradura*.

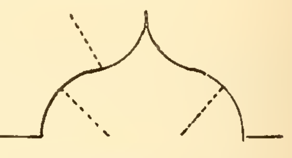

Figura 3.

Aguda. — La que presenta sus centros fuera del arco, y están, por lo tanto, trazadas con un radio mayor que el ancho del mismo (fig. 2). Se llama también *lanceolada*. Domina al fin del siglo XII y durante el XIII.


Figura 4.

Como ejemplo señalaremos aquí aquel cuyos arcos circulares están trazados desde los vértices de un cuadrado como centros, del tercio de la luz de lado, y situado céntricamente de la línea de arranques para abajo (Bails). (Palomino, *Índice de los términos.*) (Fig. 3.)

Equilátera. — La que está descrita con un radio igual al ancho del arco (fig. 4). Se usa durante el siglo XIV.


Figura 5.

Rebajada. — Aquella cuyos centros están dentro de los arranques del arco. Se le ha dado también el nombre de *ojiva obtusa* (P. Tosca, *Compendio Mathematica*, t. V). Cuando el arco es fuertemente deprimido, se llama *tudor*, por aparecer en Inglaterra bajo el reinado de Enrique VII, de la familia de los Tudores.

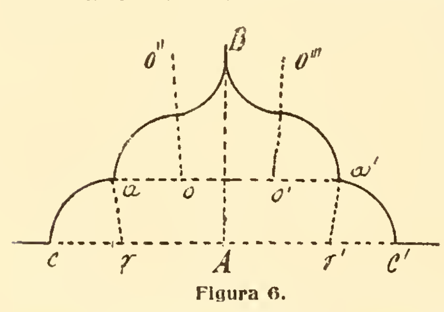


Figura 6.

Conopial. — Ojiva formada de cuatro ó más círculos, unos cóncavos y otros convexos, formando líneas sinuosas en lugar de curvas sencillas (fig. 5). Se llama simplemente *conopio* y también ojiva

en *talón*, perfil muy prodigado en el último período del estilo ojival, único período de la Arquitectura cristiana en que se usó este arco. (Villaamil, *Arqueología Sagrada*, pág. 28.)

Florenzada.—Es una modificación de la ojiva conopial, á la que se añaden dos arcos de círculo en sus arranques (fig. 7). Comprende la *lobulada*.

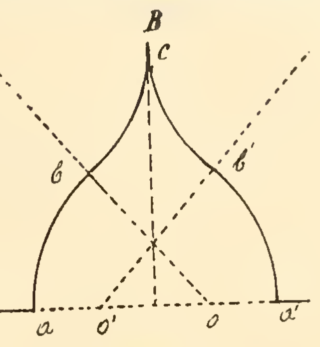


Figura 7.

Para trazar los arcos conopial y florenzado se procederá de la manera siguiente: se trazan los arcos (fig. 7) ab y $a'b'$ desde los arranques a, y se dirigen los radios ob y $o'b'$ á los puntos b, b' de tangencia de los dos arcos. Se prolongan dichos radios, y haciendo centro en su prolongación, se trazan dos arcos de círculo, bc y $b'c'$, que sean tangentes á los primeros y al eje de la figura, quedando trazado el arco.

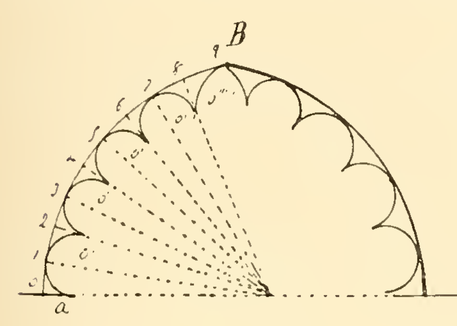


Figura 8.

Para hacer el festonado, engrelado ó lobulado, se traza el arco general $a'B$ (fig. 8.ª), y se divide en doble número de partes más una del de arcos que haya de formar el festón, y se numeran estas partes correlativamente desde el arranque a. Se trazan los radios á los puntos de división, y haciendo centro en los radios impares, se trazan los pequeños círculos o, o', o'', o''', o'''', o''''', tangentes entre sí y al arco general, y se tiene el trazado que marca la figura.

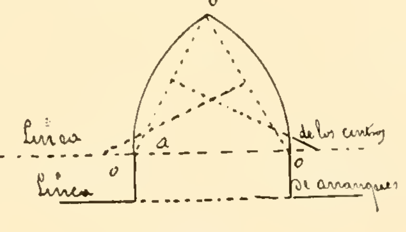


Figura 9.

Estos festones presentan diferentes formas, y sus trazados resultan más ó menos complicados, pudiéndose consultar para ello el *Tratado teórico y práctico de dibujo* de M. Borrell (T. II, pág. 146).

Peraltada.—Es la ojiva cuya línea de los centros está más alta que la de los arranques (fig. 9), en cuyo caso se unen los extremos del arco con los puntos de arranque por dos líneas verticales y paralelas.

Herradura.—Es la peraltada prolongando los arcos (fig. 10) más abajo de la línea de los centros en forma de herradura; llamándose

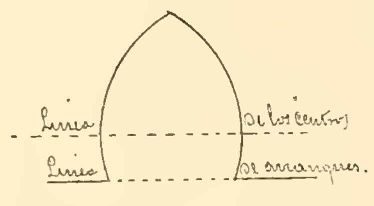


Figura 10.

también *ojiva tumida*, arco que fué especialmente usado por los árabes en España.

Omosiste.

Definición.—Curva lugar geométrico de todos los puntos en que se deja sentir al mismo tiempo la acción de un movimiento sísmico.

Historia. — Esta curva ha sido propuesta y debe su nombre á Mr. Seebach. *Sismología*, de L. Gatta (Milán, 1884).

Aplicaciones.—Para encontrar el centro superficial de un terremoto ó *epicentro*, Seebach, siguiendo ideas de Mr. Hopkins, es decir, teniendo presente que cuando la onda del terremoto pasa por terrenos de densidad y elasticidad distinta, no sólo modifica su velocidad, sino su dirección, teniendo lugar una refracción ó reflexión á semejanza de lo que sucede á la luz cuando atraviesa medios de diferente densidad, reúne por puntos los distintos lugares en que se deja sentir la acción del terremoto al mismo tiempo, y forma la curva omosiste; para deducir de ella, uniendo dos de sus puntos y levantando en el medio de la recta obtenida una perpendicular, el lugar donde deberá encontrarse el epicentro.

Cuando el terremoto tiene lugar en una porción del globo cuya costra es homogénea, y los materiales que la forman son de una conductibilidad constante, todos los puntos de la omosiste equidistarán del epicentro, ó lo que es lo mismo, que dicha curva será una circunferencia.

Seebach ha obtenido también, por medio de construcciones gráficas, la celeridad de la propagación, la hora de la primera sacudida y la profundidad del terremoto.

J. Winthrop se ocupa, en 1755, de los terremotos, en su obra *Discours sur les tremblements de terre*, y se tienen trabajos debidos á Hum-

boldt, Young, De Rossi, J. Schmidt, O. Peschel, etc., que pueden ser consultados sobre este particular.

Onda.

Definición.—Cuando un punto de un cuerpo, animado de un movimiento vibratorio, es en cada instante el centro de un sacudimiento particular, cada sacudida se trasmite á toda la masa, dando, en general, nacimiento á una onda de forma esférica ú otra particular; y á la trayectoria, seguida por una molécula, se le da el nombre de *onda.*

Historia.—Diferentes matemáticos y físicos han hecho particulares estudios de las formas y circunstancias de las ondas, ya en las producidas por el sonido, ya por la luz, el agua, etc. Así tenemos que las leyes de los tubos sonoros fueron establecidas por Bernouilli; que J. Sauveur descubrió los nodos y vientres de las vibraciones, *Rapport des sons des cordes d'instruments de musique aux flèches des courbes, et nouvelles determinations de sons fixes* (1713); que la teoría de las cuerdas vibrantes se debe á Taylor, D. Bernouilli, Euler, y particularmente á d'Alembert, *Recherches sur les vibrations des cordes sonores;* que Huyghens expuso los fundamentos de las ondas luminosas en su *Traité de la lumière* (1690); que las leyes del movimiento de las ondas en los líquidos han sido dadas por New al final del 2.° Lib. de sus *Principios*, y que hoy se tienen especiales estudios y obras dignas de mencionar sobre estas líneas, entre otras la *Théorie Mathématique de l'élasticité des corps solides*, de G. Lamé.

Clasificación.—Entre las diferentes especies de ondas, consideraremos especialmente las *sonoras*, las *luminosas* y las *que tienen lugar en el agua.*

1.° *Ondas sonoras.*—Toda sacudida que tiene lugar en un punto del cuerpo se transmite alrededor del centro con una velocidad constante Ω, y desde que la molécula considerada ocupa el centro, hasta que se encuentre en una de las posiciones extremas de su trayectoria, habrá recorrido una cierta distancia cuando la misma molécula vuelve á su punto de partida. Esta distancia es la que se llama *longitud de la onda.* Si θ designa la duración de una doble oscilación, y λ la longitud de la onda, $\lambda = \Omega \cdot \theta$.

La velocidad de propagación Ω es independiente de la altura del sonido é igual á 341 metros por segundo en el aire á 16°; la duración θ de una doble oscilación correspondiente á un sonido perceptible varía entre $\frac{1}{32}$ y $\frac{1}{16000}$ de segundo; la longitud λ de una onda

sonora varía asimismo entre $\frac{341}{32}$ y $\frac{341}{16000}$ de metro. En la mitad de esta longitud, la onda es condensante, y en la otra, dilatante; en su medio se encuentra un nodo, punto en el cual la velocidad del movimiento vibratorio es nulo, como en sus extremos. Todos estos hechos tienden simplemente á que la molécula, centro de la sacudida, trasmite dos velocidades nulas en los puntos extremos de su trayectoria y una velocidad máxima en su medio que, por otra parte, coincide con su posición de equilibrio ante el choque.

Sea AA' la trayectoria de una de las moléculas, O el medio de esta recta; la velocidad de esta molécula, nula en A, crece á medida que

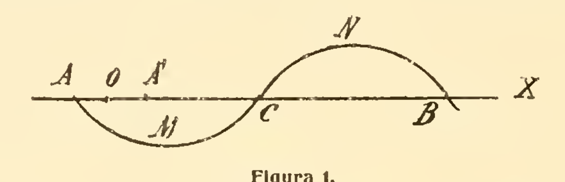


Figura 1.

la molécula avance de A en O y decrece de O á A en que vuelve á ser nula; ella cambia ahora de línea, crece de A' hacia O para decrecer de O á A y volver á ser nula en este punto. Imaginemos que en cada punto de la línea $AA'x$ elevamos una ordenada perpendicular, proporcional á la velocidad vibratoria de la superficie de la onda que tiene en el momento de su paso, y dirigimos esta ordenada de abajo á arriba ó de arriba á abajo, según que la velocidad esté dirigida de izquierda á derecha ó de derecha á izquierda: sean AB el camino recorrido por la onda durante el tiempo necesario á la molécula para pasar de A á A' y volver á A; C el medio de AB, en el instante del retorno de la molécula á A, la velocidad en B será nula, asi como en C y en A; *estando* dirigida de izquierda á derecha en la longitud CB y de derecha á izquierda á la longitud AC; la curva representativa de la ley del movimiento de la onda será, por consiguiente, la curva $AMCNB$. Supongamos que el movimiento vibratorio continúa: el trasporte, con la velocidad Ω, de la curva $AMCNB$, á lo largo de Ax, formará á cada instante el cuadro del estado vibratorio del medio, á lo largo de esta linea Ax, suponiendo, bien entendido, que dé nuevos arcos, semejantes á aquellos que quedan formados, se le suman de manera que la curva total parta de la rama en que se encuentra en cada momento la molécula centro del sacudimiento.

La figura geométrica de la curva $AMNB$ es una sinusoide. En

efecto, todas las experiencias sobre la elasticidad de los cuerpos tienden á probar que la fuerza elástica de los cuerpos es siempre proporcional al desvío, ley que, con mayor razón, se acuerda con la realidad rigurosa cuando el desvío es infinitamente pequeño. Sea x la distancia positiva ó negativa de la molécula A, de su posición de equilibrio O; la fuerza que la impulsa hacia O será $m - Kx$, y su aceleración, $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{K}{m}x$, siendo m su masa. Esta ecuación nos da, multiplicando sus dos miembros por

$$2\frac{dx}{dt},\quad 2\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} = -2\frac{K}{m}x\frac{dx}{dt}.$$

La integración nos da

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\frac{K}{m}x^2 + C.$$

Sea α la distancia AO, $\frac{dx}{dt}$ deberá ser nulo cuando $x = \alpha$, C tendrá por valor $\frac{K}{m}\alpha^2$; por consiguiente,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{K}{m}(\alpha^2 - x^2).$$

De donde

$$dt = \sqrt{\frac{m}{K}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

é integrando de nuevo

$$t = \sqrt{\frac{m}{K}}\cdot \text{arc}\left(\cos = \frac{x}{\alpha}\right);$$

es decir,

$$x = \alpha\cos\left[t\sqrt{\frac{K}{m}}\right].$$

La constante es nula, puesto que $x = \alpha$ para $t = 0$. Es fácil pasar de esta ley del movimiento oscilatorio de la molécula á la de las ordenadas de la curva $AMNB$ de las ondas que ellas produce; en efecto, la abscisa de esta curva es proporcional al tiempo, y su orde-

nada, proporcional á la velocidad de la molécula; sus coordenadas serán, por tanto,

$$x = \Omega t, \quad y = \alpha \sqrt{\frac{K}{m}} \operatorname{sen}\left[t\sqrt{\frac{K}{m}}\right],$$

$$\text{y su ecuación}, \; y = -\alpha \sqrt{\frac{K}{m}} \operatorname{sen}\left[\frac{x}{\Omega}\sqrt{\frac{K}{m}}\right].$$

Se le puede simplificar introduciendo la longitud λ de la onda y el tiempo θ de una oscilación; en haciendo $x = 0$ en la ecuación del movimiento de la molécula, se encontrará $t = \frac{\theta}{4}$; de donde

$$\frac{\theta}{4} = \sqrt{\frac{m\pi}{K.2}};$$

pero

$$2\Omega\theta = \lambda.$$

Por tanto,

$$y = -\alpha \frac{2\pi}{\theta} \operatorname{sen} . \frac{4x}{\lambda}.$$

2.° *Ondas luminosas.*—La teoría anterior se aplica sin modificación al estado vibratorio que se supone dan lugar á los fenómenos luminosos. El estudio experimental del fenómeno de las interferencias nos ha dado, para la duración θ de una oscilación y para la longitud λ de una onda, los valores indicados en el cuadro siguiente:

COLOR	Valor de θ en fracciones de segundo marcadas por $\frac{1}{10^{17}}$	Valor de λ en millonésimas de millmetro.
Violeta	141	423
Añil	149	449
Azul	158	475
Verde	173	521
Amarillo	183	551
Anaranjado	194	583
Rojo	207	620

—Longitud de una ondulación es el camino que recorre la onda durante el tiempo de una vibración. Esta longitud depende de la naturaleza del medio, si él es isótropo; de la dirección considerada en este medio, si él es cualquiera, y de la naturaleza del radio transmitido. En un mismo medio, las vibraciones correspondientes en igualdad de circunstancias á un mismo radio, son isócronas. La longitud de la ondulación varía en sentido contrario de la refrangibilidad.

Para los radios de igual color, las vibraciones se propagan en línea recta en un mismo medio isótropo y recorren trayectorios semejantes en medios no isótropos.

3.° *Ondas que tienen lugar en el agua.*—A Mr. Boussinesq se deben los principales estudios sobre la propagación de las ondas *(Théorie des ondes liquides périodiques, Recueil des Savants étrangers,* t. XX, 1869), y distingue *(Théorie des ondes, Journal de Liouville,* 1872) la onda *positiva,* que domina á la que eleva su vértice por encima del nivel primitivo, y *negativa,* si su vértice está por bajo de este nivel.

Da el nombre de energia de una onda al trabajo que ella produciría en virtud de la pesantez de sus partes, si toda la masa líquida fuera reducida instantáneamente al reposo.

— La integral que tiene por elemento el producto de la distancia de dos secciones normales vecinas, por el cuadrado del ángulo que la superficie libre actual forma con la superficie libre primitiva, cuadrado disminuído en tres veces el cubo de la relación de la altura correspondiente de la intumecencia á la profundidad primitiva, se llama por J. Boussinesq *momento de instabilidad* de la onda.

— De todas las ondas de la misma energía, la de Scott Russell, ú *onda solitaria,* cuyo perfil es una curva transcendente perfectamente definida, es la de momento de instabilidad más pequeño y es la única que se propaga sin deformarse, ó la sola en que su forma es permanente. (Ved *Mémoire,* de Mr. Bourgois, *Sur la resistance d'eau; Introduction á la Mécanique industrielle,* de Mr. Poncelet.)

— El perfil longitudinal de una onda solitaria está caracterizado por una propiedad notable. El producto de la perpendicular bajada de uno cualquiera de sus puntos sobre su asíntota por el cubo de la profundidad primitiva, es igual á los tres cuartos del producto de las dos partes, en las que esta perpendicular divide el área comprendida entre la curva y su asíntota. El centro de gravedad de esta misma área se encuentra á los tercios de la mayor altura, como en el triángulo; de donde resulta que el cuadrado de la velocidad de propagación es igual al producto del número que indica la profundidad primitiva, aumentando en tres veces esta altura, equivalente al pro-

ducto del mismo número, por la distancia desde el vértice de la onda al fondo del canal, que es la ley experimental de Scott Russell.

A la curva que representa el movimiento de las olas en el mar se le ha dado el nombre de *onda trocoidal.*

Órbita.

Del latino, *órbita.*

Definición.—Camino que recorre ó parece recorrer un cuerpo celeste en virtud de su movimiento propio ó de su movimiento aparente.

La palabra *órbita* se aplica al camino real recorrido por los planetas; la órbita aparente del sol ú órbita real de la tierra recibe más particularmente el nombre de eclíptica (ver esta voz).

Historia.—Los primeros hombres, atentos, sin duda, á los fenómenos celestes, no tardarían en distinguir en la población del cielo un pequeño número de astros, los planetas, sin contar el sol y la luna, que en un tiempo más ó menos largo trazan sobre la bóveda celeste curvas de aspecto determinado. Se supuso, como era natural, que las órbitas de los planetas tenían la forma circular y eran recorridas con una velocidad uniforme. Copernic mismo no admitía la posibilidad de una velocidad irregular. *Fieri nequit,* dice él, *ut cœleste corpus simplex uno orbe inæqualiter moveatur.*

Así, para explicar las desigualdades que la observación acusa en el movimiento de los planetas, se vieron obligados á recurrir á diversas hipótesis, de las cuales algunas son célebres en la historia de la Astronomía (ved *epiciclos* y *deferentes).* Se sabe cómo Kepler se fundó sobre las observaciones de Tycho-Brahe, demostrando el primero que los movimientos de los planetas se modifican con movimientos variables en órbitas elípticas.

Determinación de las órbitas.— Para determinar la forma y la extensión de las órbitas del sol (ó de la tierra), de la luna, de los planetas y los cometas, se emplea generalmente un método uniforme, si bien en algunas circunstancias particulares, ciertas causas pueden facilitar su aplicación y servir al propio tiempo para comprobarla. He aquí el método generalmente seguido.

Sea un astro *A* que nos proponemos seguir su marcha sobre la bóveda celeste. Se determina su ascensión recta y su declinación, las cuales nos dan la posición del astro en el instante en que se miden. Si esta medida se hace diariamente y durante una revolución completa, las posiciones sucesivas del astro, referidas sobre una superficie de una esfera celeste convenientemente preparada, la curva que pasa por todas las posiciones representará la proyección de la *órbita*

del astro sobre la bóveda celeste, y el plano de esta curva será el de la órbita.

La posición de este plano hace conocer perfectamente la posición de su órbita en el cielo ó su inclinación sobre el ecuador; pero ella no determina ni su forma ni sus dimensiones.

Para determinar la forma de la órbita es preciso cada día, ó á lo menos en intervalos aproximados, evaluar el diámetro aparente del astro; porque se sabe que este diámetro varía en razón inversa de la distancia del astro á la tierra. Para conservar el diámetro su verdadera magnitud, en cada instante, se está obligado á alargar ó acortar ciertas partes de la circunferencia trazada; y es así como se viene á demostrar que las órbitas de los planetas están formadas por una serie de puntos desigualmente distantes de la tierra. El conjunto de estos puntos forma una elipse.

Las dimensiones de esta elipse se deducen de la verdadera distancia del astro á la tierra; distancia que, en todo sentido, está formada por la medida de la paralaje.

Una vez conocida la órbita de un astro, puede utilizarse para hallar la de otro. Es así como las órbitas de los diferentes planetas han sido fijadas por el conocimiento de sus posiciones sucesivas con referencia á la eclíptica.

Establecidas estas generalidades, vamos á dar una idea de algunos de los problemas que el cálculo emplea para llegar á determinar las órbitas de los planetas.

Luego que se ha descubierto que todas las órbitas de los planetas tienen como foco común el centro del sol, parece natural el considerar el ángulo formado por el plano de la eclíptica y por los planos de las órbitas como uno de los elementos de estas órbitas. Se llaman elementos de una órbita planetaria un cierto número de valores que son como sus signos característicos.

La posición del plano de una órbita está determinada cuando se conoce su inclinación sobre la eclíptica y la longitud heliocéntrica de su nodo ascendente. La forma y la longitud de una órbita están determinadas cuando se conoce su excentricidad y su semi-eje mayor. Veamos cómo se evalúan algunos de estos elementos.

Semieje mayor de la órbita.—Sea a el semi-eje mayor de una órbita planetaria y t la duración de su revolución sideral. Según la tercera ley de Kepler, la relación $\frac{a^3}{t^2}$ es constante para todos los planetas. Si, pues, se toma por unidad de longitud el semi eje mayor de la órbita terrestre y por unidad de tiempo el día solar, se tiene:

$$\frac{a^3}{t^2} = \frac{1}{(365^3,2564)^2},$$

de donde se deduce el valor de *a*.

Radios vectores.—Sean S el sol (fig 1) y SE la línea de los equinoccios, trazada por el centro del sol. Por medio de la observación es fácil obtener el instante en que el planeta está en uno de los nodos, en P, y supongamos la tierra en T.—El radio vector del planeta es $SP=r$. El radio vector de la tierra, $ST=R$; el ángulo $PSE=\psi$ representa la longitud heliocéntrica del nodo, y el ángulo $TSE=\delta$, la elongación del planeta. El triángulo PST nos da

$$\frac{r}{R} = \frac{\text{sen}\,.\,\delta}{\text{sen}\,(\psi - L - \delta)},$$

de donde se tiene el valor de r, suponiendo conocidas todas las demás cantidades.

Si se observa el planeta en su nodo opuesto, se obtendrá el mismo valor del radio vector correspondiente.

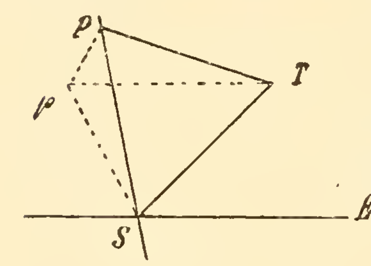


Figura 1.

Excentricidad de la órbita.— Sea e la excentricidad, r el radio vector correspondiente á uno de los nodos del planeta y φ la longitud del perihelio, contado á partir del nodo ascendente, se tiene:

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e\,.\cos\varphi}{a\,(1 - e^2)}.$$

Inclinación del plano de la órbita sobre el plano de la eclíptica.—Para medirla se toma el instante en que la tierra se encuentra sobre la línea de los nodos del planeta.—En este caso, la longitud heliocéntrica de la tierra, es decir, el ángulo TSE ó L, es igual á la longitud heliocéntrica del nodo, ó sea ψ ó á $180°-\psi$. El planeta, estando en P, sea p su proyección sobre el plano de la eclíptica. Se observa la longitud geocéntrica $PTp=\beta$, y la elongación $STp=\delta$. Las tres rectas TS, TM y Tp son las aristas de un triedro rectángulo, en el cual se conocen las dos caras que comprenden el ángulo recto, y puede, por consiguiente, calcularse el diedro TS. Este ángulo diedro TS representará la inclinación de la órbita del planeta sobre el plano de la eclíptica. Si, pues, se le designa por θ, será

$$tg . \theta = \frac{tg . \beta}{sen . \delta}.$$

— En todas las fórmulas anteriores son necesarias un cierto número de cantidades conocidas para determinar una de las incógnitas; esto en el caso de un planeta descubierto después de largo tiempo, y del que se conocen un gran número de observaciones, es fácil; pero si se trata de un planeta nuevo, como no se conoce ningún dato, es necesario proceder de otra manera.

En general, se empieza por determinar aproximadamente una órbita circular que satisfaga lo más acertadamente posible á las primeras observaciones hechas sobre el planeta para el objeto dado.— El plano de esta órbita, que pasa por el centro del sol y por algunas posiciones del planeta, no puede diferenciarse mucho del plano de la verdadera órbita; por consiguiente, se podrá considerar provisionalmente como la inclinación de esta órbita circular, y la longitud de su nodo ascendente como poco distinto de los elementos análogos de la órbita elíptica que se busca. Por medio de estos dos elementos supuestos conocidos se puede, por los métodos de la Geometría analítica, obtener un cierto número de valores de las coordenadas heliocéntricas de los radios vectores y de las longitudes. Ahora es suficiente el calcular tres radios vectores y tres longitudes para determinar la elipse de la que uno de los focos es, por otra parte, conocido.

Esta elipse no será más que aproximada. Se corregirán más tarde sus elementos por medio del mayor número de observaciones posibles, y se sigue esta corrección hasta que se obtenga una órbita que satisfaga á todas las observaciones posibles y permita el predecir otras, cuyo objeto se consigue empleando diferentes métodos, llamados los unos de falsa posición á causa de su analogía con las reglas aritméticas de este nombre, y los otros con el nombre de *método de Gauss*, del nombre de su inventor. Las proporciones de este artículo no nos permiten entrar en detalles de los mismos.

— Son dignos de señalarse dos teoremas curiosos, que se deben á Mr. Moivre, sobre el movimiento de los planetas en sus órbitas, y aun cuando no tienen utilidad, creemos dignos de mencionarlos; éstos son:

1.° La velocidad de un planeta en un punto cualquiera de su elipse es á su velocidad en el vértice del eje menor, como la raiz cuadrada de su distancia al foco superior es á la raiz cuadrada de su distancia al otro foco; y

2.° El radio vector es al seno del ángulo que forma con la tangente, como la media proporcional entre las distancias á los dos focos y al semi-eje menor.

Orbita aparente del sol.—Definición.—Es ésta la curva que el centro del sol parece describir en virtud de su movimiento propio. Esta curva es plana, puesto que su proyección sobre la esfera celeste es un círculo máximo de esta esfera. (Ved *Eclíptica.*)

Historia.—Los antiguos consideraron que el sol describía una circunferencia de círculo con un movimiento uniforme, suponiendo además que la tierra no ocupaba el centro al objeto de explicar las diversas diferencias que esta hipótesis presentaba con respecto á las observaciones: esta teoría es la llamada *hipótesis de la excéntrica*, debida á Hiparco.

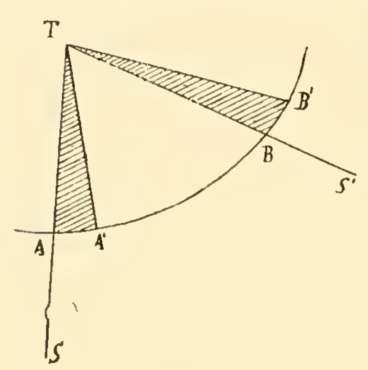


Figura 2.

Este mismo astrónomo idea la *hipótesis del hemiciclo* y *del deferente* (ver estas voces); hipótesis que viene á ser en el fondo igual á la primera, y que como aquélla tampoco se acuerda con los fenómenos observados. Es, pues, Kepler el que viene á demostrar perfectamente los hechos que se producen suponiendo que la órbita aparente del sol es una elipse y que la tierra ocupa uno de sus focos, lo cual equivale á decir que la tierra describe una elipse y que el sol ocupa uno de sus focos. Newton demuestra luego que el movimiento elíptico es una consecuencia de la atracción en razón inversa del cuadrado de la distancia.

Determinación.—Para encontrar la naturaleza de la órbita del sol se recurre á la observación de su diámetro aparente, el cual, no siendo constante, da á conocer que dicho astro no se encuentra siempre á igual distancia de la tierra; y como el diámetro aparente de un astro esta en razón inversa de su distancia á la tierra, el conocimiento exacto de este diámetro para cada uno de los dias del año permitirá construir una curva semejante á la órbita buscada. En efecto; sea S (fig. 2) la posición del sol en un momento dado, por ejemplo, en el equinoccio de primavera; sea δ su diámetro aparente en esta época, y T la posición de la tierra considerada fija.

Supongamos que se tome la distancia TA para representar la del sol á la tierra, que representaremos por ρ el día de que se trata. Sea S' la posición del sol en una época cualquiera t, δ' su diámetro

aparente observado en esta época, y ρ' su distancia á la tierra, se tendrá

$$\rho' : \rho = \delta : \delta' \quad \text{de donde } \rho' = \rho \cdot \frac{\delta}{\delta'};$$

y si TB representa ρ' á la escala tomada, se podrá escribir

$$TB = TA \cdot \frac{\delta}{\delta'};$$

relación que nos hace conocer el punto B; y operando de igual manera para otra cualquier época, se tendrá un nuevo punto de la curva destinada á representar la órbita buscada, y con los puntos que se crean necesarios, se podrá trazar esta curva.

— También se puede operar de la manera siguiente: Sean V y V' los números de grados de longitud recorridos por el sol en un día sidéreo; en dos épocas cualquiera del año, para los cuales su distancia á la tierra son ρ y ρ', y sus diámetros aparentes, δ y δ'. La observación conduce á la relación muy aproximada,

$$\frac{V}{V'} = \frac{\delta^2}{\delta'^2},$$

que nos dice que las velocidades angulares son proporcionales á los cuadrados de los diámetros aparentes, relación que será tanto más exacta cuanto se tome una unidad de tiempo más pequeña, teniendo en cuenta la no uniformidad del movimiento.

Se tiene de lo expresado:

$$\frac{\delta}{\delta'} = \frac{\rho'}{\rho}, \quad \text{y por tanto, } \frac{V}{V'} = \frac{\rho'^2}{\rho^2} \quad \text{ó} \quad V\rho^2 = V'\rho'^2. \qquad (1)$$

Como el arco descrito en un dia por el sol se confunde con un arco de círculo descrito desde la tierra como centro, $v\rho^2$ expresará el doble del arco de un sector tal como el ATA', descrito en un día por el radio vector TA; y como este sector tiene por medida

$$\frac{1}{2} \cdot AA' \cdot TA = \frac{1}{2} V\rho \cdot \rho,$$

la relación anterior indica que el sector descrito en un día por el

radio vector dirigido desde la tierra al sol, es una cantidad constante; de donde se deduce *que las áreas descritas* por el radio vector *son proporcionales á los tiempos*. Éste es el principio de las áreas de Kepler.

De la relación (1) se deduce

$$\rho' = \rho \sqrt{\frac{V}{V'}},$$

lo cual permite calcular ρ', y trazar, por consiguiente, la órbita, ó á lo menos, una curva que la sea semejante.

— La dirección del eje mayor de la órbita solar se determina teniendo en cuenta que este eje divide la curva en dos partes simétricas, y que, por consecuencia, el tiempo empleado por el sol para recorrer cada una de sus dos mitades debe ser el mismo. Así, pues, se buscará en el cuadro de las longitudes observadas dos que difieran en 180°, y tales, que el tiempo empleado por el sol para pasar de una de las dos porciones á la otra sea el mismo, es decir, medio año. La recta AP (fig. 3), que une estas dos posiciones, es el eje mayor de la elipse.

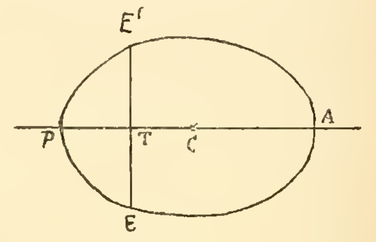


Figura 3.

Se obtiene la excentricidad, teniendo presente que si a designa el semi-eje mayor AC; c, la distancia CT del centro al foco, y e, la excentricidad ó relación $\frac{c}{a}$, se tiene:

$$TA = a + c, \quad TP = a - c;$$

por lo tanto,

$$\frac{TA}{TP} = \frac{a+c}{a-c} = \frac{1+e}{1-e} = 1{,}034153; \quad \text{de donde } e = 0{,}01679.$$

La forma de la órbita se encuentra así determinada. Las dimensiones reales se obtienen midiendo la distancia de la tierra al sol; se ha encontrado para longitud del semi-eje mayor 24068 . R, siendo R el radio ecuatorial. Resultan, pues, para TA y TP los valores:

$$TA = 24472 \,.\, R \quad \text{y} \quad TP = 23664 \,.\, R.$$

Órbita lunar.— Cuando se tiene en cuenta en el estudio del movi-

miento de la luna la variación de su diámetro aparente, se llega á la conclusión que la órbita de la luna debe estar representada, no por un círculo, sino por una elipse en que la tierra ocupa uno de los focos, y que esta elipse es recorrida próximamente conforme á la ley de las áreas.

La excentricidad de la elipse lunar es igual á $\frac{1}{18}$ ó 0,0548. Esta elipse gira alrededor de la tierra en el sentido directo y verifica un giro completo en poco más de nueve años ó 3.232,57 días.

Halley ha descubierto que el movimiento medio de la luna es más

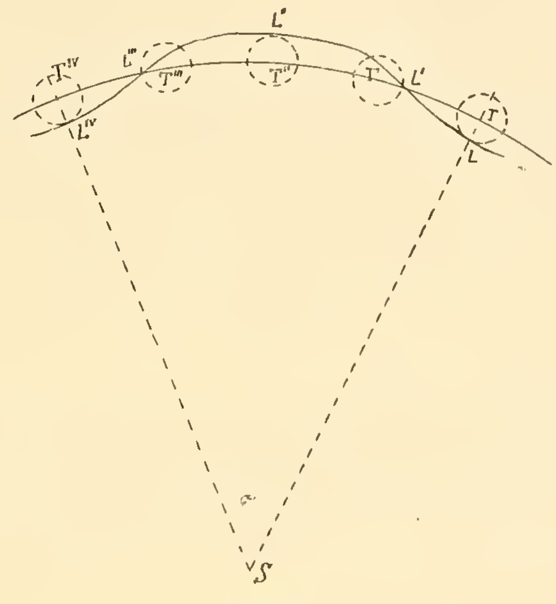


Figura 4.

rápido en los tiempos modernos que en los antiguos; fenómeno que se conoce con el nombre de aceleración del movimiento medio de la luna.— Laplace, que está ligado á la variación de la excentricidad de la tierra, y que se debe componer de una serie de aceleraciones alternando con otro de retrogradaciones ó retrasos. Asi, pues, no nos separaremos mucho de la realidad diciendo que la órbita de la luna es una elipse en que la tierra ocupa uno de los focos, y que esta elipse que la luna recorre con movimiento á poco más uniforme, gira asimismo alrededor de la tierra en nueve años en el sentido directo, conservando una inclinación fija sobre el plano de la eclíptica y una

inclinación variable sobre el plano del ecuador celeste. Tal es, vista desde la tierra, la curva descrita por la luna.

Vista la luna desde otro punto del espacio, desde el centro del sol, por ejemplo, esta curva se complica aun con el movimiento de traslación de la tierra. El sol, estando en S (fig. 4), mientras que la tierra describe su órbita elíptica, la de la luna toma la forma $L L' L''$.....; y esta curva satisface perfectamente á las apariencias que se notan desde el centro de la tierra. Así, vista desde el sol, la órbita de la luna es una curva sinuosa que pasa alternativamente de un lado á otro de la órbita de la tierra. La órbita lunar tiene, además, un movimiento de balanceo alrededor de la línea de los nodos, que se denomina *nutación* de la órbita lunar. La inclinación media de la órbita lunar sobre la eclíptica es de 5° 8′ 48″; pero varía periódicamente de un lado y otro de este valor medio entre límites que difieren entre sí 17′ 34″. El descubrimiento de este fenómeno de nutación se debe á Tycho-Brahe. La teoría es la misma de la de Bradley para la nutación del eje de la tierra, sólo que el cono de la nutación de la órbita lunar es de revolución, como el de la precesión de los nodos.

El eje de la órbita lunar describe un cono de 8′47″ de semi-abertura alrededor de la línea de los polos de la eclíptica. Los dos movimientos son uniformes. El movimiento sobre el cono de nutación tiene por período 173 días, y el del movimiento sobre el cono de precisión, 18 años y 2 tercios.

Los astrónomos que más particularmente han hecho estudios sobre la teoría de la luna, y cuyas obras pueden consultarse, son: Halley, Flamsteed, Euler, Clairaut, d'Alembert, Mayer, Burg, Burckhardt, y en los tiempos modernos: Damoiseau, Pontécoulant, Plana, Hausen, Adams, Delaunay, etc. Las tablas más generalmente usadas son las de Hausen.

Órbita terrestre.—Se da este nombre á la curva que describe el centro de la tierra, de Occidente á Oriente, en su movimiento de traslación anual.

Esta órbita real se deduce de la órbita aparente del sol. Sea, en efecto, T la posición de la tierra supuesta fija, y S_1 S_2 S_3 S_{IV} diferentes posiciones que el sol ocupa sucesivamente en su movimiento propio aparente. Sea, por el contrario, S la posición del sol supuesto fijo; tracemos las rectas (figs. 5 y 6) ST_1, ST_2, ST_3, ST_{IV} respectivamente iguales y paralelas á las rectas TS_1, TS_2, TS_3 TS_{IV}; si para un observador colocado en T, el sol parece toma sucesivamente las posiciones S_1, S_2, S_3, S_{IV}, para uno colocado en S, la tierra tomará en los mismos instantes las posiciones T_1, T_2, T_3, T_{IV}, puesto

que para los dos observadores las distancias serán las mismas, aunque las direcciones sean opuestas. Ahora, siendo iguales los ángulos en las dos figuras á causa del paralelismo, las curvas serán iguales por tener que corresponder á ángulos iguales, radios vectores iguales, y además estas curvas quedarán descritas en el mismo sentido.

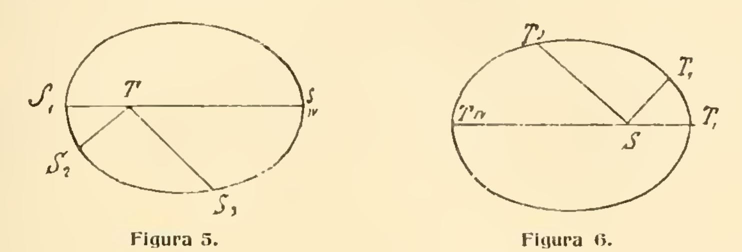


Figura 5. Figura 6.

Por consecuencia, puesto que la órbita aparente del sol es una elipse en que la tierra ocupa uno de los focos, la órbita real de la tierra es una elipse igual en la que el sol ocupa uno de los focos;



Figura 7.

elipse que será recorrida en el mismo sentido que la elipse aparente, ó sea de Occidente á Oriente. En las posiciones aparentes S y S_{IV}, que son el perigeo y el apogeo, corresponden en el movimiento real las posiciones T_1 y T_{IV}, que son el perihelio y el afelio.



Figura 8.

Órbitas de los planetas.—El movimiento aparente de los planetas sobre la esfera es por demás complicado. El planeta, después de estar animado de un movimiento directo, ó sea en el sentido del movimiento propio del sol, parece, al cabo de un cierto tiempo, que disminuye, se para, vuelve á moverse, describiendo en el cielo una curva de nodos parecidos á las que indican las figuras 7 y 8, en las cuales la linea de puntos representa la ecliptica.

Las posiciones del planeta en que parece se para se llaman las *estaciones*, y las partes de su órbita, en las que aparece animado de un movimiento retrógrado, se llaman *retrogradaciones*.

Cassini, *Mémoires de l'Académie des Sciences* (1709), ha dado los dibujos de las rutas que siguen Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno alrededor de la tierra, supuesta inmóvil en el centro del mundo. Las rutas así obtenidas son especies de epicicloides que presentan en cada conjunción inferior ó cada oposición una especie de nudo.

La explicación de las estaciones y retrogradaciones, fundadas sobre la disminución de velocidad de los planetas á medida que se alejan del sol, forman la parte más brillante del tratado de *Revolutionibus*, de Copernic.

—El movimiento de los planetas, que aparece tan complicado cuando se los refiere á la tierra, son, por el contrario, extremadamente sencillos cuando se los refiere al sol. Su movimiento queda perfectamente determinado por las leyes de Kepler (á quien cupo la gloria de descubrir el movimiento de estos astros), sirviéndose de siete datos ó *elementos*, que hacen conocer la forma y posición de la órbita, así como la duración de la revolución. Los planetas, pues, se mueven en elipses, y los siete *elementos* de que acabamos de hablar, son:

1.° La inclinación del plano de la órbita sobre la eclíptica;

2.° El semi-eje mayor de la elipse ó la distancia media del planeta al sol;

3.° La excentricidad de la elipse;

4.° La longitud del perihelio;

5.° La longitud del nodo ascendente;

6.° La longitud de la posición del planeta en una época dada; y

7.° La duración de la revolución sideral del planeta.

En el *Annuaire du Bureau des Longitudes*, Mr. Langier ha dado el valor de estos elementos para todos los planetas conocidos, y Delambre ha determinado las variaciones de los principales elementos de las órbitas de los antiguos planetas.

—La menos prolongada de todas las órbitas planetarias es la de *Freya*, y la más corresponde al planetoide *Polimnia*, cuyo mayor diámetro supera al menor en el tercio de su valor total; lo que da, entre sus distancias máxima y mínima al sol, una diferencia de 72 millones de leguas. Últimamente se han descubierto otros planetas ultrazodiacales, como *Liberatriz*, cuya excentricidad es mayor (0,3467), y *Lamia*, que sólo presenta una excentricidad igual á 0,02228, superior á la de la tierra en una tercera parte, pero nueve veces más pequeña que la de Mercurio.

Órbitas de los cometas.—Las órbitas de los cometas parecen ser elipses muy alargadas, que se confunden sensiblemente con parábolas en la posición de su curso, durante el cual son visibles para nosotros.

Como la parábola es curva más sencilla que la elipse, los astrónomos adoptan para los cometas, por lo menos para una primera aproximación, la hipótesis de una órbita parabólica.

Los elementos parabólicos de un cometa son:

1.° *La inclinación* de la órbita sobre el plano de la eclíptica.

2.° *La longitud del nodo ascendente*, ó sea el ángulo que la intersección de la órbita con la eclíptica forma con la línea de los equinoccios, ó con una paralela á esta línea trazada por el centro del sol. Estos dos primeros elementos son necesarios á fin de determinar la posición del plano de la órbita.

3.° *La longitud del perihelio*, ó la longitud del vértice de la parábola, que sirve para dar á conocer la dirección del eje mayor de la órbita, ó la situación de esta curva en su propio plano.

4.° *La distancia perihelia*, ó sea la distancia del vértice al foco, que quita toda incertidumbre sobre la forma de la parábola, cuyo foco coincide necesariamente con el centro del sol; y

5.° La *época* del paso del cometa por el perihelio.

A estos elementos se deberá sumar un sexto dato, cual es el sentido del movimiento, bien sea *directo* ó *retrógrado*.

—En general, se puede decir que las órbitas de los cometas son parábolas ó elipses muy excéntricas que cortan á la eclíptica, según todas las inclinaciones, desde *0 á 90°*, y que sus movimientos pueden ser lo mismo directos que retrógrados.

—No se tienen más que cuatro cometas, cuya periodicidad está completamente demostrada, que son el de Halley, el de *corto período*, el de Biela y el de M. Faye.

Para detalles sobre estos particulares, catálogo de cometas, etcétera, puede consultarse entre otras la *Astronomie populaire*, Arago (T. II, pág. 261 y siguientes), y la *Mémoire sur la determination des orbites des comètes*, de M. Sarrus (1843), etc., y tratados generales de Astronomía.

—Por último, para las estrellas que están próximas entre sí, se puede ver la obra *Mémoire sur la determination des orbites que decrivent autour de leur centre de gravité deux étoiles tres rapprochées l'une de l'autre*, M. Savary. De las órbitas reales de las estrellas llamadas fijas, no se sabe nada, pues por su gran distancia parecen inmóviles ó, al parecer, describen trayectorias, cuyas dimensiones para nosotros son sensiblemente nulas.

Orhelite.

Si un punto se mueve sobre una recta con movimiento uniforme, todo otro punto que se considere gravitando alrededor de él según la ley de Newton, describe la línea á que L. Hugo *(Bulletin de la Société Mat. de France*, t. III, pág. 183) dió el nombre de *orhelite*.

—Como ejemplo de estas líneas se pueden citar las órbitas de los planetas. (Ver *órbita).*

Ortodrómica.

Del griego ὀρθός, directo, y δρόμος, camino ó carrera.

Definición.—Curva *ortodrómica* es la que indica sobre la carta hidrográfica la derrota de un buque que ha seguido un arco de círculo máximo.

Determinación de esta curva.—Sea AB el arco de círculo máximo que pasa por el punto de partida y el de llegada; C el punto en que este círculo máximo corta al ecuador; O el origen de las longitudes; $\lambda = OC$ la longitud del punto C; $L = OD$ la del punto A; $l = AD$ la latitud de este mismo punto. Llamemos α el ángulo ACD formado por el ecuador y el arco considerado.

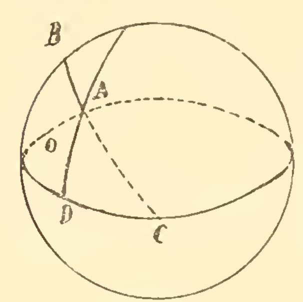


Figura 1.

El triángulo esférico ACD, rectángulo en D, nos da, $\operatorname{tg} . AD = \operatorname{tg} . ACD \operatorname{sen} . CD$ ó $\operatorname{tg} . l = \operatorname{tg} . \alpha . \operatorname{sen} (\lambda - L)$.

Esta ecuación no contiene más que dos incógnitas, α y λ; las coordenadas geográficas del punto A están dadas por las tablas. Para el punto B de la ruta ortodrómica, se tendrá otra longitud y otra latitud, y semejantemente.

$$tg. l' = tg. \alpha. \operatorname{sen.} (\lambda - L')$$

Por medio de estas dos relaciones se pueden determinar las constantes $\lambda = OC$ y $\alpha = \acute{a}ng.^\circ ACD$.

Se conocerá ahora el punto C en que la ruta ortodrómica corta al ecuador y el ángulo ACD que esta ruta forma con el mismo plano. Es, pues, fácil trazar sobre un globo la serie de los puntos que la componen. De éste se la transporta desenvolviéndola sobre una

carta marina, y el lugar geométrico de los puntos obtenidos será la curva buscada.

Propiedades y aplicaciones.—Esta curva difiere de una manera notable de la loxodromia (ver esta voz), siendo más corta que ella; pues la tierra, siendo próximamente esférica, el más corto camino entre dos puntos dados en su superficie es el arco de círculo máximo menor que una semicircunferencia que pasa por estos dos puntos. Por esta razón la prefieren los navegantes.

— Para seguir la ruta señalada por esta línea es necesario cambiar de dirección á cada instante; atendiendo que un círculo máximo corta á los meridianos según ángulos diferentes, á menos que él no sea un meridiano ó el ecuador, casos que son particulares. Así, pues, el procedimiento seguido por los navegantes consiste en unir un cierto número de puntos de la curva ortodrómica por medio de líneas rectas, y seguir estas rutas, es decir, navegar de un punto á otro de la ruta ortodrómica, siguiendo arcos de loxodromia.

— El trazado acabado de indicar convierte la curva ortodrómica en una línea quebrada inscrita en ella, y cuyos lados son arcos de loxodromia, y este trazado da inmediatamente el ángulo que cada uno de los arcos de loxodromia forma con el meridiano de su punto de partida, es decir, el rumbo según el cual se debe gobernar para transportarse al punto siguiente. Estas direcciones pueden ser determinadas por el cálculo, pero se suele usar el método gráfico como más pronto y suficientemente exacto.

— El uso de la ruta ortodrómica puede presentar inconvenientes para navegar entre puntos cuyas latitudes sean muy altas y poco diferentes; pues en estos casos fácilmente dicha ruta atraviesa las regiones polares. En este caso se fija de antemano el paralelo que no se debe remontar, y se divide la ruta en dos; una que va desde el punto de partida á uno determinado en este paralelo, y otra desde ésta al de llegada; también se dirigen desde los puntos de partida y llegada dos arcos de circulos máximos tangentes al paralelo indicado, y queda la ruta dividida en tres partes, á saber: una desde el punto de partida al de tangencia del primer círculo máximo; otra entre los dos puntos de tangencia de dichos círculos, y la tercera desde el punto de tangencia del segundo circulo al punto de llegada.

Puede consultarse sobre estos particulares, especialmente, la obra *Cours de navigation et d'hydrographie*, de E. P. Dubois (pág. 486).

Ortolamberciana.

Se consideran estas líneas en el sistema de proyección geográfica de Lambert, y su estudio puede hacerse consultando los trabajos de Aubry en *Journal de Mathématiques spéciales*, 1896, página 29 y siguientes.

Ortogonales.

Definición.—Se dice que dos curvas son ortogonales cuando las tangentes en el punto de encuentro son perpendiculares.

Ecuación de condición. — Supongamos rectangulares los ejes y $M(x, y)$ el punto de encuentro. Las coordenadas (x, y) deben satisfacer á las tres condiciones:

$$f(x, y) = 0 \quad \rho(x, y) = 0 \quad \frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{\rho'_x}{\rho'_y};$$

eliminando x é y entre estas ecuaciones, se tendrá la relación de condición. (Ver *Círculos ortogonales.)*

Ortostereográfica.

Consultar para esta línea la misma indicación bibliográfica que para la ortolamberciana (Ver esta voz).

Osculatrices.

Del latin *osculari*, besar.

Definición.—Se llaman curvas osculatrices en un punto común, á las que tienen en este punto el máximo de puntos comunes.

Historia.— Leibnitz, en su obra *Meditatio nova de naturâ anguli contactus et osculi, horumque usu in practicâ mathesi, ad figuras faciliores sucedaneas difficilioribus substituendas (Acta Eruditorum*, 1686), expone la teoría completa de las osculaciones de todos los órdenes al objeto de sustituir á una curva complicada otra más sencilla, que le sea osculatriz en el grado conveniente, según la naturaleza de la cuestión propuesta, para producir idénticos resultados.

En esta Memoria se encuentran grandes errores, señalados por Jacobo Bernouilli en las *Acta Eruditorum* de Marzo de 1692, á lo que contestó Leibnitz en su Memoria *Generalia de natura linearum, angu-*

loque contactus, et osculi, provolutionibus, aliisque cognatis, et eorum usibus nonnullis (Acta Eruditorum, 1692), sin comprender las objeciones de aquél.

Propiedades.—Sea

$$\varphi(x, y', a, b, c, \ldots\ldots, l) = 0 \qquad (1)$$

una ecuación que comprende $n+1$, constantes arbitrarias $a, b, c \ldots\ldots l$, y que según los valores atribuídos á estas constantes convienen á una infinidad de curvas diferentes.

Se puede disponer de las indeterminadas $a, b, c \ldots\ldots l$ de tal manera, que la curva (1) tenga un contacto de un orden determinado, de enésimo orden ó más, en un punto dado (x, y) con una curva dada por la ecuación

$$y = f(x). \qquad (2)$$

Si el contacto es de enésimo orden, las $n+1$ condiciones siguientes serán satisfechas

$$y' = y, \quad \frac{dy'}{dx} = \frac{dy}{dx}; \quad \frac{d^2y'}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\ldots, \quad \frac{d^ny'}{dx^n} = \frac{d^ny}{dx^n},$$

y estas $n+1$ ecuaciones determinarán las $n+1$ constantes incógnitas, $a, b, c \ldots\ldots$ en función de las coordenadas del punto de contacto y de los coeficientes de la ecuación (2).

Determinando las constantes de modo que se obtenga el orden más elevado posible, que es igual al número de aquéllas menos una, se tendrá la curva representada por la ecuación (1), que responde á estos valores de las constantes, ó sea la *osculatriz* de la curva $y = f(x)$.

Para que dos líneas sean osculatrices, la una de la otra, en un punto, deberán tener en este punto un contacto de segundo orden á lo menos, es decir, que se las pueda considerar como teniendo tres puntos comunes confundidos en uno sólo. También lo serán cuando la ecuación resultado de la eliminación de una de las coordenadas entre las ecuaciones de las dos curvas tiene por lo menos tres raíces iguales, ó cuando las dos primeras derivadas á lo menos de una de las coordenadas con relación á la otra, tienen los mismos valores en los dos casos.

— Si una curva está determinada por 3, 4, 5..... puntos, se puede proponerla hacerla pasar por 3, 4, 5,..... puntos infinitamente próxi-

mos de una curva dada; mas ella es ahora determinada, y en estas parecidas condiciones será la osculatriz de la curva dada en el punto en que se confunden los 3, 4, 5..... puntos por los cuales se le hace pasar.

— Un círculo, estando determinado por tres puntos, es osculador á una curva cuando tiene tres puntos comunes coincidentes con esta curva. (Ver *círculo osculador*).

— Dos cónicas, no pudiendo tener sino cuatro puntos comunes, son mutuamente osculatrices cuando estos *cuatro puntos* se confunden.

— Al grado de contacto de dos curvas osculatrices se llama *osculación*, y es de primero, segundo, tercer orden, etc., según que la igualdad entre las derivadas de que antes se habla, se conserva hasta las segundas, terceras, etc.

Óvalo.

Del latín, *ovum*, huevo.

Definición.— Esta curva, sin ser arbitraria, no se la puede definir de una manera precisa. Se podrá, pues, decir, aproximadamente, que es una curva cerrada en forma de elipse y constituída, en general, por diferentes arcos de círculo que se acuerdan entre sí.

Historia y trazado.— Cuanto se ha dicho de los arcos carpaneles (ver esta voz), se refiere á los óvalos en general, puesto que éstos pueden ser considerados como los dobles de aquéllos, es decir, duplicando su trazado por el otro lado de la *abertura* ó eje hasta obtener una curva cerrada.

Señalaremos únicamente que Monge trató de encontrar los óvalos, refiriéndolos á la elipse, como la curva más graciosa y más elegante, á su modo de ver, y que de esta particular materia puede verse la obra de L. Tabacchi, titulada *Curve á quattro centi, ossia ovali, descritte per archi di cerchio.* (Padua, 1841.)

— Además de estas clases de óvalos, cuyas formas han sido tomadas por el arte á la geometría, existen otras curvas con este nombre, de que nos vamos aquí á ocupar, y que son los *óvalos de Cassini, de Descartes* y aquél de *Mr. Picot.*

Ovalos de Cassini.—(Ver *Cassinoidea*).

Óvalos de Descartes.— *Definición.*— Sean Δ y Δ' (fig. 1) dos circunferencias cuyos centros son O y O'. Supongamos un punto S tomado sobre la línea OO'; si por este punto se dirige una transversal cualquiera, SAA', y se trazan los radios OA y $O'A'$, éstos, prolongados, se cortarán en un punto I. El lugar geométrico de los puntos, tales

como I, obtenidos cuando la transversal gira alrededor del punto S, es un *óvalo de Descartes.*

Historia.—En la Geometría de Descartes, seguidamente á la solu-

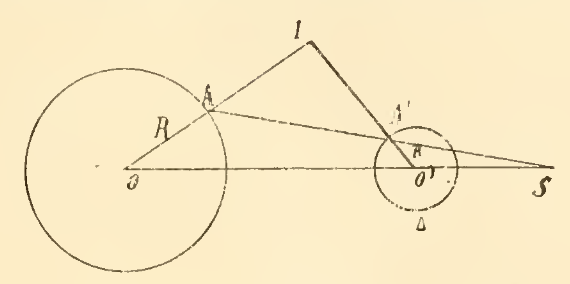


Figura 1.

ción del problema de las tangentes y normales, se encuentra la *Teoría de los óvalos*, que este matemático idea al objeto de utilizar sus trazados para la construcción de las lentes convergentes. Véase la definición de uno de estos óvalos: F, G y A son tres puntos en línea recta (fig. 2), tomados á voluntad; AR es una recta cualquiera que pasa por el punto A. Desde el punto F como centro, con un radio arbitrario, se describe una circunferencia MPN que corta á FAG en P. Se toma AQ, tal que $\frac{AQ}{AP}$ tenga un valor dado menor que la unidad, y $AR = AG$. Se describe desde G, como centro, con RQ, como radio, una circunferencia $M'N'$ que corta la primera en los dos puntos I; estos dos puntos pertenecen al óvalo que pasa por el punto A y es simétrico con relación á FG.

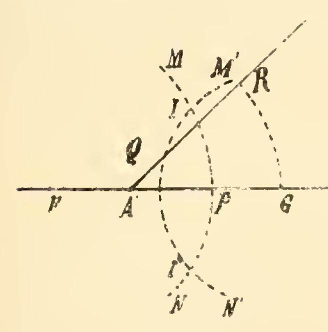


Figura 2.

Sobre las propiedades de esta especie de curvas se han ocupado luego, entre otros matemáticos, Quetelet y Mr. Sturm (t. XV de los *Ann. de Mathem. de Gergonne);* Mr. W. Roberts, *Journal Liouville* (t. XV, pág. 196), y Mr. Strebot, *Nouv. Ann.* (t. IX, pág. 183), usando ambos las coordenadas elípticas; Mr. Salmón *(Higher plane curves)* y Mr. Charles, al cual se debe una descripción completa de las mismas.

Ecuación.—Estas curvas están expresadas en el sistema bi-polar por la ecuación

$$\alpha r + 6 r' + \gamma = 0, \qquad (1)$$

en que r y r' son las coordenadas de uno de sus puntos.

Si consideramos la figura 2, se demostrará que I es un punto de un óvalo de Descartes de la manera siguiente: se tiene

$$\frac{OA}{AI} \cdot \frac{A'I}{O'A'} \cdot \frac{SO'}{SO} = 1,$$

y haciendo

$$OA = R, \quad O'A' = R', \quad OI = r, \quad O'I = r' \quad \text{y} \quad \frac{SO'}{SO} = \alpha \frac{R'}{R}$$

$$\alpha \frac{R}{r - R} \cdot \frac{r' - R'}{R'} \cdot \frac{R'}{R} = 1,$$

relación que se puede escribir

$$\alpha r' - r = \alpha R' - R,$$

ecuación de la forma (1).

Si $\alpha = 1$, ó sea cuando el punto fijo considerado es el centro de semejanza exterior de los dos círculos, el óvalo se convierte en una hipérbola, y será una elipse si el punto S se sitúa en el centro interior de semejanza.

Propiedades.—Las tangentes en los puntos A y A' y la trazada á la curva en el punto I son rectas concurrentes. (Charles.)

— Estas curvas se obtienen por la proyección estereográfica de la intersección de la esfera y de un cono de revolución. (Quetelet.)

— El centro de curvatura de esta línea se obtiene considerando que su evoluta es la caústica por refracción de un círculo. (Salmón.)

— Si sobre un plano se tienen trazados dos círculos que se consideran fijos, y si el centro de un tercer círculo de magnitud variable se mueve sobre la circunferencia del primero, de modo que su radio permanezca constantemente proporcional á la distancia de su centro á la circunferencia del segundo, este círculo móvil envolverá la curva formada por el conjunto de dos óvalos conjugados de Descartes. (Quetelet y Sturm.)

— El lugar de los puntos, tales que la relación de su distancia á dos circunferencias sea constante, es un óvalo de Descartes. (Newton.)

— El arco de esta curva se expresa por una función ultra-elíptica, en la cual la cantidad bajo el radical se eleva al séptimo grado, pero se hace más sencillo este resultado por poderse determinar algebraicamente sobre esta curva, de una infinidad de maneras, arcos cuyas diferencias sean reducibles á los arcos de elipses. Se obtiene un resultado más sencillo por las coordenadas polares si se toma por

variable independiente el ángulo polar; en este caso el polinomio bajo el radical se eleva sólo al quinto grado. (Strebor y Roberts.)
— Sean dos parábolas que tienen el mismo foco y se entrecortan siempre, según el mismo ángulo, que tocan las dos á una elipse, de la cual uno de los focos coincide con el de las parábolas. Los puntos de intersección de todos los pares de parábolas que satisfacen á esta condición describen de una manera general un óvalo de Descartes. (Strebor.)
— Si consideramos dos conos circulares rectos de ejes verticales, la proyección de la intersección de estas superficies sobre un plano perpendicular á los ejes es un óvalo de Descartes. (Longchamps.)
— En los fenómenos de visión se consideran también estas líneas, recibiendo el nombre de *optoides*. *Mém. des Savants etrangers*, t. XII, 1854, pág. 204. *Mémoire sur la visión*, por Vallée.

Óvalo de Mr. Picot.—Mr. Picot ha estudiado una curva óvalo (*Annales des ponts et chaussées* (1832, 2.° trimestre, pág. 151), obtenida dando por ordenada á la abscisa del punto de la circunferencia de radio a, la ordenada de la elipse concéntrica (b, c), en el punto que se encuentra sobre el radio dirigido desde el origen á la circunferencia.

Su ecuación es

$$a^2c^2y^2 + b^2c^2x^2 - (c^2 - b^2)x^2y^2 = a^2b^2c^2.$$

La relación de los radios de curvaturas principales es la misma que en la elipse (a, b), se reduce á $\frac{a^3}{b^3}$. El mismo Mr. Picot expresa el defecto de esta curva, diciendo que las cuerdas paralelas al eje mayor decrecen muy rápidamente de este eje al vértice.
— La curva toroide (ver esta voz) es una curva óvalo.

P

Parábola.

Del griego παραβάλλειν.

Definiciones.—Curva lugar de los puntos que equidistan de un punto y una recta dadas.

— El punto dado fijo se llama *foco.* La recta, *directriz.* La recta que pasa por el foco, perpendicular á la directriz, *eje.* El punto en que el eje corta á la curva, *vértice.* Una recta cualquiera que une dos puntos de la curva, *cuerda;* si ésta es paralela al eje, *diámetro,* y las que parten del foco y terminan en la curva, *radios vectores.*

Historia.—Siendo esta curva una de las cónicas, á lo que se dice sobre este punto en el artículo *(cónicas)* hacemos aquí referencia.

Ecuación y forma.—La ecuación de la parábola en coordenadas rectangulares, referida á su eje y á una perpendicular á este eje levantada en el punto medio de la distancia del foco á la directriz; siendo (x, y) las coordenadas de uno de sus puntos, y p la distancia del foco á la directriz, es:

$$y^2 = 2px;$$

se ve, desde luego, que el eje de las x es un eje de simetría de la curva y que ésta pasa por el origen. Como á x no se la pueden atribuir valores negativos, se ve que la curva se extiende en la parte de las x positivas. Si se hace crecer x de 0 á ∞, y crece igualmente de 0 á ∞. La curva tiene por todas estas circunstancias la forma expresada en la figura. 1.

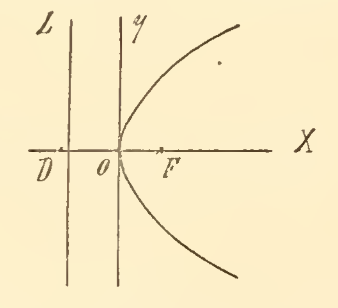


Figura 1.

La ecuación de esta curva en coordenadas polares, siendo su eje el eje polar, y colocando el polo en el vértice, y (ρ, α) las coordenadas de un punto cualquiera de la parábola, es:

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos.\,\alpha}.$$

—En coordenadas axiales referida á su eje y á su vértice, siendo (λ, θ) las coordenadas de uno de sus puntos,

$$\lambda + \frac{p}{2}\cot^2\theta = 0,$$

y en coordenadas líneas ó tangenciales, será, aplicando el teorema de las formas simples á su ecuación $y^2 - 2\,p\,x = 0$, y siguiendo la notación de Clebsch;

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ -p & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

de donde

$$A_{11} = A_{33} = A_{12} = A_{23} = 0$$
$$A_{22} = -p^2, \quad A_{13} = p;$$

y la ecuación de la parábola en coordenadas líneas, es, por consiguiente,

$$pv^2 - 2u = 0.$$

Propiedades.—Parámetro y ordenadas.—Si consideramos la ecuación de la parábola $y^2 = 2px$, la cantidad $2p$ se llama *parámetro*, es decir, que el parámetro es una tercera proporcional á la abscisa y ordenada de un punto cualquiera de esta curva.

— La bisectriz del ángulo de los ejes corta á la parábola en un punto tal, que su abscisa y ordenada son iguales al parámetro.

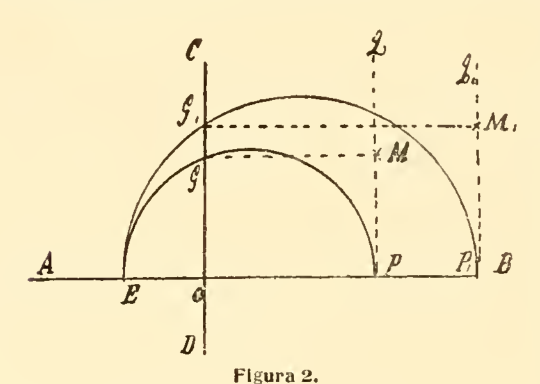


Figura 2.

— Definida la curva por el eje, el vértice y el parámetro se construirá del modo siguiente: Sea AB (fig. 2) el eje, O el vértice y $2p$ el parámetro. Por el vértice O se levantará una perpendicular al eje AB; tomaremos sobre el eje,

á la izquierda del vértice O, una distancia $OE = 2p$, y á la derecha de O un punto cualquiera, P, por el cual se levantará la perpendicular PM á AB. Construyendo sobre la recta EP como diámetro una semi-circunferencia, se trazará por el punto G en que corta á la CD una paralela al eje, y ésta encontrará á la PM en un punto M, que será de la parábola, porque, en efecto, se tiene

$$\overline{MP}^2 = OE \times OP = 2px.$$

Haciendo igual construcción para otro punto cualquiera P_1 del eje, se tendrá el M_1 de la curva, y así, cuantos se quieran.

— Si se trazan dos cuerdas perpendiculares, la distancia de sus puntos medios al eje tienen por media geométrica la mitad del parámetro.

— La cuerda perpendicular al eje de la parábola, y que pasa por el foco, es igual al parámetro de ésta curva.

— Los cuadrados de las ordenadas, perpendiculares al eje, son entre sí como las abscisas correspondientes.

Foco y directriz.—La parábola tiene un solo *foco*, situado sobre su eje y á una distancia del vértice igual á la cuarta parte del parámetro.

—La distancia de un punto cualquiera de la curva al foco, ó sea el radio vector, es igual á $x + \frac{p}{2}$.

—La directriz que corresponde al sólo foco que tiene la parábola, es una recta perpendicular al eje de la curva, situada á una distancia del vértice igual á la cuarta parte del parámetro.

—Si un punto está en la parábola, equidista del foco y de la directriz; si es exterior, su distancia al foco es mayor que á la directriz, y si es interior á la curva, la distancia al foco es menor que á la directriz.

—El teorema de Mr. Castel (Ver *elipse)* se aplica á la parábola; pero aquí el radio del *círculo principal* es infinito, la circunferencia de este círculo se transforma en una tangente á esta curva en el punto en que el eje la corta, y si esta tangente se toma como eje de las y, tendremos «*que el círculo descripto sobre un radio vector cualquiera, como diámetro, es tangente al eje de las y*».

—Si se dirigen en la parábola dos cuerdas focales, los rectángulos de los segmentos de una misma cuerda son entre sí como las cuerdas enteras.

—Si dos cuerdas rectangulares parten del vértice de la parábola, el parámetro es medio proporcional entre las abscisas de las extremidades de estas cuerdas.

Tangente.—La ecuación de la tangente, en un punto (x', y') es

$$yy' = p(x + x').$$

—La tangente á la parábola forma ángulos iguales con el eje y el radio vector dirigido al punto de contacto.

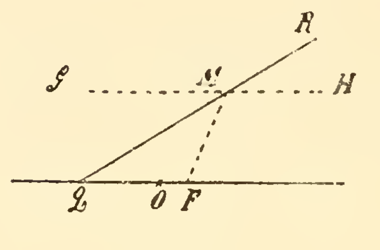


Figura 3.

Esta propiedad permite la solución de los tres problemas siguientes:

Problema 1.°— «Dados el vértice, el eje y un punto de la parábola, trazarle la tangente en este punto, estando ó no construída dicha curva.»

Se determinará el parámetro y el foco *F;* se une el punto dado con el *F* (fig. 3), y por el mismo punto *M* se dirige una paralela, *GH*, al eje; hecho esto, se divide el ángulo *GMF* en dos partes iguales, y la bisectriz *MQ* será la tangente pedida

Problema 2.°—«Dados el eje, el vértice y el parámetro de la parábola, dirigir desde un punto exterior las dos tangentes á esta curva, estando ó no construida.»

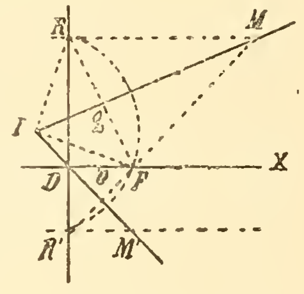


Figura 4.

Sean *O* y *Ox* el vértice (fig. 4) y eje de la parábola: se traza el foco y la directriz. Haciendo centro en el punto dado *I*, se describe con el radio *IF* una circunferencia que cortará á la directriz en dos puntos, *R* y *R';* diríjanse las *RM*, *R'M'*, paralelas al eje de la parábola, y las rectas *RF* y *R'F*, y desde el punto *I* las perpendiculares *IM* é *IM'* á las *RF* y *R'F*, y estas perpendiculares serán las tangentes á la parábola en los puntos *M* y *M'* en que encuentran á dichas dos paralelas.

Problema 3.°—«Dados el vértice, el eje y el parámetro de la parábola, construir la tangente paralela á una recta dada, estando construída ó no la parábola.»

Sea (fig. 5) *O* el vértice y *Ox* el eje de la parábola, *HK* la recta

á la cual ha de ser paralela la tangente; se determina el foco F y la directriz DR. Desde el foco F se traza una perpendicular, FH, á la recta dada, y se prolonga, hasta que encuentre en P á la directriz; por el punto P se dirige una paralela, PM, al eje; por el punto medio Q de la FP se levanta una perpendicular, QM, á la FP, y ésta perpendicular será la tangente pedida.

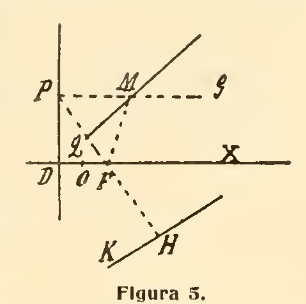


Figura 5.

—La abscisa del punto de encuentro de la tangente con el eje es igual y de signo contrario á la abscisa del punto de contacto.

—Las coordenadas (α, β) del punto de intersección de dos tangentes á ésta curva en los puntos (x', y') (x'', y'') tienen por valor

$$y = \frac{y' + y''}{2}, \quad x = \frac{y'y''}{p}.$$

—El lugar de los puntos desde los cuales se pueden trazar á la parábola dos tangentes perpendiculares, es la directriz.

—La podar del foco es la tangente á la curva en su vértice.

—La perpendicular bajada desde el foco sobre una tangente es media geométrica, entre los radios vectores del punto de contacto y del vértice de la curva.

—La tangente en un punto cualquiera corta á la directriz y á la ordenada focal prolongada en dos puntos situados á igual distancia del foco.

—El ángulo de dos tangentes es igual á la mitad del formado por los radios vectores del punto de contacto.

—La recta que une el foco al punto de concurso de dos tangentes, es bisectriz de los radios vectores de los puntos de contacto.

—El círculo que pasa por los vértices de un triángulo circunscrito á una parábola, pasa por el foco de la curva.

—Las alturas del triángulo formado por tres tangentes se cortan sobre la directriz (Steiner, *Ann. Gergonne*, XIX, 59).

—El área del triángulo anterior es igual á la mitad del que tiene por vértice los puntos de contacto (Gregory, *Cambrige-Journal*, T. II, 16).

Normal.—La ecuación de la normal en un punto (x', y') es

$$y - y' = -\frac{y'}{p}(x - x').$$

—La normal es bisectriz del ángulo formado por el radio vector y una paralela al eje que pasa por el punto de contacto.

—Las coordenadas (α, β) del punto de intersección de dos normales á esta curva en los puntos (x', y'), (x'', y'') tienen por expresión

$$x = p + \frac{\beta^2}{\frac{1}{2}p} - a, \quad y = -\frac{\alpha\beta}{\frac{1}{2}p}.$$

—La tangente y la normal en un punto forman un haz armónico con el radio focal y el diámetro que pasa por este punto.

—Los pies de las tres normales trazadas desde un punto á una parábola y el vértice de esta curva, forman un cuadrilátero inscriptible (Joachimsthal).

Polar.—La ecuación de la polar de un punto (x', y') es

$$yy' = p(x + x').$$

—La recta que une el polo al punto medio de la cuerda polar es paralela al eje.

—Las polares de dos puntos cualesquiera determinan sobre el eje de la parábola un segmento igual á la distancia entre los pies de las perpendiculares bajadas desde dichos puntos al eje de la curva.

—*Polo tangencial y polo normal.*—Las coordenadas (x', y') del polo tangencial están ligadas á las (x_0, y_0) del polo normal por las relaciones:

$$x_0 = p - x' + \frac{2y'^2}{p} \quad \text{é} \quad y_0 = -\frac{2x'y'}{p}.$$

Subtangente y subnormal.—Si T y N son los puntos en que la tangente y la normal, en un punto $M(x', y')$, cortan respectivamente al eje de la parábola, se tendrá:

$$OT = -x', \quad ON = x' + p;$$

el valor de la subtangente es:

$$S_t = 2x';$$

es decir, que la subtangente es doble de la abscisa.

—El valor de la subnormal es:

$$S_n = p;$$

es decir, que la subnormal es constante é igual á la mitad del parámetro.

Diámetros.—La ecuación de un diámetro que biseca las cuerdas, cuya ecuación es $y = mx + n$, tendrá por expresión:

$$y = \frac{p}{m}.$$

—Los diámetros son rectas paralelas al eje.

—La tangente á la parábola, en el punto en que un diámetro corta á la curva, es paralela á las cuerdas que éste biseca.

—Si por un punto dado, P, se dirigen á la parábola dos tangentes, PM y $P'M'$; 1.°, la recta que une el punto P al punto medio I de la cuerda de contactos, es un diámetro; y 2.°, el punto K, intersección de este diámetro y de la parábola, es el punto medio del segmento PI.

—La polar es paralela á la tangente en el extremo del diámetro que pasa por el polo, y encuentra á este diámetro á la misma distancia del punto de contacto que el polo.

—Si por el vértice de una parábola se dirige una cuerda, AB, y por el punto B una perpendicular á AB que encuentra al eje en C, la subcuerda AC es igual á cuatro veces la distancia del foco al extremo del diámetro conjugado de la cuerda.

—Si se unen dos puntos de una parábola al extremo de un diámetro cualquiera, y se dirigen por dichos puntos paralelas al diámetro, la diagonal del trapecio que se forma es paralela á la tangente trazada á la curva en el extremo del diámetro.

—Si $O'x$ es un diámetro que se toma por eje de las x, y $O'y$ la tangente en su extremo, la ecuación de la parábola referida á este sistema de ejes coordenados será:

$$y^2 = 2p'x;$$

$2p'$ recibe el nombre de *parámetro del diámetro* y tiene por valor

$$2p' = 4\left(a + \frac{1}{2}p\right);$$

es decir, que es cuádruplo del radio vector correspondiente al punto en que el diámetro corta á la curva.

Parábola como límite de la elipse y la hipérbola.—La parábola puede ser considerada como el límite de una elipse ó una hipérbola, en las cuales el eje focal permanece fijo en posición, aumentando indefinidamente en magnitud y permaneciendo fijos un vértice y el foco correspondiente.

Radio de curvatura.—El valor del radio de curvatura ρ está dado por la expresión:

$$\rho = \frac{(y^2 \quad p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}$$

— El radio de curvatura es doble de la porción de normal interceptada entre la curva y su directriz. (A. Farcy.)

Evoluta.—Ver la voz *(Evoluta de la parábola)*.

Construcción de la parábola en casos particulares.— 1.° Construir una parábola conociendo un punto, su tangente, la dirección del eje y el parámetro relativo á este punto. Sean MT la tangente dada, MX (fig. 6) la dirección del eje trazado en la región en que se vaya á trazar la curva y M el punto de contacto.

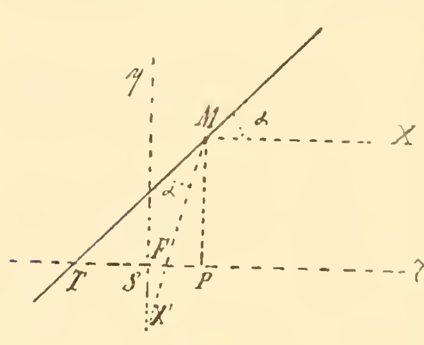


Figura 6.

Se traza MX' que forme con MT' un ángulo igual al ángulo TMX, y se toma $MF = \frac{p'}{2}$; llamando $2p'$ el parámetro dado, F es el foco de la curva; Fx, su eje; el medio S de TP, su vértice; etc.

2.° Construir una parábola, conociendo un ángulo recto que le es circunscrito y los puntos de contacto. El foco de la curva está sobre la recta AB (fig. 7); la directriz, siendo el lugar de los vértices de los ángulos rectos circunscritos á la parábola y la polar de un punto de la directriz pasando por el foco, está igualmente sobre la perpendicular bajada de M sobre AB, y, por tanto, en F; el eje

se obtiene uniendo el punto F al simétrico A' de A con relación á la recta FC perpendicular á MA; MD es la directriz, etc.

3.° Construir la parábola por puntos, conociendo dos tangentes

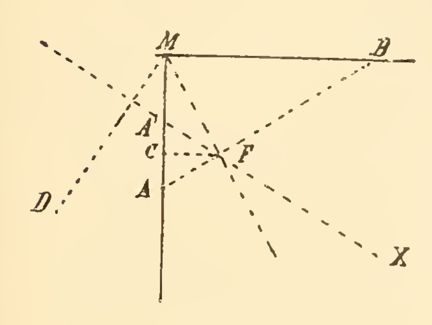


Figura 7.

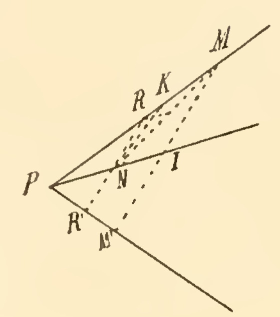


Figura 8.

y sus puntos de contacto.— Se une el punto de encuentro P (fig. 8) de las dos tangentes al punto medio de la cuerda MM' de los contactos, y se determina el punto medio N del segmento PI; se obtiene así un punto de la parábola; dirigiendo por N una paralela á MM' ésta será la tangente en este punto. Conociendo ahora las tangentes RM y RN y sus dos puntos de contacto, aplicando la construcción anterior, se determina un nuevo punto, K, de la curva, y la tangente en este punto, y así cuantos se quieran.

Cuadratura.— La determinación del área de un segmento de parábola fué ya tratada por Arquímedes en su obra *Isorropica* ó *De æquiponderalibus*. En 1606, Valére publicó *De quadrature parabolæ per simplex falsum;* obras que citamos como aquellas en que primero se trató de este problema.

— El área de un segmento parabólico es los dos tercios del triángulo por la cuerda y las tangentes en los extremos de esta cuerda, á saber:

$$\text{Área} = \frac{2}{3} \operatorname{sen} . \theta . x'y'.$$

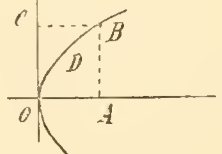


Figura 9.

— El área de $OABD$ (fig. 9) es doble del área $OCBD$.

Rectificación.— La rectificación no exige más que el empleo de funciones circulares; en efecto:

$$ds = dy\sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2}} = \frac{1}{p}\,dy\sqrt{y^2 + p^2}$$

$$S = \frac{1}{p}\int dy\sqrt{y^2 + p^2};$$

integrando por partes, se llega á

$$S = \frac{1}{2p}\,y\sqrt{y^2 + p^2} + \frac{p}{2}\,L\,.\left(y + \sqrt{y^2 + p^2}\right) + C.$$

— Si se quiere empezar á contar el arco en el vértice, se tendrá

$$O = \frac{p}{2}\,L\,.\,p + C;$$

y, por tanto,

$$S = \frac{1}{2p}\,y\sqrt{y^2 + p^2} + \frac{p}{2}\,L\,.\,\frac{y + \sqrt{y^2 + p^2}}{p}.$$

Aplicaciones.— Tiene numerosas aplicaciones.— Fuera de los innumerables usos á que se aplica en Geometría, en Sombras y Perspectiva de sombras es de grande utilidad. En Optica, los espejos parabólicos gozan de la propiedad de concentrar en un solo punto todos los rayos paralelos al eje. Las cadenas ó cables de los puentes suspendidos afectan la forma de esta curva, y también se da esta forma á los balancines en las máquinas de vapor. En Balística, los proyectiles lanzados en el vacío, bajo una inclinación cualquiera, describen esta curva. En Astronomía, en el cálculo del movimiento de los cometas, se confunde la órbita de estos astros, en las proximidades del perihelio, con una parábola. En Estereotomía, para servir de directriz á los arcos y bóvedas parabólicas, etc.

Especies principales de parábolas.

Parábola bicuadrática.—Se da este nombre á una curva de tercer orden que tiene dos ramas infinitas y que está generalmente expresada por una de las tres ecuaciones siguientes:

$$(1)\ldots\ldots\quad a^3x = y^4$$

$$(2)\ldots\ldots\quad a^3x = y^4 - b^2y^2$$

$$(3)\ldots\ldots\quad a^3x = y^4 - (b + c)\,y^3 + bcy^2.$$

La ecuación (1) representa la curva de la (fig. 10); la ecuación (2), la de la (fig. 11), y la ecuación (3), la de la (fig. 12).

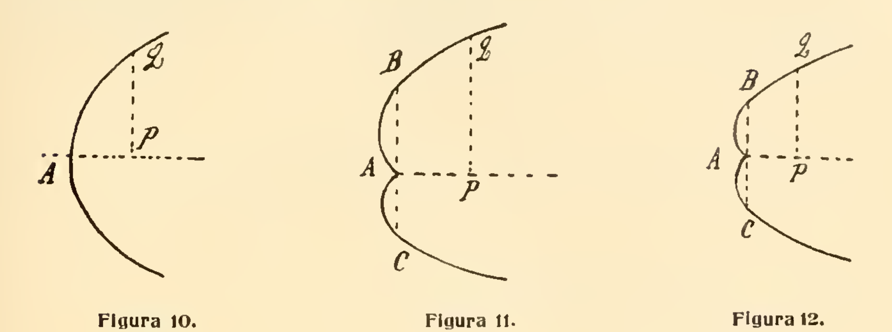


Figura 10. Figura 11. Figura 12.

En todas estas figuras se tiene:

$AP = x$; $PQ = y$; $AB = b$; $AC = c$ y a una cierta cantidad dada.

Parábola cartesiana.—Es ésta una curva de segundo orden, que está representada por la ecuación:

$$xy = ax^3 + by^2 + cx + d,$$

y cuya forma es la expresada en la (fig. 13).
— Esta curva presenta cuatro ramas infinitas, de las cuales dos son hiperbólicas, y las otras dos, parabólicas.

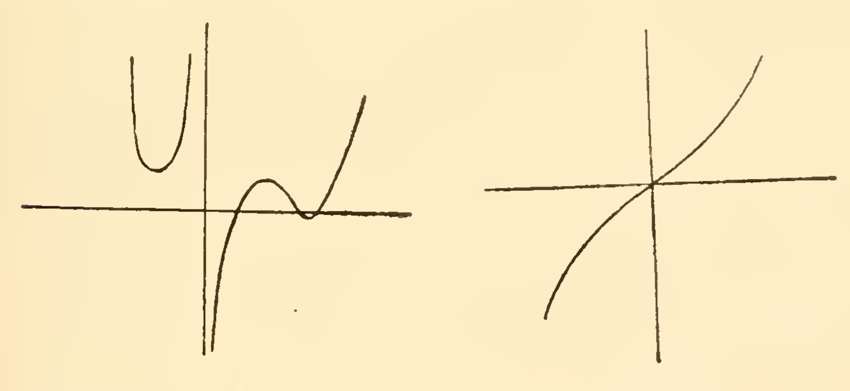


Figura 13. Figura 14.

Parábola cónica.—Curva de ramas parabólicas representada por la ecuación

$$y = 3gx^2.$$

— La evoluta de esta curva es la parábola cúbica.

Parábola cúbica.—Curvas de segundo orden que presentan dos ramas infinitas dirigidas en sentido inverso.

La ecuación general de estas lineas es:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

ecuación que cuando $b = c = d = o$ se reduce á la forma:

$$y = ax^3,$$

la cual representa la curva de la (fig. 14).

Se llama *primera parábola cúbica.*

— Si la ecuación es:

$$y^2 = ax^3,$$

la curva se llama *segunda parábola cúbica.*

— En general, la ecuación

$$y^m = ax^3$$

es aquella de la *emésima parábola cúbica.*

Parábola cúbica de Neil.—Definición.—Se dice *parábola cúbica de Neil* ó *neiliana*, á aquella de entre estas curvas cuya ecuación es:

$$y^3 = ax^2.$$

Historia.—Esta curva es célebre por ser la primera que se obtuvo su rectificación. El origen de su nombre es el siguiente: Wallis había indicado ciertas relaciones diferenciales que podían conducir á descubrir las curvas que fueran rectificables.— Un joven geómetra, Guillermo Neil, indicó una curva geométrica que satisfacía á las relaciones de Wallis, mostrando que en la tal curva el cubo de la ordenada era proporcional al cuadrado de la abscisa. Más tarde se demostró que esta curva no era otra que la evoluta de la parábola ordinaria, y todas las evolutas son precisamente rectificables.

Neil no conoció la curva que trató de rectificar (1657). Wallis indicó fuese una parábola (Wallis, *Algebra*, pág. 319. Edic. 1685). Ver. *Perlas de Sluse.*

Henraet fué el primero que conoció de una manera general la identidad de los dos problemas de la rectificación y de las cuadraturas de las curvas, resolviendo el problema de Wallis de una manera general.

Huygens se ocupó también de la rectificación de esta curva, dando de ello conocimiento á Schooten.

Propiedades.—Sean $OP = x'$, $PM = y'$ las coordenadas de un punto de la curva. La tangente en M forma con la abscisa un ángulo cuya tangente trigonométrica es:

$$\text{tg} = 3gx'^2$$

(siendo su ecuación $y = gx^3$).

La tangente encuentra al eje de las x en un punto N tal, que:

$$ON = \frac{2}{3} OP.$$

— Si consideramos la parábola cónica de ecuación $y = 3gx^2$, ésta cortará á la ordenada PM en un punto E, cuyas coordenadas son x' y $3gx'^2$; la tangente en E de esta parábola encuentra al eje de las abscisas en N_1 y se tiene:

$$ON_1 = \frac{1}{2} x'.$$

— Levantando en N_1 una perpendicular á EN_1, ésta corta al eje de las y en un punto F, foco de la parábola, y se tiene:

$$OF = \frac{g}{12}.$$

— De la ecuación de la curva $y^3 = a x^2$
se deduce para valor del arco:

$$S = \frac{8a}{27}\left\{\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right\}$$

Construcción.—De las propiedades arriba indicadas deduce Foucaut la siguiente construcción mecánica de esta curva: Se determinan los puntos F y N_1; en N_1 se sitúa el vértice de una escuadra; se la gira hasta que uno de sus brazos pase por F; ahora la otra rama cortará la ordenada PM en E; por este punto E se traza una recta que forme con el eje de las x un ángulo cuya tangente sea igual á $3gx'^2$, y se tomará $PQ = 1$ sobre el eje de las abscisas, y se traza EQ: por N

se dirige una paralela á esta recta, EQ, y ella corta la ordenada en el punto M, que pertenecerá á la parábola cúbica; siendo NM su tangente en M.

Puede consultarse, entre otras obras, la *Revista de Ciencias* (T. X, página 1), y los *Cálculos* de Cambardella (pág. 457).

Parábolas divergentes.—Nombre dado por Newton á una especie de

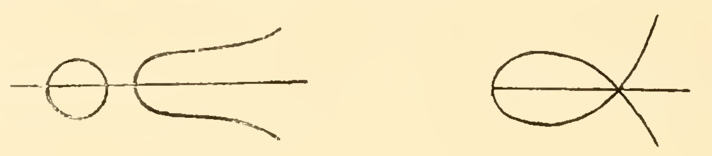


Figura 15. Figura 16.

líneas de tercer orden, ó curvas de segundo, que comprenden cinco formas distintas y están expresadas por la ecuación:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0;$$

la primera (fig. 15) es una curva en forma de lira que tiene un óvalo en su cabeza, correspondiendo al caso en que

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

tiene las tres raíces reales é iguales.

—La segunda (fig. 16) tiene un punto conjugado; corresponde al



Figura 17. Figura 18.

caso en que las dos raíces más pequeñas, de la propia ecuación anterior, son iguales.

—La tercera (fig. 17) es la que se refiere á la igualdad de las dos raíces mayores.

—La cuarta (fig. 18) es la que hace referencia al caso en que sólo existe una raiz real.

— Y la quinta corresponde al caso de las tres raíces iguales. La ecuación se reduce ahora á la $y^2 = ax^3$, es decir, á la *segunda parábola cúbica*.

Parábolas diversas.—Con los nombres de *parábolas* de Artzt, de Brocard, de Kiepert y de Mandart se han estudiado diferentes clases de estas curvas que están ligadas á triángulos que responden á determinadas circunstancias. Las de Artzt son dos grupos de tres parábolas cada uno, envolventes de los lados de ciertos triángulos; las de Brocard son también seis, anticomplementarias de las seis anteriores; las de Kiepert es la envolvente del eje de homología de los triángulos de este autor y de otro dado; y las de Mandart son también seis, obtenidas de modo especial.

La construcción y propiedades de estas parábolas ha sido objeto de estudios por parte de E. Vigarié, que los publicó en el *Journal de Mathématiques Speciales* en 1889, y en el *Journal de Mathématiques elementaires* en 1891. Puede á su vez consultarse *Association française pour l'avancement des Sciences*, 1887.

Parábola helizoide.—Se da este nombre á la curva engendrada por una parábola ordinaria, cuyo eje se arrolla alrededor de una circunferencia.

Historia.—Jacobo Bernouilli estudió esta curva, «*Specimen calculi differentialis in dimensione. Parabolæ helicöides, ubi de flexuris curvarum, earumdem evolutionibus aliisque*» (*Acta Eruditorum*, 1691), dando á conocer su generación y proponiéndose al propio tiempo encontrar su tangente, sus puntos de inflexión, su cuadratura y su rectificación.

Propiedades.—Esta línea se describe en (*Espiral parabólica*), nombre con que más generalmente es ahora conocida.

Parábola nodata.—Newton, *Enúmeratio linearum tertii ordinis*, dió este nombre á la curva de ecuación

$$y = x\sqrt{a - x}.$$

Parábola virtual.—Línea cuya ecuación es:

$$(x^2 - by)^2 = a^2 (x^2 - y^2).$$

Es una curva unicursal, que la estudió y dió nombre G. de San Vincent (*Op. Geom*, 1647). Cramer la nombró *besace (alforja)*.

Ver *Journal de Mathématiques Speciales*, 1895.

Parabólicas.

Definición.—Dase este nombre á las curvas representadas por la ecuación general

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots\ldots$$

para distintos valores de sus coeficientes.

Historia.—Wallis, en su «*Arithmetique des infinis*» (1655), se ocupa de varias cuestiones relativas á las curvas parabólicas.

Cavalieri, Fermat, Descartes y Roberval habían obtenido la fórmula de cuadratura de una parábola de grado cualquiera, $y = x^m$ siendo m entero y positivo.

Wallis, en su obra citada, prolonga la serie de los exponentes positivos por bajo de cero, é intercala asimismo las fracciones positivas ó negativas, de manera á obtener nuevas parábolas que tengan sus ordenadas de una de las formas

$$y = x^{-m}, \quad y = x^{\frac{p}{q}}, \quad y = x^{-\frac{p}{q}};$$

suponiendo que la fórmula $\frac{x^{m+1}}{m+1}$, que nos da el área de la parábola $y = x^m$, se puede aplicar á aquellas que se introducen en la serie. Wallis demuestra que x^{-m} debe ser $\frac{1}{x^m}$, y que $x^{\frac{p}{q}}$ es igual á $\sqrt[q]{x^p}$. Las nuevas parábolas no son, pues, otras que las curvas

$$y = \frac{1}{x^m}, \quad y = \sqrt[q]{x^p}, \quad y = \frac{1}{\sqrt[q]{x^p}},$$

y pueden, por tanto, cuadrarse estas curvas por la fórmula propia de la cuadratura de las parábolas propiamente dichas.

—Roberval había enviado á Fermat en 1636 la solución del problema de la cuadratura de una parábola de grado cualquiera:

$$y^m = a^{m-1}x,$$

y poco después, de una parábola

$$y^m = a^{m-n} x^n;$$

así, cuando aparece el « *Traité des indivisibles* », de Cavalieri, reclama la prioridad, y Fermat manifiesta que él cuadró las parábolas de órdenes superiores al tiempo que lo hacía Cavalieri.

Casos particulares.—Si

$$y = a + bx + cx^2,$$

se tendrá la parábola ordinaria, y si

$$y = x^3,$$

un caso particular de las parábolas cúbicas ó de tercer grado.

Propiedades.— Las curvas parabólicas tienen la propiedad especial de ser las que son susceptibles de tener con otra cualquiera el contacto más íntimo posible.

Aplicaciones. — Los geómetras se han ocupado de la construcción de estas curvas para explicar los principios fundamentales de la resolución de las ecuaciones numéricas. (Puede consultarse, entre otras obras, el *Algebra* de M. Garnier y *La aplicación del Algebra á la Geometría* de Mr. Bourdou.

Paracéntrica.

Del griego παρα, *cerca*, y de κεντρον, *centro.*

Definición.— Se dice de una curva tal, que un cuerpo pesado, que se mueve libremente á lo largo de esta curva, se aleja ó aproxima igualmente en tiempos iguales de un punto dado.

— La curva isócrona (ver esta voz) es paracéntrica.

Paracicloides.

Curva de la clase de las *pseudocicloides.* (Ver esta voz.)

Su ecuación intrínseca es

$$s^2 - K^2 \rho^2 = a^2.$$

Presenta una forma análoga á la evolvente de círculo, pero su normal, en lugar de ser tangente al círculo director, le es exterior.

— Se obtienen por el rodaje de un círculo imaginario sobre otro fijo

real ó imaginario y admiten, como curva asintótica, dos espirales logarítmicas, cuyos polos están sobre el centro del círculo fijo.

— Estas curvas son semejantes á su segunda evoluta.

— Puede verse R. de Saussure: *Intermediaire des Mathématiciens*, 1895, página 356.

Paralelas.

Definición.— Se dice que dos curvas son paralelas cuando tienen la misma evoluta.

Historia.—Eutre los diferentes trabajos relativos á estas curvas, citaremos los siguientes: *Kaestuer (Comm. soc. Gottin*, t. XI; *Crelle*, 1822, t. II, pág. 203); T. Olivier *(Journal de l'Ecole Polytechnique*, tomo XV, pág. 73), y particularmente la obra *De lineis et superficiebus æquidistantibus. Dissertatio inauguralis*, Michaelis Reiss (Gottingue, 1826, en 4.°), en la que pueden verse todas las fórmulas diferenciales relativas á las curvas paralelas ó equidistantes; planas y de doble curvatura.

Propiedades.— Sean B y B' dos curvas paralelas y A su evoluta; los puntos tales como m y n en que una normal común corta á ambas curvas, se denominan puntos *homólogos*.

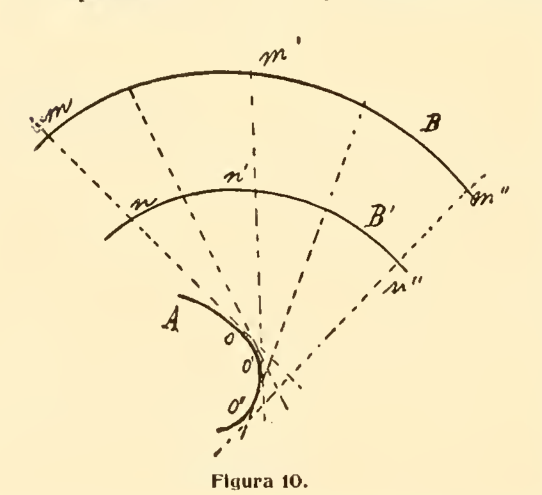


Figura 10.

— Para todas las curvas paralelas, si se marcha sobre la curva B á partir del punto m, y al propio tiempo, sobre la curva B' á partir del punto homólogo n, se podrá marchar de dos maneras diferentes:

1.° Tomando dos ángulos de contingencia iguales, y entonces los arcos ds de B y ds' de B' serán entre si como los radios de curvatura $mo = \rho$ y $no = \rho'$.

2.° Tomando dos arcos ds sobre B y ds' sobre B', proporcionales á los radios de curvatura ρ y ρ', se tendrán dos ángulos de contingencia iguales.

— Dos curvas paralelas tienen por envolventes dos curvas paralelas.

— La más importante de las curvas de esta especie es la paralela á la elipse ó toroide. (Ver esta voz.)

Trazado.—Para trazar una curva paralela á otra dada, bastará tomar sobre todas las normales á la primera y á partir de los puntos de contacto, una longitud constante.

Ejemplos: La curva *paralela* de la parábola es

$$r^6 - (3y^2 + x^2 + 8mx - 8m^2)\,r^4 + [3y^4 + y^2(2x^2 - 2mx + 20m^2) + 8mx^3 + 8m^2x^2 - 32m^3x + 6m^4]\,r^2 - (y^2 - 4mx)^2\,[y^2 + (x - m)^2] = 0.$$

— Para la *paralela* á la elipse, ver. *Analítica* de Salmon, pág. 479.

— La paralela á la astroide (ver *hipocicloide*), siendo la ecuación de esta línea

$$x = l\,.\,\text{sen}^3\,t, \quad y = l\,.\,\cos^3 t,$$

las de la paralela serán,

$$x = l\,.\,\text{sen}^3\,t + h\,.\,\cos\,.\,t \quad \text{é} \quad y = l\,.\,\cos^3 t + h\,.\,\text{sen}\,.\,t,$$

curva que tiene cuatro puntos de retroceso.

Paralelos.

En Geometría se considera que cada uno de los puntos de la generatriz de una superficie de revolución describe en su movimiento una circunferencia de círculo, cuyo plano es perpendicular al eje, y cuyo centro se halla sobre él; á dichas circunferencias se denominan *paralelos* de la superficie. — El mayor de éstos se llama *ecuador* (Ver esta voz), y el más pequeño, no siendo cero su radio, *círculo de garganta.* (Ver esta voz.)

— En Astronomía se distinguen tres especies de paralelos, á saber, los de *altura*, los de *declinacion* y los de *latitud.*

— *Paralelos de altura.*—Son círculos paralelos al horizonte, y se les da también el nombre de *almicantáradas.* (Ver esta voz.)

— *Paralelos de declinación.*—Son círculos paralelos al ecuador, y que las estrellas parecen describir alrededor del polo, por virtud de su revolución diurna. Son tanto más pequeños cuanto más alejados están del ecuador.

— Se les nombran paralelos de declinación, porque siendo paralelos

al ecuador sirven para señalar todos los astros que tienen una misma declinación. Los *trópicos* y *los círculos polares* (Ver estas voces) son paralelos de declinación.

Paralelos de latitud.—Son círculos paralelos á la eclíptica. Son tanto más pequeños cuanto más alejados están de esta línea.

— Se les nombran paralelos de latitud, porque siendo paralelos á la eclíptica, sirven para señalar todos los astros que tienen una *misma latitud.*

— En Geografía, los *paralelos de latitud* son pequeños círculos de la esfera terrestre, paralelos al ecuador terrestre.

No siendo la tierra exactamente una superficie de revolución, es preciso, si se tiene en cuenta esta circunstancia, modificar la anterior definición. Así, un paralelo sería el lugar de los puntos de la superficie del globo para los cuales la vertical formase un ángulo igual con la línea de los polos, ó sea el lugar de los puntos que tienen la misma latitud geográfica. Este lugar sería una línea de doble curvatura; pero en las aplicaciones á la Geografía no hay inconveniente en considerarla como plana, atendiendo á que sobre un mapa, la diferencia sería insensible.

Paralelos magnéticos.—Duperrey ha trazado los paralelos magnéticos con la condición de que sean perpendiculares á los meridianos en cada punto.

Estas líneas en la hipótesis general del magnetismo terrestre (Ver *magnéticas)* deben gozar de otras dos propiedades: tener la misma latitud magnética, y por consecuencia, ser constante la inclinación de la aguja imanada, lo cual no se realiza, y conservar la intensidad magnética el mismo valor á todo lo largo de un mismo paralelo, lo que tampoco tiene lugar.— Así, pues, se hace necesario trazar, al propio tiempo que estos paralelos, las líneas *isoclínicas* y *las isodinámicas.* (Ver estas voces.)

Parásita.

Definición.—En la resolución de algunos problemas de Geometría descriptiva, sobre todo en aquellos en que á intersecciones de cuerpos y á determinación de curvas de contacto se refieren, ocurre con frecuencia que de la línea intersección ó curva de contacto encontrada, no es útil más que una cierta porción, limitada por las circunstancias del problema. Pues bien; á la parte de línea que cae fuera de los límites expuestos, y que muchas veces precisa construir para encontrar, por ejemplo, la forma general de la línea buscada,

ó hacer su construcción, etc., es á la que se da el nombre de curva ó línea *parásita*.

Ejemplo.—Cuando dado un toro de eje vertical se toma un punto sobre una perpendicular al plano vertical trazada por el centro de esta superficie, y se quiere construir las proyecciones de la curva de contacto del toro y del cono circunscrito, cuyo vértice es dicho punto, es conveniente, para mejor determinar la forma de la curva, el trazado de las asíntotas de la parte de esta curva que cae fuera de la porción útil que se busca, ó sea de la parte *parásita* de dicha línea y la determinación de aquellos puntos de la curva parásita que vienen á estar sobre el circulo de garganta y el ecuador, y que son en este caso puntos de retroceso de la curva pedida.

Paso.

Definición.—Se designan en Topografía con el nombre de líneas de *paso*, á aquellas líneas según las cuales la superficie natural del terreno es cortada por la de un proyecto de camino.

Determinación.—Se determina esta línea por medio de puntos que luego se unen por un trazado continuo. Para ello, y á fin de facilitar los cálculos de desmontes y terraplenes, se sustituye á la superficie del terreno entre dos perfiles consecutivos en traviesa, una superficie alabeada, engendrada por una recta sujeta á apoyarse sobre la línea del terreno de cada uno de estos perfiles y á conservarse paralela al plano vertical que pasa por el eje de la vía. Esta superficie será un paraboloide hiperbólico que tiene un plano director paralelo al plano vertical que acabamos de indicar.

Si consideramos un plano vertical paralelo cualquiera, éste cortará al paraboloide según una generatriz ab (fig. 1) y á la superficie del camino según una recta AB paralela á su eje. Si Aa y Bb son las trazas sobre el plano vertical considerado de los planos que determinan los dos perfiles, las longitudes Aa y Bb serán las cotas rojas de los puntos a y b.

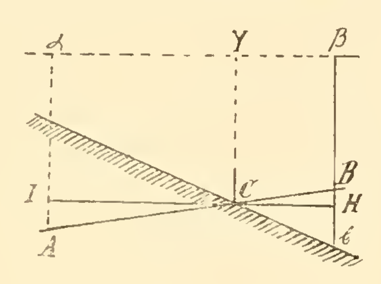


Figura 1.

El punto c, cuya cota roja es nula, será un punto de paso, ó sea el punto de la *línea de paso* que está contenido en el plano vertical considerado.

— Para determinar la posición de los puntos asi obtenidos sobre el

terreno y sobre el proyecto, tracemos por el punto conocido c la horizontal IH, y por virtud de la semejanza de los triángulos Aca y Bcb se tendrá:

$$cI : cI + cH = Aa : Aa + Bb$$

ó

$$cI : IH = Aa : Aa + Bb;$$

y llamando x la distancia incógnita del punto de paso al plano del primer perfil, por d la distancia IH, y por c' y c'' las cotas rojas de los puntos a y b,

$$x : d = c' : c' - c'';$$

de donde

$$x = d \, . \, \frac{c'}{c' - c''}.$$

— Si se hace variar la posición del plano vertical paralelo al eje de el camino, se obtendrán tantos puntos cuantos se quieran de la línea y será ya fácil trazar la proyección horizontal de esta línea.

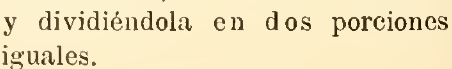
—Véanse, entre otras, las obras *Cours de Routes et Ponts,* de Mr. Mary; *Cours de Topographie et Géodésie*, de A. Salneuve; *Cours complet de Topographie et de Géodésie*, de Mr. Benoit, y aquéllas de Pelletan, Lallemand, Debauve, Oslet, etc.

Pelecoide.

Del griego *pelekus*, *hacha*.

Definición.—Curva pelecoide es aquella que presenta la forma de hacha.

— Más bien que curva puede considerarse como una figura geométrica, pues resulta formada por un semi-círculo y dos cuadrantes, opuestos por su parte convexa al semi-círculo, sosteniéndole con ella y dividiéndola en dos porciones iguales.



Peraltado.

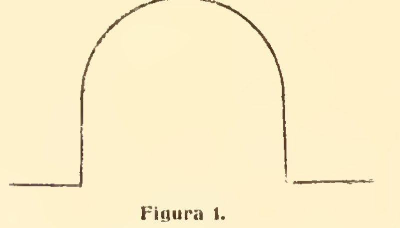


Figura 1.

Definición.—Se llama arco *peraltado* al arco semi-circular prolongado por medio de líneas verticales.

—También puede ser el elíptico con el eje mayor vertical.

Historia.—Bails da á este arco el nombre de *remontado*, y llama

asimismo *peraltado* al arco de herradura; también se le ha llamado *realzado*.

Perfil.

Definición.—En Geometría recibe el nombre de *perfil* la sección producida en una superficie arbitraria por un plano vertical, que á su vez se denomina *plano de perfil.*

— Esta denominación es, sin embargo, más usual tratándose de secciones producidas por planos verticales en superficies topográficas, ó sea en superficies representadas por una serie de curvas horizontales ó de nivel, que lleva cada una la cota que expresa su altura por encima de un plano horizontal de comparación, siendo, por tanto, de estos *perfiles* de los que aquí nos ocuparemos.

— Por extensión, se llama también perfil, en Topografía, á la sección que se obtiene cortando una superficie topográfica por un cilindro cuyas generatrices sean verticales.

Clasificación.—Se distinguen el *perfil longitudinal* y el *perfil transversal.* Así, por ejemplo, cuando sobre una superficie topográfica se hace el trazado de una vía de comunicación de cualquier clase, de un canal, etc., se denomina *perfil longitudinal* á la sección producida á lo largo de la línea que sigue esta vía, canal, etc.; y si perpendicularmente á lo largo de esta línea ó á las curvas que pudiera presentar, se trazan otro ú otros planos de perfil, las secciones obtenidas reciben el nombre de *perfil* ó *perfiles transversales.*

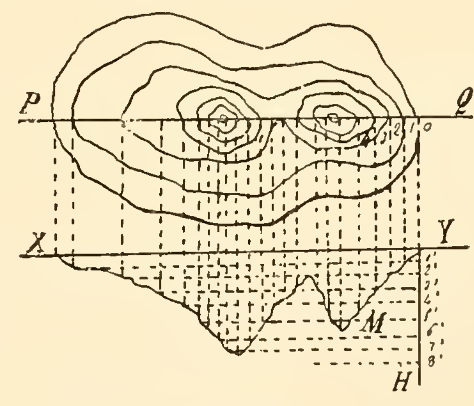


Figura 1.

Trazado de un perfil.—La obtención de esta curva sección es muy sencilla, empleando como superficies auxiliares los mismos planos horizontales de las distintas curvas de nivel.

— Sea S (fig. 1) la superficie topográfica, y PQ la recta traza del plano de perfil; se tendrá la intersección de cada uno de los planos horizontales con el plano secante, y cada recta horizontal así obtenida

cortará á la curva de nivel correspondiente en puntos que pertenecen al perfil buscado; rebatiendo, si es necesario, el plano de esta sección sobre el plano horizontal, se obtendrá la sección rebatida y en su verdadera magnitud. Así, pues, si tomamos como línea de tierra la *XY*, paralela á *PQ*, y sobre una recta *OE*, perpendicular á aquélla, se toma una serie de longitudes iguales que á la escala del plano representen el valor de la distancia de las curvas de nivel entre sí, y si luego, por los puntos de división 1′.2′.3′.4′.5′..... se trazan paralelas á *XY*, éstas serán las proyecciones verticales de las intersecciones del plano secante *PQ* con los planos de las curvas de nivel. Si ahora, por los puntos 1.2.3.4.5......, en que la traza *PQ* corta á las curvas del nivel, se levantan perpendiculares á dicha traza, sus encuentros con las paralelas que corresponden á los puntos 1′. 2′. 3′. 4′. 5′..... nos darán los distintos puntos del perfil que se buscaba.

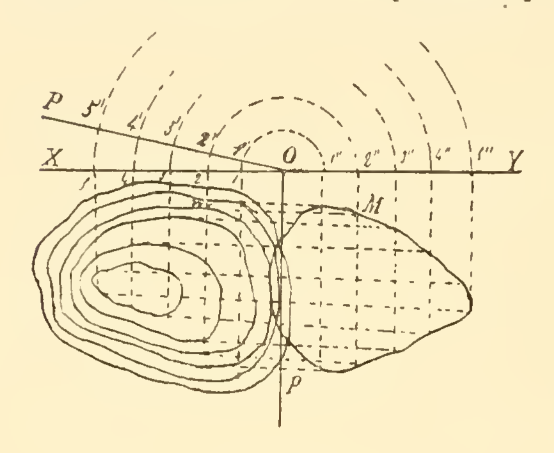


Figura 2.

—Inversamente, si se conoce el perfil rebatido, se podrán deducir los puntos de cota proyectados en la traza del plano perfil, y si trazáramos otros planos perfiles en distintas direcciones, podríamos del mismo modo deducir en cada uno de ellos, bien fuera la curva del perfil cuando se conocen las curvas de nivel, ó bien puntos de las curvas de nivel cuando se conoce la curva del perfil.

También este problema tiene que resolverse muchas veces teniendo en cuenta que el plano secante viene dado por su escala de pendiente. En este caso se toma esta escala por línea de tierra (figura 2); desde el punto 5 se levanta la perpendicular 5 . 5′, igual á cinco veces la longitud, que en la escala del plano representa la distancia de los planos de dos curvas de nivel consecutivas, y se traza 05′, de modo que forme con 05 un ángulo igual á la pendiente del plano secante; luego se dirigen perpendiculares á *XY* por los puntos 0, 1, 2, 3....., que encontrarán á las curvas de nivel de la misma cota en puntos que pertenecerán á la sección buscada, y cuya distancia á la traza *OP* del plano secante estará expresada por las

longitudes 0 . 1′, 0 . 2′, 0 . 3′..... El rebatimiento de la sección se encuentra fácilmente y se representa en el dibujo.

— Si en vez de ser PQ una línea recta, fuera curva, se la tomará por base de un cilindro de generatrices verticales, y desarrollando después este cilindro, la transformada de la intersección será la curva del perfil buscado; y del propio modo que en el caso anterior, cuando se tiene la curva del perfil y la proyección del cilindro vertical en que está situada, se determinan fácilmente en esta proyección los puntos que corresponden á una cota dada.

— Como quiera que, en general, cuando se representa un terreno por medio de curvas de nivel, las alturas de sus diversos puntos son muy pequeñas, con relación á las distancias horizontales, resulta que en los perfiles suelen hacerse poco perceptibles los cambios ó accidentes de la superficie del terreno. Á fin de evitar estos inconvenientes, se adopta para las alturas en los perfiles una escala mayor que la establecida en las distancias, lo cual exagera el relieve del terreno, pero lo hace más sensible á la vista y no presenta inconveniente alguno en las aplicaciones cuando se conoce la relación entre las escalas de alturas y distancias.

— En los perfiles transversales, que ocupan ordinariamente poca extensión, nada impide el adoptar una misma escala para las distancias horizontales y las alturas.

Aplicaciones.—Por medio de los perfiles longitudinal y transversales, se tendrá perfectamente conocida la faja de terreno que sea necesaria para la vía, canal, etc., que trate de construirse, y pueden ejecutarse los cálculos y demás indispensable para la obra á realizar.

— Se pueden consultar á estos efectos, entre otras obras, el *Cours de routes et ponts*, de Mr. Mary, y los tratados de Topografía de A. Salneuve, Benoit, Lalobre, etc.

Perfil de Rondelet.—(Ver *Trasdós.*)

Perfil en longitud de una corriente.

Definición.—Cuando en Hidráulica se considera el movimiento permanente de un canal descubierto, se establece la ecuación diferencial de dicho movimiento, haciendo $\frac{dp}{ds} = 0$ en la ecuación general:

$$\frac{dz}{ds}ds - \frac{1}{\pi}\frac{dp}{ds}ds = \frac{X}{\omega}B_1 U^2 ds + \alpha'\frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2g}\right)ds$$

(Traité d'Hydraulique, M. A. Graëff, t. I, pág. 278) y la ecuación

$$\frac{dz}{ds} = \alpha'\frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2g}\right) + \frac{X}{\omega}B_1 U^2 \qquad (1)$$

contando las z de alto á bajo, á partir de un plano horizontal superior, y las s sobre la curva intersección de la superficie libre del canal con el cilindro vertical, cuyas generatrices pasan por su eje; es la curva llamada *perfil en longitud de la superficie de la corriente.*

Historia.—La ecuación del movimiento permanente variado de las aguas en los canales descubiertos fué establecida por vez primera por Mr. Bélanger, *Essai sur le mouvement permanent des eaux courantes* (1828), y Poncelet, en su *Cours á l'Ecole d'application de Metz.* El mismo objeto fué tratado por Navier, por Vauthier y por Coriolis. También se pueden consultar las obras de Mr. Dupuy, *Sur le mouvement des eaux courantes*; de Mr. Saint-Venant, *Formules et tables nouvelles pour les eaux courantes (Annales des Mines.*— T-XX-1851), y la de Mr. Bress, *Cours de Mécanique appliquée*, en la cual se encuentra una interesante discusión relativa á esta línea.

Ecuacion.—Sustituyendo en la ecuación (1) por $\frac{X}{\omega}$ la expresión $\frac{1}{R_m}$, siendo R_m el radio medio $\frac{\omega}{X}$, se la puede escribir bajo la forma:

$$dz = \frac{\alpha' U \,.\, dU}{g} + \frac{B_1 U^2}{R_m}ds \qquad (2)$$

y esta ecuación es la ecuación diferencial de la curva del perfil en longitud de la superficie de la corriente, referida á las coordenadas z y s.

Otra forma de la ecuación.—Sea GF la línea de fondo (fig. 1) del perfil en longitud del curso de agua; AD una línea trazada de manera que se tenga *sección* AG = *sección* DF, si i es la pendiente de la recta AD; se tendrá en este supuesto

$$dz = i ds - CD,$$

y como

$$CD = \frac{d \,.\, \omega}{l}; \quad dz = i ds - \frac{d\omega}{l};$$

además se tiene

$$U = \frac{q}{\omega} \quad ó \quad U \,.\, dU = - \frac{U^2}{\omega} d\omega.$$

así, pues, la ecuación (2) vendrá á ser;

$$\frac{1}{l} \cdot \frac{d\omega}{ds} = \frac{i - \frac{B_1 U^2}{R_m}}{1 - \frac{\alpha' U^2 l}{g \omega}},$$

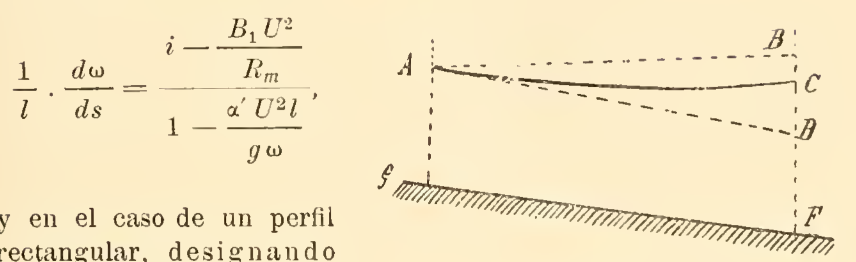


Figura 1.

y en el caso de un perfil rectangular, designando por h la ordenada CF, se tendrá $\omega = lh$; y, por tanto,

$$dh = \frac{i - \frac{B_1 U^2}{R_m}}{1 - \frac{\alpha' U^2}{g h}} \qquad (3)$$

Esta ecuación es la ecuación diferencial del perfil en longitud de la superficie de la corriente referida á las coordenadas h y s, é integrada, nos daría inmediatamente la curva del perfil en longitud; pero habrá que tener presente que esta ecuación sólo conviene al caso en que el perfil en traviesa tiene la forma rectaugular y es de pendiente y longitud constantes.

Forma de la curva.—Supongamos en estas circunstancias que el numerador de la ecuación (3) se anula, lo cual tendrá lugar si

$$R_m i = B_1 U^2;$$

es decir, en el caso del movimiento uniforme. Entonces $\frac{dh}{ds} = 0$; y, por consiguiente, $h =$ *constante;* deduciéndose de aquí que el perfil de longitud será una línea recta paralela á la del fondo.

Si H representa la altura del régimen uniforme del canal en el

cual se verifica un cambio de sección por causa del establecimiento de una obra en dicho canal, $\frac{dh}{ds}$ será positivo, dando lugar á un remolino de elevación si $h > H$; y $\frac{dh}{ds}$ será negativo, dando lugar á un remolino de depresión, si $h < H$.

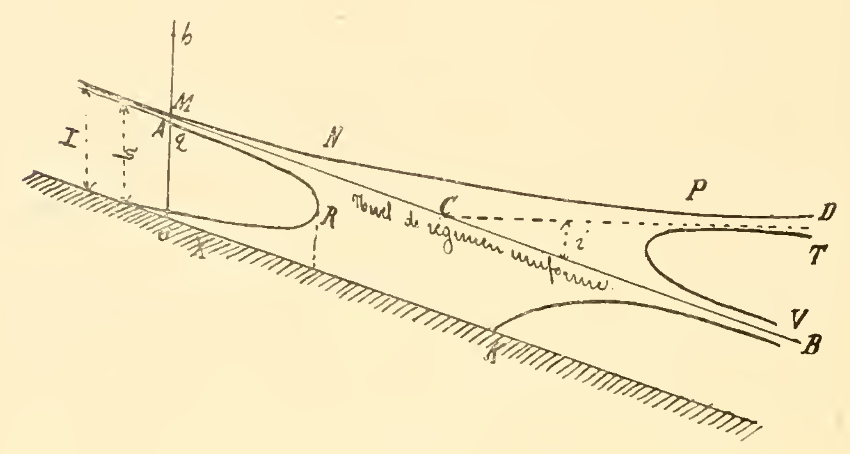


Figura 2.

Para cualquiera de estos dos supuestos puede ser $U \gtrless \sqrt{\frac{gh}{\alpha'}}$.

Para el primero, si $U > \sqrt{g\frac{h}{\alpha'}}$, la curva presentará la forma MNP (fig. 2), y tiene por asíntotas la línea AB y una horizontal, CD, cuyo ángulo, con esta línea, tiene por seno i, y la línea queda referida á la OK de fondo, tomada por eje de las z, y á la Oh, que le es perpendicular, tomada como eje de las h; y si $U > \sqrt{g\frac{h}{\alpha'}}$, en este caso la curva presenta la forma UT, cuya asíntota es CD.

Para el segundo, si $U > \sqrt{g\frac{h}{\alpha'}}$, la curva toma la forma KB, que conviene á un régimen con tendencia á la uniformidad; y si $U < \sqrt{g\frac{h}{\alpha'}}$ toma la forma QR, que tiene por asíntota la línea de nivel de régimen uniforme, y termina bruscamente, aguas abajo de

R, por una tangente perpendicular al eje de las s ó á la línea de fondo OK, paralela á AB en un punto R, para el cual se tenga
$U=\sqrt{g\frac{h}{\alpha'}}$.

— Si á las condiciones $U>\sqrt{g\frac{h}{\alpha'}}$ y $h<H$ se une la de que
$\frac{dh}{ds}>o$, la ecuación (3) no representa nada, por no poder esta ecuación satisfacer á la vez las expresadas tres condiciones, encontrándose en el caso que en Hidráulica se llama *resalto superficial.*

Aplicaciones—Como en la práctica el caso más general es aquel en que la forma de la sección, y sobre todo la pendiente del fondo, son variables, resulta que la ecuación general (2) no es aplicable, y de aquí que se haya echado mano de una porción de hipótesis y artificios que hacen no se pueda llegar á obtener dicha ecuación en forma integrable, siendo notable entre todos los sistemas seguidos para llegar á la integración aquel que sigue Mr. Bress en su obra de Hidráulica ya citada, y que consiste en partir de una ecuación diferencial en z y h, que le permite determinar s por la relación

$$dz = ids - dh.$$

Pericáustica.

Definición.—Curva que viene á ser la imagen entera de la cáustica vista desde el punto luminoso, por reflexión, sobre la curva dada ó expósita.

Historia.—La denominación y circunstancias de esta curva se debe á Jacobo Bernouilli: *Lineæ cycloidales, evolutæ, antevolutæ, cáusticæ, anticáusticæ, pericáusticæ. — Earum usus et simplex relatio ad se invicem.*

Trazado.— Para trazar esta curva, Bernouilli manifiesta que se deben prolongar los rayos incidentes, por cima de la expósita (ver esa voz), una longitud igual á la porción de rayo reflejado que está comprendida entre la expósita y su cáustica (ver esta voz). La extremidad de la prolongación describe la pericáustica.

Periferia.

Del griego περιφέρεια.

Definición.—Se denomina *periferia* al término ó contorno de una figura curvilínea regular.

Dícese ordinariamente del círculo. Así, *la periferia del círculo es la circunferencia.*

Perímetro.

Definición.—Línea contorno que limita una figura plana.

Historia.—Ya algunos sofistas griegos, ocupándose de estas líneas, pretendieron demostrar que las superficies de igual perímetro debían encerrar la misma área, lo cual, como sabemos, no es cierto.

Particularidades.—El perímetro del círculo es la circunferencia. Siendo limitada el área del círculo, se suelen confundir las voces *circunferencia* y *círculo*, lo cual que si fuera como la hipérbola, parábola, etc., no se confundirían; pues las áreas de estas curvas, siendo indefinidas, sus nombres sólo á las curvas se refieren; por tanto, para que, con respecto á todas las curvas, se precisen sus nombres diferentemente de sus áreas, se deberá hablar sólo de círculo ó servirse de esta palabra, cuando se trate únicamente de la superficie envuelta por la circunferencia, y no cuando de propiedades de esta curva.

— En Hidráulica se dice *perímetro mojado* á la línea intersección del curso de una corriente de agua por un plano perpendicular á su dirección.

Periplegmática.

Curva considerada por Hugo Gylden en su obra *Sur la théorie analytique des planètes.*

Perla indiana.

Definición.—Se da este nombre á la curva lugar de los pies de las perpendiculares trazadas desde el vértice de un ángulo recto sobre una recta de longitud constante, que resbala sobre los lados de este ángulo.

Ecuación.—Si $BC=a$ (fig. 1), siendo Ox y Oy los ejes coordenados, su ecuación cartesiana es:

$$(x^2+y^2)^3-a^2x^2y^2=0,$$

y en coordenadas polares:

$$\rho=\frac{a}{2}\,\text{sen}\,.\,2\omega.$$

Propiedades.—Si ω varía de o á $\frac{\pi}{4}$, el valor de ρ crece constantemente, y siendo la curva simétrica respecto de los ejes y de las

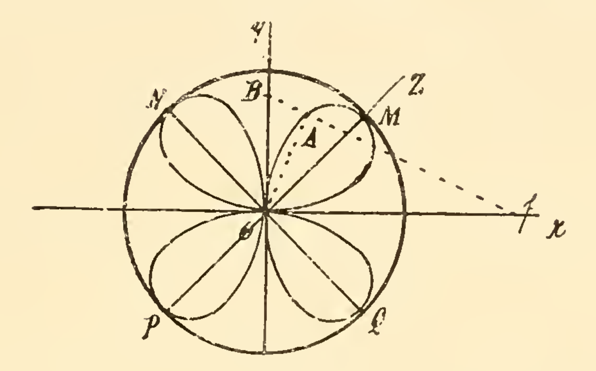


Figura 1.

bisectrices de éstos, bastará construir la parte que corresponde á la variación de o á $\frac{\pi}{4}$ para obtener toda la curva, que serán cuatro perlas, ó bien una rosa de cuatro perlas indianas.

— La tangente en un punto se construye fácilmente, por ser

$$\text{tg}\,.\,V=\frac{1}{2}\,\text{tg}\,2\omega.$$

— Las tangentes paralelas á los ejes coordenados se determinan por medio de la relación

$$\text{tg}\,.\,V=\cot\,.\,\omega,$$

que nos da

$$\frac{\text{tg}\,.\,\omega}{1-\text{tg}^2\omega}=\frac{1}{\text{tg}\,.\,\omega},\quad \text{de donde } \text{tg}^2\,\omega=\frac{1}{2};$$

y el ángulo, ω que corresponde á esta igualdad, así como el valor correspondiente de ρ, se determina por medio de construcciones sencillísimas.

— Esta curva es la podar del vértice del ángulo XOY de la curva, representada por la ecuación

$$u^2 + v^2 = 4b^2u^2v^2.$$

Trazado.—Para su trazado se emplea el siguiente procedimiento: se trazan dos rectas que se corten perpendicularmente, y sobre éstas, un cuadrado, cuyos vértices estén en dichas rectas; si un lado de este cuadrado se mueve resbalando sobre los lados del ángulo, de modo que sus extremos no salgan de las diagonales, y desde el centro del cuadrado se trazan perpendiculares á estas posiciones, sus puntos de encuentro determinan, uniéndose, una curva ovoidal que termina en punta, y continuando la construcción con los cuatro lados, las cuatro ramas iguales y simétricas que forman la curva buscada.

Perlas de Sluse.

Estas líneas tienen por ecuación general

$$a^{p+q-r}\, y^r = x^p\,(a-x)^2,$$

y han sido estudiadas por Huygens, por invitación hecha á éste y á Pascal (que les dió el nombre de perlas) en diferentes cartas fechadas en los años 1657 y 58.

— Entre estas líneas se encuentran las curvas

$$a^2 y = x^2 (a - x), \qquad (1),$$

$$x^4 - ax^3 + b^2 y^2 = o \qquad (2),$$

$$ax^3 - x^4 = y^4 \qquad (3),$$

y la indiana. (Ver esta voz.)

— La primera (1) la estudió Huygens en todos sus detalles y es una cúbica con centro, el cual es punto de inflexión de la curva y tiene por coordenadas

$$x = \frac{a}{3}, \quad \text{y} \quad y = \frac{2a}{27}.$$

También se la nombra parábola de Wallis.

— La segunda (2) es la *piriforme*. (Ver esta voz.)
— La tercera (3) no ha recibido denominación especial.

Perpendicular á la meridiana.

Definición.—El plano del primer vertical corta el horizonte según una línea, que se llama *perpendicular á la meridiana* del lugar.

Propiedades.—Si la tierra fuera esférica, esta curva sería la intersección de la superficie terrestre por el plano vertical perpendicular al meridiano, es decir, que ella sería un gran círculo de la esfera, el cual cortaría al ecuador en dos puntos diametralmente opuestos, á 90° de distancia en longitud y á un lado y otro del meridiano del lugar de partida.

— Considerada la tierra como un esferoide, esta curva es de doble curvatura.

— Esta línea es distinta de la paralela al ecuador, si bien ambas curvas están en planos perpendiculares al meridiano del lugar de partida; pero un paralelo es perpendicular á todos los meridianos, mientras que la curva de que nos ocupamos se separa, tanto más, del paralelo, cuanto más se aleja del meridiano.

Su trazado se hace como aquel de la meridiana (ver esta voz), y puede consultarse, para más particulares, la *Géodésie,* de Francoeur, y el *Connaissance des Temps* (1828), de Mr. Puissant.

Pippianna.

Denominación propuesta por Cayley para la curva que Cremona llamó luego *cayleiana.* (Ver esta voz.)

Piriformes.

Definición.— Curvas que afectan la forma de un simple *fólium,* presentan un eje de simetría y un punto de retroceso y corresponden á la ecuación

$$x^4 - ax^3 + b^2y^2 = 0,$$

en la cual a y b representan magnitudes dadas. Es una *perla de Sluse* (ver esta voz), á la que Huygens, en carta á Sluse en 22 de Enero de 1658, dió este nombre.

Historia.—Estas curvas han sido objeto de diferentes trabajos, pudiéndose señalar, entre otros, los siguientes: de Brocard, *Nouvelle Correspondance mathématique* (T. VI, págs. 91, 121, 213; 1880), y *Mathésis* (T. III, págs. 23, 116, 191; 1883) y (T. V, pág. 227); de J. Mister, *Mathésis* (1881, págs. 78 y 128); de O. Bonnet, *Nouvelles Annales* (pág. 75, 1844), pudiéndose ver también *Guide Meunier* (tomo I, página 329).

Generación.— Si consideramos un círculo y dos diámetros rectangulares, AB, CD, y efectuamos la construcción (1, 2, 3), se obtendrá un punto I. El lugar de estos puntos es una piriforme. La ecuación del lugar geométrico descrito por este punto se obtiene tomando por eje de las x el diámetro AB y por eje de las y la tangente en A al circulo O, y haciendo $IAB = \alpha$, $AH = b$, $AB = a$, y se tendrá:

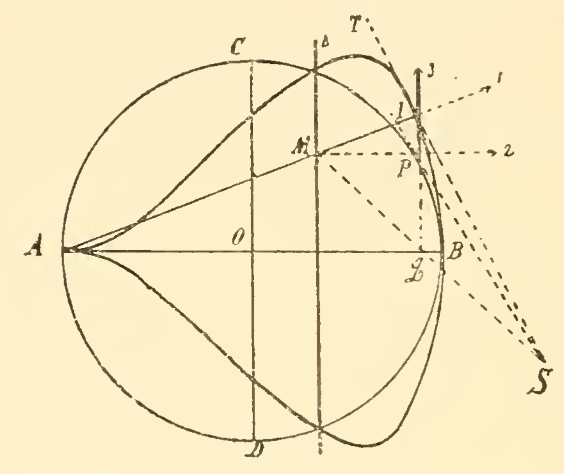


Figura 1.

$$\overline{PQ}^2 = \overline{MH}^2 = x(a - x)$$

ó

$$b^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = x(a - x);$$

de donde

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha;$$

el lugar del punto I corresponde, pues, á la ecuación

$$b^2 y^2 = x^3 (a - x) \tag{1}$$

y afecta la forma indicada en la figura.

Propiedades.— Las piriformes son curvas proyectivas, pues si se transforma la ecuación (1) por medio de las fórmulas

$$by = aY \qquad x = X,$$

se tiene

$$a^2Y^2 = X^3(a - X), \tag{2}$$

que representa una piriforme particular que estudió O. Bonnet suponiendo $a = 1$; y si a varía, todas las curvas (2) son homotéticas.

— Las curvas (1) se deducen todas, por la vía proyectiva, de una curva (2), suponiendo que b varía y que a tiene el mismo valor en (1) y en (2).

— Los puntos de inflexión de (2) tienen por coordenadas

$$X = a\,\frac{3-\sqrt{3}}{4}, \quad Y = \pm\frac{a}{8}\sqrt{6\sqrt{3}-9};$$

para una piriforme cualquiera los puntos de inflexión están dados por las expresiones

$$x = a\,\frac{3-\sqrt{3}}{4}, \quad y = \pm\frac{a^2}{8b}\sqrt{6\sqrt{3}-9}.$$

— Los puntos más altos tienen para valor de sus coordenadas:

$$x = \frac{3a}{4}, \quad y = \frac{3a^2\sqrt{3}}{16};$$

para la curva (2) y para una piriforme cualquiera:

$$x = \frac{3a}{4}, \quad y = \frac{3a^2\sqrt{3}}{16\,.\,b}.$$

Cuadratura.—Mr. O. Bonnet ha demostrado, para la piriforme (2), que el área de dicha curva es la mitad de la del círculo generador.

Para una piriforme cualquiera el área se obtiene multiplicando la de (2) por la relación $\frac{a}{b}$; por consiguiente, se puede decir que el

área total de una piriforme cualquiera, representada por la ecuación (1), es igual á $\frac{\pi a^3}{8b}$.

Tangente.—La figura determina el medio de hacer el trazado de la tangente en un punto cualquiera I de la curva.

— La piriforme de ecuación

$$x^2y^2 - 2a^3y + a^4 = 0$$

ha recibido la denominación especial de *apianna* y presenta dos ramas infinitas, asíntotas al eje de las x.

Longchamp. *Cours de Problèmes.* T. II, pág. 393.

Plana.

Definición.—Se da el nombre de *curva plana* á la que tiene todos sus puntos en un mismo plano.

Clasificación.—Se dividen ordinariamente en dos clases: las curvas *algebraicas* ó *geométricas* y las curvas *transcendentes* ó *mecánicas*. Las primeras son aquellas para las cuales la relación entre la abscisa y la ordenada está expresada por medio de cantidades algebraicas ordinarias; las segundas son las que en sus ecuaciones comprenden cantidades transcendentes.

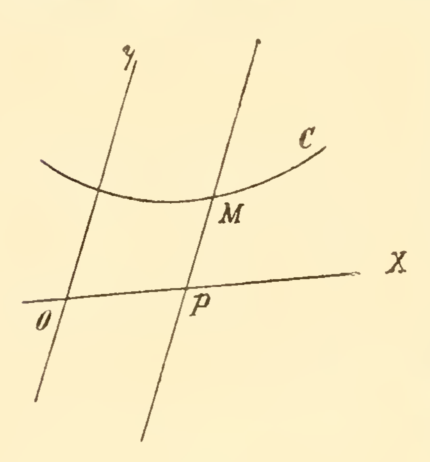


Figura 1.

Mr. Móbius *(Ueber die grundformen der Linien der dritten Ordnung)* clasifica las curvas planas, en *curvas planas de primera especie*, aquellas cuya proyección esférica es *simple* (ver esta voz), y de *segunda especie*, aquellas cuya proyección esférica es *geminal* (ver esta voz).

Historia.—El estudio de las curvas planas por medio de sus ecuaciones es debido á Descartes, que determinó los fundamentos de la Geometría analítica, de la cual nació más tarde la Geometría sintética, adquiriendo la excepcional importancia de que hoy goza entre las diferentes ramas de las ciencias matemáticas. (Ver *Algebraicas.)*

Ecuación.—Si consideramos en un plano una línea C (fig. 1), y trazamos en este plano un sistema cualquiera de ejes coordenados Ox, Oy; tomando sobre el eje de las x un punto cualquiera, P, y trazando por este punto una paralela al eje de las y, esta recta encontrará á la curva en uno ó diversos puntos, tales como el M. Este punto M tendrá á OP como abscisa y á PM como ordenada. Así, pues, conociendo la abscisa de un punto de la curva se podrá determinar la ordenada correspondiente. Esta ordenada puede, por tanto, considerarse como una función de la abscisa, tomada como variable independiente.

Cuando los diferentes puntos de esta curva gozan de una misma propiedad geométrica, se puede, en general, traducir algebraicamente esta propiedad, que posee un punto de ella, por una relación entre las coordenadas de este punto, relación que conserva la misma forma cualesquiera que sea el punto considerado.

Sea

$$f(x,y) = 0$$

esta relación de forma constante. Esta es la ecuación de la curva C.

Así, pues, una línea plana puede estar representada, en general, por una ecuación entre las coordenadas de uno cualquiera de sus puntos, é inversamente, una ecuación, $f(x,y) = 0$, entre las coordenadas x é y, representa, en general, una curva.

La *ecuación de la tangente* en un punto cuyas coordenadas sean (X, Y), será dada por la expresión

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x),$$

y si se reemplaza $\frac{dy}{dx}$ por su valor obtenido de la ecuación de la curva, será:

$$Y - y = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}(X - x)$$

ó

$$\frac{df}{dx}(X - x) + \frac{df}{dy}(Y - y) = 0.$$

Esta ecuación conserva la misma forma aunque sea oblicuo el sistema de los ejes coordenados.

Si la ecuación de la curva está dada en coordenadas polares, en cuyo caso tiene la forma

$$f(r, \theta) = 0,$$

y representamos por μ el ángulo OMT (fig. 3), se tendrá para la tangente:

$$\text{tg} . \mu = \frac{r . d\theta}{dr};$$

siendo

$$\cos . \mu = \frac{dr}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}} \quad \text{y} \quad \text{sen} . \mu = \frac{r . d\theta}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}}.$$

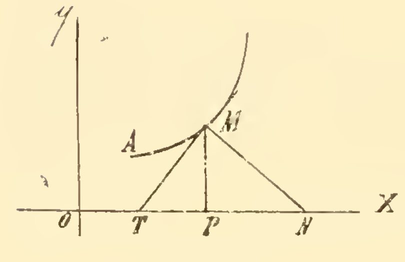


Figura 2.

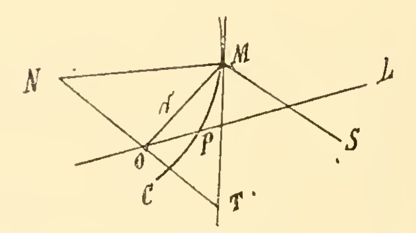


Figura 3.

La *sub-tangente* $S_t = PT$ tiene por expresión (fig. 2)

$$S_t = \frac{y dx}{dy},$$

y en coordenadas polares (fig. 3),

$$OT = r . \text{tg} . \mu = \frac{r^2 d\theta}{dr}.$$

La *normal* MN tiene por ecuación:

$$Y - y = - \frac{dx}{dy} (X - x).$$

y si los ejes son oblicuos y forman un ángulo θ, será:

$$Y-y=-\frac{dx+dy\,.\cos.\theta}{dy+dx\,.\cos.\theta}(X-x).$$

La *sub-normal* valdrá

$$S_n=PN=\frac{ydy}{dx},$$

y en coordenadas polares,

$$S_n=ON=\frac{dr\,.}{d\theta}.$$

— La longitud MT de la tangente tiene por valor

$$MT=y\sqrt{1+\frac{dx^2}{dy^2}},$$

y la de la normal,

$$MN=y\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Problemas sobre las tangentes. — «Dada una curva, trazarla una tangente desde un punto exterior $(a,\ b)$.»

Se tendrá, para determinar las coordenadas incógnitas x é y del punto de contacto, por una parte, la ecuación de la curva

$$f(x,y)=0,$$

y por la otra,

$$a\frac{df}{dx}+b\frac{df}{dy}=\frac{df}{dx}x+\frac{df}{dy}y,$$

obtenida poniendo a y b, en lugar de X é Y, en la ecuación de la tangente.

Los valores de x é y, obtenidos por medio de estas dos ecuaciones, determinarán las coordenadas del punto de contacto.

«Trazar una tangente, paralela á una recta dada de ecuación $Y=aX$.»

La ecuación de la tangente buscada será

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x),$$

y se deberá tener

$$\frac{dy}{dx} = a,$$

ecuación que, juntamente con la de la curva, determinarán las coordenadas del punto de contacto.

Concavidad y convexidad de las curvas.—Según que y y $\frac{d^2y}{dx^2}$ sean del mismo signo ó de signos contrarios, la curva se demuestra es convexa ó cóncava en un punto M con respecto al eje de las abscisas, si el ángulo de las partes positivas de los ejes no es mayor que un ángulo recto. En el caso de que este ángulo es obtuso, se cambia el signo de una de las coordenadas; lo que viene á hacer agudo el ángulo de las coordenadas positivas, y, por tanto, se aplicará la misma regla.

Area de las curvas planas.—El área comprendida entre una curva plana, CM (fig. 4); una ordenada fija, CA; otra ordenada cualquiera, MP, y el eje de las abscisas Ox, es una función de la abscisa $OP = x$ del punto M, puesto que ella varía cuando se cambia el signo de P.

Su diferencial tiene por expresión, siendo $CAMP = n$,

Figura 4.

$$y = \frac{dn}{dx} \quad \text{ó} \quad dn = ydx;$$

si los ejes, en lugar de ser rectangulares, forman un ángulo θ, la diferencial del área será

$$dn = y \,.\, dx \,.\, \text{sen} \,.\, \theta.$$

En coordenadas polares, siendo n el sector POM (fig. 3), se tendrá:

$$dn = \frac{1}{2} r^2 d\theta.$$

Arco de curva.—La diferencial de un arco de curva, ds, tiene por expresión, en coordenadas cartesianas,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

y en coordenadas polares,

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}.$$

Radio de curvatura.—Tomando x por variable independiente, la expresión del radio de curvatura es

$$\rho = \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}},$$

y si x é y son funciones de otra variable, t, el valor de ρ, considerando en él las variables x é y, tomadas con relación á t, considerada como independiente, será:

$$\rho = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx d^2 y - dy d^2 x}.$$

Su expresión, en coordenadas polares, es:

$$\rho = \frac{\left(r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\frac{dr^2}{d\theta^2} - r\frac{d^2 r}{d\theta^2}},$$

é introduciendo, en lugar del radio vector ρ, su inverso $r = \frac{1}{n}$, afecta la forma

$$\rho = \frac{\left(n^2 + \frac{dn^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{n^3\left(\frac{n + d^2 n}{d\theta^2}\right)}$$

Curvatura de las curvas planas. — Consideremos la curva $CMM'D$ (figura 5). Tomemos un punto C, fijo, sobre esta curva, y sean $CM = s$, $MM' = \Delta s$, τ el ángulo MTx y τ' el ángulo $M'T'x$.

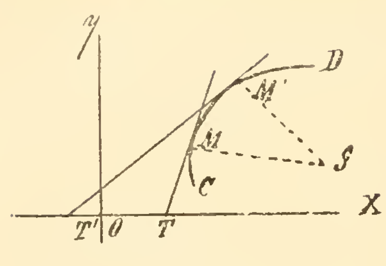


Figura 5.

La relación $\frac{\Delta\tau}{\Delta s}$ se llama *la curvatura media* del arco MM', y se da el nombre de *radio de curvatura media* al radio de un círculo en el cual las tangentes trazadas á los extremos de un arco igual á Δs forman entre sí un ángulo igual á $\Delta\tau$. El radio de este círculo es $\frac{\Delta s}{\Delta\tau}$.

Cuando el punto M' se aproxima indefinidamente á M, la relación $\frac{\Delta\tau}{\Delta s}$ converge hacia $\frac{d\tau}{ds}$, que es la *curvatura de la curva en el punto M.* Si consideramos un círculo que tenga igual curvatura y cuyo radio sea ρ, se tendrá:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\tau}{ds} \quad \text{ó} \quad \rho = \frac{ds}{d\tau}.$$

Tomando sobre la parte interior de la normal una longitud $KM = \rho$, el círculo descrito desde el punto K como centro, con MK por radio será el *círculo de curvatura* (ver esta voz), y el radio y el centro de este círculo serán el *radio y el centro de curvatura* correspondiente al punto M.

— El círculo de curvatura es el mismo que el círculo osculador (ver esta voz).

Evolutas.—Ver el articulo correspondiente.

Angulo de contingencia.—Se llama *ángulo de contingencia* el ángulo $d\tau$ formado por las tangentes trazadas á los extremos de un arco de curva infinitamente pequeño.

En virtud de esta definición, se puede decir que *la curvatura de una curva en un punto es igual al ángulo de contingencia dividido por la diferencial del arco.*

Aplicaciones.—La teoría general de las curvas planas, cuyo desarrollo especial se puede ver en la infinidad de obras que sobre las mismas se han escrito, forma una de las ramas más importantes de

las ciencias matemáticas, pudiendo decir que todo su desarrollo tiende á la resolución de los dos grandes problemas siguientes:

1.° Encontrar la ecuación de una curva, conociendo su forma y sus propiedades características; y

2.° Dada la ecuación de una curva, determinar su forma y encontrar sus principales propiedades.

Podares.

Definición.—Se llaman *podares* á las líneas que se obtienen proyectando un punto fijo sobre las tangentes de una curva.

Si, pues, tenemos una curva cualquiera, Δ, y desde un punto fijo, O, bajamos una perpendicular, OI, sobre la tangente T de Δ, el lugar de este punto I, cuando T resbala sobre una curva propuesta, F es

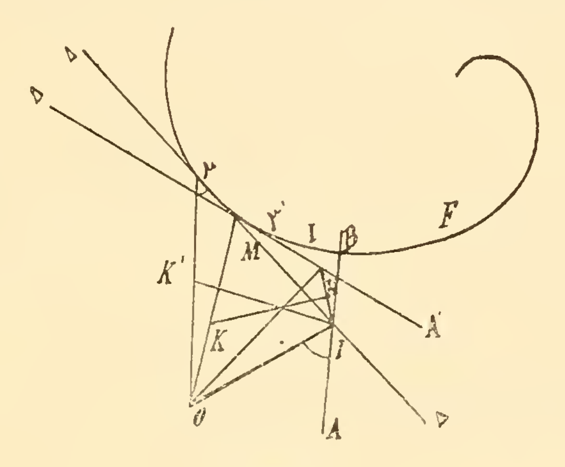


Figura 1.

una *podar* de esta curva, que se denomina ahora *antipodar* de la F, y también *podar inversa* ó *podar negativa.*

Historia.—Mr. Dandelin se ocupa de estas curvas (*Nov. Mémoires Acad. de Bruxelles*, T. IV), considerando como línea propuesta una cónica, y las da el nombre de lemniscatas. Los alemanes las designan por una sola palabra, que significa curva *de los pies de las perpendiculares*, y los franceses le dan el nombre de *podaires*. Puede consultarse sobre ellas: *Journal Liouville* (T. X, pág. 314), *Nouvelles Annales* (T. VII, pág. 289), y los tratados de *Geometría Analítica*, de Longchamps (páginas 33 y 432); Pruvost (pág. 149), etc.

Ecuación.—La ecuación tangencial nos da la solución general del problema de las podares. Sea

$$\varphi(u, v) = 0 \tag{1}$$

la ecuación tangencial de una curva, y

$$ux + vy + 1 = 0 \tag{2}$$

la ecuación de una cualquiera de sus tangentes.

Sea (α, β) el punto desde el cual se dirige la podar. La ecuación de la proyectante de este punto sobre la recta (2) será:

$$v(x - \alpha) - u(y - \beta) = 0;$$

la podar quedará, pues, definida por las tres ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} v(x - \alpha) - u(y - \beta) &= 0 \\ ux + vy + 1 &= 0 \\ \varphi(u, v) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

entre las cuales se debe eliminar u y v.

Haciendo

$$x(x - \alpha) + y(y - \beta) = p,$$

la ecuación de la podar se podrá escribir:

$$\varphi\left(\frac{\alpha - x}{p}, \quad \frac{\beta - y}{p}\right) = 0.$$

Casos particulares.—Polar de foco con relación á una cónica.—Coloquemos el origen en el foco que se proyecta; la ecuación tangencial de la cónica es, en este caso,

$$u^2 + v^2 + 2du + 2ev + f = 0;$$

una tangente cualquiera tendrá por ecuación

$$ux + vy + 1 = 0;$$

la proyectante del origen será

$$vx - uy = 0,$$

y la ecuación de la podar será, por consiguiente,

$$(x^2 + y^2)[f(x^2 + y^2) - 2dx - 2ey + 1] = 0,$$

que se descompone en las

$$x^2 + y^2 = 0$$

y

$$f(x^2 + y^2) - 2dx - 2ey + 1 = 0.$$

La primera parte se compone de rectas isótropas, y la segunda es un círculo concéntrico á la cónica dada y que será la recta

$$dx + ey - \frac{1}{2} = 0,$$

cuando la cónica sea una parábola.

— La podar del centro de una hipérbola equilátera es una lemniscata hiperbólica. Esta curva presenta algunas propiedades especiales, y son las siguientes:

Su ecuación es

$$(y^2 + x^2)^2 = a^2(x^2 - y^2),$$

siendo $y^2 - x^2 = - a^2$ la ecuación de la hipérbola equilátera, é

$$yy' - xx' = - a^2$$

la de la tangente.

La curva pasa por el origen, que es un punto doble y es su centro.

El eje de las x y el de las y son dos diámetros:

Por ser

$$Om \times On' = a^2,$$

se verifica, que el semi-eje de la hipérbola es medio proporcional entre la distancia del centro al punto generador de la lemniscata y la distancia del centro al de contacto correspondiente de la hipérbola.

Su ecuación, en coordenadas polares, será

$$\rho = \pm \sqrt{\cos . 2\omega}.$$

Llamando ρ y ρ' los radios vectores de la lemniscata y de la hipérbola correspondientes á un mismo valor de ω, se tiene:

$$\rho = a\sqrt{\cos . 2\omega} \quad \text{y} \quad \rho' = \frac{a}{\sqrt{\cos . 2\omega}},$$

de donde

$$\rho\rho' = a^2;$$

por tanto, el semi-eje de la hipérbola es medio proporcional entre

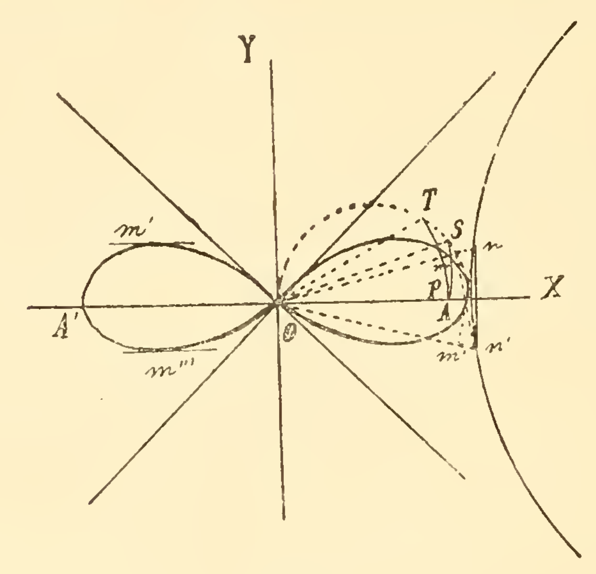


Figura 2.

los radios vectores de la lemniscata y de la hipérbola, que forman el mismo ángulo con el eje de las x.

Si se describe una semi-circunferencia sobre el semi-eje de la hipérbola como diámetro, «el radio vector de la lemniscata es medio proporcional entre el semi-eje y el radio vector dirigido á esta semi-circunferencia, y formando con el eje de las x un ángulo doble del que forma el radio vector de la lemniscata con el mismo eje».

— La lemniscata hiperbólica equilátera es una cassinoidea; curva bifocal. Pero la recíproca no es cierta.

Por último manifestaremos que la línea que venimos describiendo es el caso particular de la evoluta de un círculo sujeto á tener su centro sobre una línea plana dada y tocar á otra línea también dada en su mismo plano.

— El nombre de lemniscata hiperbólica asignado á la curva podar que acabamos de describir ha sido dado por Mr. Serret, y á éste se debe la propiedad de «que la suma y la diferencia de sus arcos son expresados por las funciones elípticas de la primera especie».

— La podar de un círculo, con relación á un punto cualquiera, *o*, situado en su plano, es un caracol de Pascal. En el caso de que el punto *o* está situado sobre la circunferencia, viene á ser una cardioidea.

—La podar del centro de una elipse está representada por la curva *M* (fig. 3), cuya ecuación es

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2,$$

y en coordenadas polares,

$$\rho^2 = a^2 - c^2 \operatorname{sen}^2 . \omega.$$

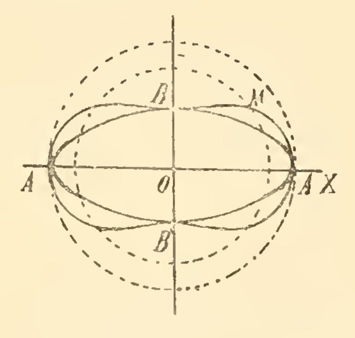


Figura 3.

— La podar del vértice del ángulo *XOY* de la curva representada por

$$u^2 + v^2 = 4b^2u^2v^2$$

es una *rosa de cuatro ramas.*

— La podar del centro de una lemniscata de Bernouilli, cuya ecuación sea

$$\rho^2 = a^2 2\omega,$$

tiene por expresión

$$\rho^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \cos \frac{2\omega}{3}.$$

— La podar del vértice de una parábola es una cisoide, y la del pie de la directriz de la misma curva, una estrofoide recta.

— En general se puede decir que la podar de un punto cualquiera es una línea de cuarto grado, en la que sus términos de cuarto grado forman un cuadrado perfecto.

Tangente.—La tangente en un punto de una podar se construye sencillamente, utilizando la propiedad siguiente:

Consideremos dos tangentes, Δ, Δ', á la curva F, y sean I é I' los pies de las perpendiculares bajadas desde el punto O sobre las rectas que supondremos secantes. Sea M su punto común; el cuadrilátero $OMII'$ es inscriptible, y el centro del círculo circunscrito á este cuadrilátero es el punto medio de OM. La perpendicular HK, elevada en el punto medio de la cuerda II', pasa por el punto K, medio de OM.

Supongamos que Δ' viene á confundirse con Δ; el punto M tendrá por posición límite el punto de contacto μ, de Δ con F; el punto K tendrá por límite el punto K', medio de $O\mu$; y, por último, la recta KH tiene por límite $K'I$. Se deduce de aquí que la tangente en el punto I, á la podar, es la recta AB, recta que forma con el radio vector OI un ángulo igual al que $O\mu$ forma con Δ.

Aplicaciones.— Estas líneas son de gran importancia en Análisis y en Física, especialmente en la teoría de la onda luminosa de Fresnel.

Se llama *autopodar* la línea que es ella misma su propia podar con relación á un punto dado en su plano.

— La sola *autopodar* que se conoce es la espiral logarítmica. *Journal de Liouville.* T. XI, pág. 329.

Polares.

Definiciones.—Cuando una transversal gira alrededor de un punto fijo en el plano de una curva geométrica, el centro de las medias armónicas de los puntos de encuentro de la curva por la transversal, tomada con relación al punto fijo, describe una línea recta. Este centro armónico es dado, para cada posición de la transversal, por la ecuación

$$\Sigma\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_1}\right)=0, \qquad (1)$$

en la que ρ expresa su distancia al polo fijo O, y ρ_1, la distancia del polo á uno de los puntos de encuentro de la transversal y de la curva.

— La recta que describe el centro armónico ha recibido el nombre de *recta polar del polo O* con relación á la curva.

— Por analogía, en lugar de la ecuación (1), se puede escribir la siguiente:

$$\Sigma\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_1}\right)\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_2}\right)=0;$$

el punto variable del cual ρ expresa la distancia al polo fijo O, describe evidentemente una cónica que ha recibido el nombre de *cónica polar* del punto O con relación á la curva.

— En general, se llama *curva polar del orden* K de un punto fijo con relación á una curva geométrica, aquella en que el radio vector ρ, contado á partir de este punto, tomado por origen, está dado por la ecuación del grado K^{mo}.

$$\Sigma\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_1}\right)\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_2}\right)\cdots\cdots\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_k}\right)=0,$$

en la que cada término se compone del producto de K factores tales como $\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_1}\right)$.

— Un punto fijo que nos haya dado $m-1$ curvas polares con relación á una curva geométrica del grado m, se designa por los nombres de:

Primera polar aquella en que el grado es $m-1$.

Segunda polar aquella en que el grado es $m-2$,

y así de las demás.

— Las tres últimas curvas de esta serie descendente serán la *cúbica polar*, la *cónica polar* y la *recta polar* del punto fijo con relación á la curva.

Historia.— Las diferentes polares de un punto con relación á una curva del orden m han sido definidas por primera vez por Mr. Bobillier, *Annales de Gergonne* (T. XVIII). El teorema con que empezamos este artículo es de Mr. Côtes, que forma la base del tratado *De linearum geometricarum propietatibus generalibus* de Mac-Laurin, el cual conoció dicho teorema por haberle encontrado R. Smith, que se lo proporcionó, entre los papeles de Mr. Côtes, después de la muerte de éste. La denominación de *centro de medias armónicas* de que arriba nos servimos es debida á Mr. Poncelet. *Théorie des centres des moyennes harmoniques (Journal de Crelle*, 1828 y 1829). La exposición simple de la teoría por medio de las coordenadas homogéneas tiene por autor á Plüker *(Journal de Crelle*, t. V, 1829). Pudiendo consultarse además las obras siguientes:

Grassmann, *Theorie der Centralen* (Idem, t. XXIV, 1842); Cayley, *Fifth mémoir upon quantics (Philos. Transactions*, t. CXLVIII, 1858);

Jonquieres, *Mémoire sur la théorie des pôles et des polaires (Journal de Liouville*, 1857), y Cremona, *Einleitung in die Theorie der algebraïschen Curven, I.*

Propiedades.—Los puntos dobles de una curva del grado m se encuentran sobre la primera polar de un punto cualquiera del plano.

— Las primeras polares de un punto de un plano con relación á todas las curvas del grado m que pasan por m^2, puntos fijos, pasan todas por $(m - 1)^2$, puntos fijos.

— La última polar de un punto P pasa por los puntos de contacto de las tangentes dirigidas desde este punto á la curva considerada.

Polares concéntricas.

Definición.—Reciben este nombre las curvas que intersectan, sobre los mismos radios vectores, cuerdas superponibles y cuyo centro común sea invariable.

Casos particulares.—Dos círculos descritos con el mismo centro son *polares concéntricos* con relación á todos los puntos de su plano.

— Lo propio sucede para dos elipses concéntricas semejantes y semejantemente dispuestas.

— Una hipérbola y sus asíntotas, y por consiguiente todas las hipérbolas que tienen las mismas asíntotas, gozan de la misma propiedad; los centros de las cuerdas que emanan de un mismo punto permaneciendo invariables.

— Siempre que la curva primitiva es de segundo grado, el lugar de los centros de estas cuerdas se encuentra sobre una curva semejante y semejantemente dispuesta, que pasa por el polo, y que es concéntrica á la sección cónica subdoble; conjunto de condiciones que la hacen determinada.

Polares recíprocas.

Definición.—Existen sobre el plano de una curva una infinidad de sistemas de dos curvas, tales que cada una de las curvas de un mismo sistema, siendo el lugar de los polos de las tangentes de la otra, es al mismo tiempo la envolvente de las polares de los diversos puntos de ella, relativamente á la curva dada. Las dos curvas de un mismo sistema han sido designadas con el nombre de *curvas polares*

recíprocas, así como la curva que les sirve de intermediaria, con el nombre de *directriz* ó *fundamental.*

Historia.—La *Théorie des polaires reciproques* fué presentada por Poncelet á la Academia de Ciencias de París en 1824, y publicada en el *Journal de Crelle*, 1828 y 1829, dando lugar á una polémica muy viva entre su autor por un lado y Gergonne y Plücker por otro, sostenidas más tarde solamente por el primero, que se quería atribuir el principio de la teoría de las polares recíprocas bajo el nombre de principio de dualidad. La Comisión encargada de examinar la Memoria de Poncelet en la Academia la compusieron Legendre, Poinsot y Cauchy.

— En la obra de Poncelet, *Traité des propietés projectives des figures* (tomo II, pág. 57), se expone esta teoría de una manera general, tanto para las curvas como para las superficies.

Mr. Chasles, *Mémoire de Géométrie sur le principe de dualité (Memorias de la Academia de Bélgica* (T. XI), expuso la teoría general de las figuras correlativas, deduciendo como caso particular la de las polares recíprocas.Este autor, en su obra *Mémoire sur la transformation parabolique des relations métriques des figures*, toma por curva auxiliar una parábola.

Entre las obras á consultar sobre esta teoría, señalaremos aquella de A. Maunheim, titulada *Transformation des propiétes métriques des figures à l'aide de la théorie des polaires reciproques* (París, 1857); M. Bacalogln, *Lignes et surfaces reciproques* (1860); de Hermite, *Cours d'analyse* (1873, pág. 383); la de Salmon, *A Treatise on the higher plane curve* (2.ª edición, Section V), etc.

Ecuación.—La ecuación de una de las dos curvas S y S', polares recíprocas, puede deducirse inmediatamente de la de la otra.

Sea $f(x, y) = 0$ la ecuación de la curva directriz, y $F(x, y) = 0$ la de la curva S; la tangente A á esta curva S, en el punto (x, y), estará representada por la ecuación

$$(X - x) F'(x) + (Y - y) F'y = 0; \qquad (1)$$

por otra parte, x é y, siendo las coordenadas del punto a' de la curva S', la polar de este punto, con relación á la curva $f(x, y) = 0$ será

$$x_1 f' X + y_1 f' Y + D Y + E X + 2F = 0. \qquad (2)$$

Identificando estas ecuaciones (1) y (2), ordenadas con relación

á X y á Y, se tendrán dos ecuaciones entre x, y, x_1 é y_1; y si entre ellas y la $F(x, y) = 0$ se eliminan x é y, se tendrá entre x_1 é y_1 la ecuación buscada de la curva S'.

Propiedades.— Los grados de las dos curvas polares recíprocas están íntimamente ligados entre sí; si m es el de S, $m(m-1)$ será el de S', ó, también, el grado de la polar recíproca de una curva cualquiera es igual á la clase de esta curva; es decir, igual al número de tangentes que pueden trazarse á la citada curva desde un punto cualquiera.

— El punto de intersección de dos tangentes á la curva S corresponde á la recta que une los puntos correspondientes de S'.

— Si consideramos el sistema de *coordenadas trilineales*, en el que la posicion de un punto queda determinada por sus distancias á tres rectas fijas, y la de una recta cualquiera queda definida por una ecuación homogénea entre estas distancias, ecuación de la forma

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0;$$

y el sistema de *coordenadas tangenciales*, en el cual la posición de una recta se determina por coordenadas, y la de un punto, por una ecuación de la forma

$$a\lambda + b\mu + c\nu = 0,$$

se podrá decir que, demostrada una propiedad de *posición* (esto es, que no se refiere á magnitudes lineales ni angulares) respecto de una línea en uno de los sistemas trilineal ó tangencial, esta propiedad será susceptible de dos interpretaciones, según que la consideremos como una ecuación en una ú otra especie de coordenadas, correspondiendo, por tanto, otra nueva, que llamaremos *recíproca* de la primera, con sólo tomar como tangenciales las ecuaciones que se han obtenido en coordenadas trilineales, ó como trilineales, si las obtenidas lo han sido en el sistema tangencial.

En consecuencia, todo teorema de *posición* es un doble teorema, deduciéndose el enunciado de uno de ellos del otro, por el simple cambio de las palabras *punto* y *línea;* y estos dos teoremas se demostrarán, interpretando las ecuaciones, bien en coordenadas trilineales ó bien en tangenciales. Así, por ejemplo, si sabemos que un cierto número de puntos de la figura S están en línea recta, deduciremos que las rectas correspondientes de la figura S' serán concurrentes y viceversa. Del propio modo, si varios puntos de S perte-

necen á una cónica, las rectas correspondientes de S' serán tangentes á la curva polar de dicha cónica con respecto á la directriz V; ó más generalmente, si el lugar de un punto cualquiera de la curva S es la curva S', la envolvente de las rectas correspondientes de V será V', polar recíproca de S'.

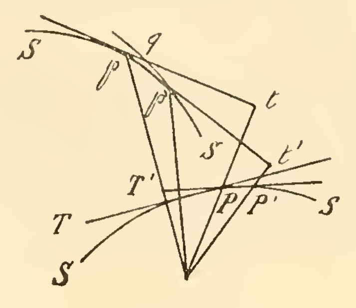


Figura 1.

— Si á dos puntos, P, P' de S (figura 1), corresponden las tangentes pt, $p't'$ de S', las tangentes á S en P y P' corrcsponderán á los puntos p y p' de contacto, y, por consiguiente, que Q, intersección de estas tangentes, corresponderá á la cuerda de contacto pp'. De aqui se deduce que «á un punto cualquiera Q y á su polar PP', con respecto á S, corresponden una recta pp', y su polo q, con respecto á S'».

Para ilustración de este método, ponemos á continuación, á dos columnas, los enunciados de algunos teoremas recíprocos:

— Si en una cónica S inscribimos un hexágono cuyos lados designaremos por A, B, C, D, E, F, los puntos de intersección AD, BE, CF están en línea recta. (Teorema de Pascal.)

— Si se circunscribe á una cónica S' un hexágono cuyos vértices llamaremos a, b, c, d, e, f, las diagonales ad, be, cf se cortarán en un punto. (Teorema de Brianchon.)

— Dos cónicas se cortan, en general, en cuatro puntos.

— Dos cónicas tienen, en general, cuatro tangentes comunes.

— Si dos de los vértices de un triángulo se apoyan en dos rectas fijas, y los trcs lados pasan siempre por tres puntos dados, cl lugar del tercer vértice es una cónica.

— Si dos de los lados de un triángulo pasan por dos puntos fijos, apoyándose los tres vértices en tres rectas dadas, la envolvente del tercer lado será una cónica.

— La polar de un punto fijo con respecto á una cónica circunscrita á un cuadrilátero dado, pasa siempre por un punto fijo.

— El lugar de los polos de una recta fija con respecto á una cónica inscrita en un cuadrilátero dado, es una recta.

— Si por la intersección de dos de las tangentes comunes á dos cónicas, se trazan dos cuerdas

— Si desde dos puntos cualesquiera, tomados en una cuerda común á dos cónicas, trazamos á éstas

cualesquiera, las rectas que unen los extremos de estas cuerdas se cortarán sobre una de las dos cuerdas comunes á las cónicas citadas.

tangentes, las diagonales del cuadrilátero así formado pasarán por una de las dos intersecciones de las tangentes comunes de dichas cónicas.

— Si A, B, C son tres cónicas que tienen un contacto doble con S, y si A y B son tangentes á C, las tangentes en los puntos de contacto se cortarán sobre una de las cuerdas comunes de A y B.

— Si A, B, C son tres cónicas que tienen un contacto doble con S, y si A y B son tangentes á C, la recta que une los puntos de contacto pasará por la intersección de dos de las tangentes comunes á A y B.

Casos particulares. — En lo supuesto hemos considerado que la curva *directriz* fuese una cónica cualquiera; consideremos ahora los casos en que esta curva sea un círculo ó una parábola.

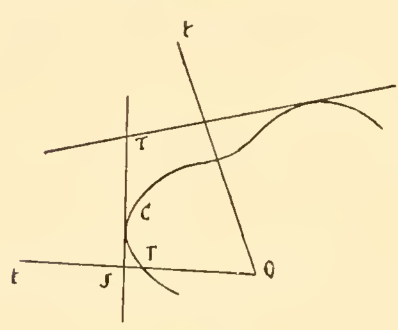


Figura 2.

Primer caso.—Supongamos que al hablar de *curvas polares recíprocas* nos referimos á las tomadas con *respecto á un círculo.* Sea O el centro de un círculo de radio r, y que se trata de construir la curva recíproca de una curva dada C (fig. 2) con relación á este círculo. Se sabe que la recta que une el centro O á un punto t, es perpendicular á la polar T de este punto; además, si S es el punto de encuentro de Ot con T, se tiene la relación

$$tO \,.\, sO = r^2.$$

Si bajamos desde O las perpendiculares á las tangentes de la curva C, y tomamos las longitudes tO, $t'O$....., de modo que se tenga

$$tO \,.\, sO = r^2, \quad t'O \,.\, s'O = r^2 \ldots..$$

los puntos t, t'..... pertenecerán á la curva recíproca.

Ecuación.—Para determinar la ecuación de una curva polar recíproca de otra dada con relación al círculo, cuya ecuación sea

$$x^2 + y^2 = r^2$$

sea $F(x, y)$ la ecuación de la curva dada y (x_1, y_1) uno de sus puntos cuya polar con relación al círculo auxiliar, tendrá por ecuación

$$xx_1 + yy_1 = r^2.$$

Si n y ν son las coordenadas de una tangente á la curva recíproca, se puede tomar para ecuación de esta tangente

$$nx + \nu y = 1,$$

y comparando, se tendrán las relaciones

$$n = \frac{x_1}{r^2}, \quad \nu = \frac{y_1}{r^2};$$

por consiguiente, $x_1 = r^2 n$, $y_1 = r^2 \nu$, y la ecuación de la polar recíproca será:

$$F(r^2 n, r^2 \nu) = 0.$$

Si la línea propuesta fuese definida por $\varphi(n, \nu) = 0$, la curva recíproca lo sería por $\varphi\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}\right) = 0$.

— En el caso particular en que el radio del círculo auxiliar fuera igual á la unidad, una curva, representada por la ecuación $F(x, y) = 0$ ó $\varphi(u, \nu) = 0$, tendrá por polar recíproca otra cuya ecuación sería $F(n, \nu) = 0$ ó $\varphi(x, y) = 0$.

Propiedades.—La polar recíproca de una circunferencia, con relación á un círculo del centro O, es una sección cónica que tiene por foco el punto O y por directriz la polar del centro de esta circunferencia. Esta cónica será una elipse, una hipérbola ó una parábola, según que el punto O sea interior, exterior ó esté en dicho círculo.

— La curva recíproca de una recta es una circunferencia que pasa por el polo y toca en este punto á una paralela á la recta dada.

— La curva recíproca de la envolvente de un círculo para radios emanados del centro, es una espiral-tactric.

— En dos curvas recíprocas, la tangente en un punto de una de ellas, y la normal al punto correspondiente de la otra, forman ángulos complementarios con el radio vector.

— La curva recíproca de la espiral de *Arquímedes* es la espiral hiperbólica.

Aplicaciones. —De lo expuesto se deduce que, transformándose un círculo en una cónica, las propiedades descriptivas del primero se aplicarán á las segundas. Además, como el ángulo de dos rectas es igual al de los radios que unen el centro O del círculo directriz á los polos de estas rectas, toda relación métrica entre los ángulos de dos rectas de una figura que limita un círculo, se cambiará en una relación parecida entre los ángulos alrededor del punto O, foco de la cónica.

He aquí algunos ejemplos de este paso de una propiedad métrica del círculo á la propiedad correspondiente en la cónica.

En un círculo, las tangentes están igualmente inclinadas con respecto á la cuerda de los contactos.

En una cónica, la recta que une el foco al punto de intersección de dos tangentes, es bisectriz del ángulo de los radios vectores de los puntos de contacto.

La cuerda que subtiende un ángulo recto inscrito en un círculo pasa por el centro.

Las tangentes á la parábola perpendiculares entre si se cortan según la directriz.

En un círculo, la tangente es perpendicular al radio dirigido al punto de contacto.

En una cónica, el radio vector del punto de contacto de una tangente es perpendicular á la recta que une el foco al punto de intersección de la tangente y la directriz.

En un círculo, los extremos de un diámetro son puntos armónicamente conjugados con relación al centro y al punto del infinito de este diámetro.

En una cónica, las tangentes trazadas desde un punto de la directriz forman con ésta, y la recta que une el foco á esta punto, un haz de cuatro rectas armónicas.

Si desde un punto fijo se trazan tangentes á una serie de círculos concéntricos, el lugar de los puntos de contacto será otro círculo que pasa por el punto fijo y por el centro común.

Si una recta fija corta á una serie de cónicas que tienen el mismo foco y la misma directriz, la envolvente de las tangentes á las cónicas en los puntos en que aquella recta las encuentra, será otra cónica que tendrá el mismo foco que las de la serie y tocará á la recta fija y á la directriz común.

Los puntos de concurso de las

Las secantes comunes de dos

tangentes comunes á dos círculos se encuentran sobre la línea de los centros y la dividen armónicamente.

cónicas que tienen un foco común vienen á concurrir al punto de intersección de las directrices, y forman con aquéllas un haz de cuatro rectas armónicas.

—El rectángulo de los segmentos determinados por el círculo, en una cuerda que pasa por el origen, es constante.

El producto de las distancias del foco á dos tangentes paralelas, es constante.

Segundo caso.—Supongamos que se toma como cónica auxiliar una parábola en lugar de un círculo.

—Mr. Chasles, según hemos dicho al principio, propone este sistema de transformación, fundándolo en la siguiente propiedad de la parábola: «La parte del eje de una parábola comprendida entre dos rectas cualesquiera, es igual á la determinada en este mismo eje por dos perpendiculares á él trazadas desde los polos de aquellas dos rectas.»

— Este método es aplicable á un corto número de cuestiones. Véase un ejemplo:

Las cuerdas que unen dos puntos fijos de una hipérbola con otro cualquiera de la misma curva, determinan en la asíntota un segmento de longitud constante.

— Si una tangente á una parábola corta á otras dos fijas, las perpendiculares bajadas desde los puntos de intersección á la tangente en el vértice de la curva determinan en ella un segmento de longitud constante.

Aplicaciones.— Además de la importancia que queda expresada, tiene, por sus aplicaciones á la Geometría, la teoría de las polares recíprocas; debemos de señalar que esta teoría se aplica igualmente á la determinación del nodo central de una sección dada en *Resistencia de materiales*, lo cual tiene gran analogía con la teoría de los centros de percusión.

—En la Estática gráfica se usa otra categoría de figuras polares recíprocas que, siendo en general poligonales, no las tratamos aquí, que sólo á curvas nos referimos, las cuales tienen grandes analogías con las que hemos considerado y que se deducen de una manera casi inmediata de la transformación parabólica acabada de indicar de Mr. Chasles.

Pollodia.

Del griego, πόλος, *polo*, y ὅδος, *camino:* ruta del polo.

Definición.—Curva formada sobre el elipsoide central por la serie de los puntos de contacto de este elipsoide con un plano fijo, paralelo al plano del par que ha impreso á un cuerpo sólido un movimiento inicial de rotación, sea alrededor de su centro de gravedad si él es libre, sea alrededor de un punto fijo si éste lo está en el sistema.

Historia.—Véase sobre este punto cuanto se ha dicho en el relativo á la *herpollodia.*

Ecuación.—El teorema de las áreas nos dice que el eje del par resultante de las cantidades de movimiento conserva en el espacio una magnitud y dirección fijas; si, pues, las proyecciones del eje de este par, sobre las posiciones en el tiempo t, de los ejes principales de inercia relativos al punto fijo O son Ap, Bq y Cr, y G es el momento constante del par resultante, será:

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = G^2.$$

Por otra parte, el principio de las fuerzas vivas hace ver que la fuerza viva del sistema permanece invariable en el movimiento, y se tendrá, llamando T á una constante,

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2T,$$

y puesto que la *pollodia* es el lugar de los puntos del elipsoide central, para los cuales el plano tangente está á una distancia constante del punto fijo O, esta distancia será igual á

$$\frac{\sqrt{2T}}{G}$$

La ecuación del elipsoide central es:

$$(1) \qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1; \qquad A < B < C;$$

si (x', y', z') son las coordenadas de un punto cualquiera de la pollodia, la distancia al origen del plano tangente en este punto será

$$\frac{1}{\sqrt{A^2x'^2 + B^2y'^2 + C^2z'^2}};$$

y, por tanto,

$$\frac{\sqrt{2T}}{G} = \frac{1}{\sqrt{A^2x'^2 + B^2y'^2 + C^2z'^2}};$$

pero, por otra parte, se tiene

$$Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 = 1;$$

luego se tendrá por las dos relaciones anteriores:

$$\frac{\sqrt{2T}}{G} = \frac{\sqrt{Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2}}{\sqrt{A^2x'^2 + B^2y'^2 + C^2z'^2}},$$

y elevando al cuadrado, reduciendo y suprimiendo los acentos:

$$A(G^2 - 2AT)x^2 + B(G^2 - 2BT)y^2 + C(G^2 - 2CT)z^2 = 0. \quad (2).$$

Las ecuaciones (1) y (2) son las ecuaciones de la pollodia, y (2) es la ecuación del cono S.

Así, pues, la pollodia es una curva algebraica.

Propiedades. — La distancia $\frac{\sqrt{2T}}{G}$ está comprendida entre el eje mayor $\frac{1}{\sqrt{A}}$, y el menor, $\frac{1}{\sqrt{C}}$; será, pues:

$$\frac{\sqrt{2T}}{G} < \frac{1}{\sqrt{A}} > \frac{1}{\sqrt{C}},$$

y, por tanto,

$$G^2 - 2AT > 0 \quad \text{y} \quad G^2 - 2CT < 0.$$

Eliminando sucesivamente x^2, y^2, z^2 entre las ecuaciones (1) y (2), se obtendrán las ecuaciones de las proyecciones de la pollodia sobre los planos coordenados, y se obtiene para ecuación de la proyección sobre el plano xOy,

$$A(C - A)x^2 + B(C - B)y^2 = \frac{2CT - G^2}{2T},$$

ecuación de una elipse referida á su centro y á sus ejes.

La proyección sobre el plano $y\ O\ z$ tiene por ecuación:

$$B(B-A)y^2 + C(C-A)z^2 = \frac{G^2 - 2AT}{2T};$$

que es, asimismo, una elipse.

La proyección sobre el plano $z\,O\,x$ tiene por ecuación

$$-C(C-B)z^2 + A(B-A)x^2 = \frac{2BT - G^2}{2T} \qquad (3)$$

ésta es una hipérbola cuyas asíntotas son las rectas

$$\frac{z}{x} = \pm\sqrt{\frac{A(B-A)}{C(C-B)}}. \qquad (4)$$

— Sean OE y OK las dos asíntotas. Si $2BT - G^2 > o$, la hipérbola

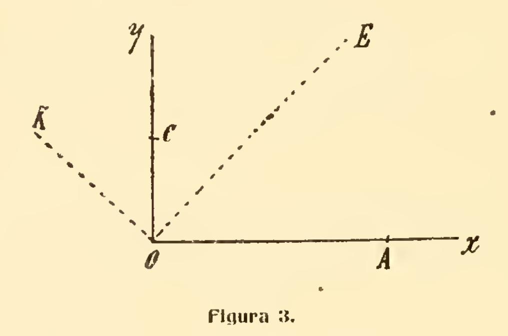


Figura 3.

estará situada en el ángulo EOA, y si dicha expresión es menor que cero, lo estará en el ángulo EOC. En el primer caso, la pollodia rodea el vértice A; en el segundo estará trazada alrededor del vértice C.

Las dos especies de pollodia estarán separadas por las dos elipses, según las cuales los planos (4) cortan al elipsoide. La ecuación (3) pone de manifiesto que estas dos elipses iguales son los lugares de los puntos del elipsoide, para los cuales el plano tangente está á una distancia del centro igual al eje menor.

Así, si $\frac{G^2}{2T} = A$, la pollodia se reduce á un punto A; si el cuerpo

ha empezado á girar alrededor de OA, continuará girando indefinidamente alrededor de OA.

Si $\frac{G^2}{2T} > A$, se tiene una pollodia pequeña rodeando el punto A.

Si $\frac{G^2}{2T} = B$, la pollodia se compone de dos elipses iguales, BE y BF; si el cuerpo ha empezado á girar alrededor de OB, no existe ninguna razón para que el punto B se mueva sobre la elipse BE con preferencia á la BF; así el cuerpo continuará, pues, girando alrededor de OB.

Si $\frac{G^2}{2T} > B$, la pollodia pasa hacia el huso EBF y rodea el punto C, terminando por ser una pequeña curva alrededor de C, y el punto C perteneciendo á ella para $\frac{G^2}{2T} = C$.

El cuerpo, habiendo comenzado por girar alrededor de OC, gira indefinidamente alrededor de esta misma recta.

— Mr. de La Gournerie ha demostrado en sus *Recherches sur les surfaces réglées tétraedrales symétriques* (página 165), que la intersección de dos superficies de segundo grado concéntricas que tienen sus ejes principales dirigidos según las mismas rectas, puede, en general, ser considerada, y de dos maneras diferentes, como una pollodia.

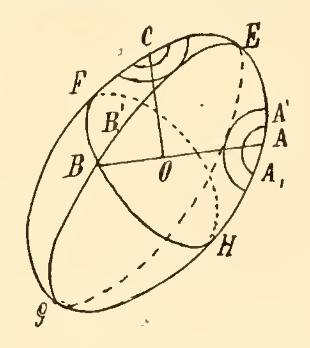


Figura 4.

— La curva (C), intersección de dos superficies de segundo grado que tienen los mismos ejes principales, siempre que no sea esférica, es una pollodia trazada sobre dos superficies diferentes; pero estas superficies no son reales más que en el caso en que las superficies normales á la curva sean hiperboloides de una hoja.

— Si se construye el hiperboloide que es normal en un punto cualquiera M de la curva (C), las dos generatrices rectilíneas de este hiperboloide que pasan por M, son las normales, en este mismo punto, á las dos superficies para las cuales la curva es una pollodia.

— La pollodia (C) es el lugar de los puntos correspondientes de un punto dado de un hiperboloide de una hoja sobre todos los hiperboloides homofocales.

— En una Memoria inserta en el *Philosophical transactions* (t. CLVI, 1866, *On the Motion of a Rigid Body acted on by no external Forces*),

se encuentran, debidas á Mr. Silvester, algunas proposiciones curiosas referentes á la representación de Poinsot, y Mr. Darboux se ha ocupado de ellas demostrando asimismo el siguiente teorema:

— Dada una pollodia (P), trazada sobre un elipsoide ó sobre otra cualquiera superficie de segundo grado con centro (E); si se toman longitudes iguales sobre las normales á la superficie, que tengan sus pies sobre la pollodia, el lugar de las extremidades de estas longitudes es una nueva pollodia (P'), trazada sobre una nueva superficie (E'), homofocal á una superficie homotética de (E). Además, las normales á la superficie (E), en los diferentes puntos de (P), son también normales á la superficie (E') en los puntos correspondientes de (P').

— Dadas dos superficies concéntricas (E), (E'), tales que una de ellas sea homotética á una superficie homofocal de la otra, dichas superficies tendrán una infinidad de normales comunes cuyos extremos describen, sobre las dos superficies, dos pollodias.

Aplicaciones.— La ingeniosa concepción de Poinsot no ha encontrado todavía utilidad en las aplicaciones, por lo cual el estudio de esta curva no ha adquirido gran desarrollo.

Polocónica.

Definición.—Al lugar de los polos, en que las primeras polares tocan á una línea recta, se llama la polocónica de dicha recta.

Propiedades.— Los puntos de intersección de la polocónica de una recta con esta misma recta están situados equianarmónicamente con relación á los puntos de intersección de esta recta con la curva originaria.

—A toda recta n está asociada una curva de tercer orden, como lugar de los polos x, en que las polares lineales son encontradas por la línea n, en un punto que es conjugado con x, relativamente á la polocónica de la recta n.

— Las tangentes de la curva primitiva podrán definirse por la circunstancia de que sean tocadas por sus polocónicas.

— Ver para el estudio de esta línea la teoría de las formas cúbicas ternarias. Consultando entre otros trabajos los de Aronhold, *Journal de Crelle* (T. LV, 1858); Clebsch y Gordan,—*Math. Annalen* (T. I y VI), y Cayley, *Seventh Memoir upon quantics (Philosophical Transactions*, 1861).

Posición.

Definición.— Se dice *arco de posición* á la porción de ecuador comprendida entre el meridiano y el círculo de declinación de un astro. El ángulo que mide este arco es el *ángulo horario*.

— Los astrólogos llamaban así al arco de ecuador comprendido entre ciertas líneas y planos que imaginaban trazadas en la esfera celeste.

Positivas.

Denominación dada á ciertas curvas por M. W. Roberts. (Ver *Derivadas.)*

— Esta expresión ha sido generalizada para la esfera por Mr. Faure (*Nouvelles Annales*, t. XIII, pág. 373).

P, Q, P — Q y P + Q.

P y *Q*.—*Definición.*—Sea $f(z)$ una función que tome la forma $P+Q\sqrt{-1}$ cuando se hace

$$z=x+y\sqrt{-1},$$

siendo P y Q funciones reales, en x é y, de la ecuación

$$f(z)=P+Q\sqrt{-1}=0; \qquad (1)$$

comprendiendo las siguientes

$$P=0, \quad Q=0, \qquad (2)$$

y recíprocamente.

Si x é y son las coordenadas de un punto variable, la parte real y el coeficiente de $\sqrt{-1}$ de una raiz de la ecuación (1) serán respectivamente iguales á los valores numéricos de la abscisa, y la ordenada de un punto común á las dos curvas dadas por las ecuaciones (2).

Estas dos curvas se llaman, respectivamente, la *curva P* y la *curva Q*.

Historia.—Al objeto de estudiar las propiedades de estas especies de funciones, para por su medio representar las raices de las ecua-

ciones por intersecciones de curvas, Mr. E. Prouhet ha estudiado las líneas cuya denominación es la de P y Q, así como la diferencia y suma de estas mismas letras.

Propiedades.—Los puntos de intersección de las curvas P y Q reciben el nombre de *puntos-raíces*, puesto que pueden ser considerados como que forman una representación geométrica de las raíces de la ecuación $f(z) = 0$.

— Cada una de las curvas P y Q presentan un punto múltiple del orden n, en todos los casos que la ecuación primitiva $f(z) = 0$ tiene n raices iguales entre sí.

— En cada punto (x, y) tienen estas curvas n tangentes distintas, y de tal manera dispuestas, que dos tangentes consecutivas comprenden un ángulo igual á la $n^{ésima}$ parte de dos ángulos rectos.

— Un punto raiz del orden n no puede ser de parada ni aislado para ninguna rama de la curva P, por lo menos en el caso de que la función P sea continua.

— Las tangentes á la curva Q son las bisectrices de los ángulos formados por las tangentes á la curva P.

— En un punto raiz de primer orden, las curvas P y Q se cortan en ángulo recto.

$P - Q$ y $P + Q$ = *Definiciones.*—La curva de ecuación $P - Q = 0$ ó curva $P - Q$ es el lugar de los puntos cuyas coordenadas, sustituídas en las funciones P y Q, nos dan resultados iguales y del mismo signo.

— La curva de ecuación $P + Q = 0$, ó curva $P + Q$ es el lugar de todos los puntos cuyas coordenadas, sustituídas en las funciones P y Q, nos dan resultados iguales y de signo contrario.

Propiedades.—En cada punto de la curva $P - Q$ la relación $\frac{P}{Q}$ es igual á la unidad, y en cada punto de la $P + Q$, dicha relación tiene el valor, menos uno.

— En un punto-raiz del orden n:

1.° La curva $P - Q$ tiene n tangentes distintas, y cada una forma, con la que le sigue, un ángulo igual á $\frac{\pi}{n}$.

2.° La curva $P + Q$ tiene también n tangentes distintas, las cuales son las bisectrices de los ángulos formados por las tangentes á la curva $P - Q$.

— Si se construyen las tangentes á las curvas P y Q y se designan, respectivamente, los ángulos consecutivos, formados por estas tangentes, por los números 0, 1, 2, 3.....; las bisectrices de los ángulos

de rango par serán las tangentes á la curva $P+Q$, y las bisectrices de los ángulos de rango impar serán las tangentes á la curva $P-Q$.

— Las curvas P y Q poseen m asíntotas diferentes, y cada dos de estas asíntotas consecutivas en cada una de ellas comprenden un ángulo igual á $\frac{\pi}{2m}$, cuya bisectriz es á su vez asíntota á la otra curva; y las curvas $P-Q$ y $P+Q$ tienen también cada una m asíntotas que pasan por el punto (x, y). Las posiciones de estas asíntotas con relación á las de las curvas P y Q, es la misma que la de las tangentes.

— Para la demostración de todas estas propiedades se puede consultar la obra de Ch. Sturm, *Cours d'Analyse* (t. II, pág. 360 y siguientes).

Potencial triangular.

Cuando se trata de resolver el problema de encontrar sobre uno de los lados de un triángulo un punto que le divida proporcionalmente á las primeras potencias de los lados adyacentes, se encuentra una curva cuya ecuación en coordenadas cartesianas, tomando por ejes los lados del triángulo, es:

$$\frac{(ay)^{\log.\frac{b}{c}}}{(bx)^{\log.\frac{a}{c}}} = (ab - ay - bx)^{\log.\frac{\overline{b}}{a}}$$

E. Lemoine. *Association française pour l'avancement des Sciences*. 1882, y en la misma publicación, año 1886, ver los trabajos de Nancy y G. de Longchamps.

Presión.

Definición.—Se da este nombre, en Hidráulica, á la línea imaginaria que en una cañeria de conducción de aguas forzada une los extremos superiores de las ordenadas que marcan la presión en cada punto de la misma.

Determinación.—La presión sobre la pared de un conducto se sabe es dada por la ecuación:

$$h = H_0 + z + \frac{V_0^2}{2g} - \frac{v^2}{2g} - y,$$

en la cual *h* representa la altura á que se elevaría el agua por encima de la pared del conducto en el cual se hubiera hecho el vacío.

Si se supone que la velocidad V_0 de la superficie superior es desechable á causa de la magnitud de esta superficie, y si se refiere la curva dada por la ecuación anterior á una horizontal *A B* situada á una distancia H_0 sobre esta superficie, se tendrá, llamando μ, la ordenada de esta curva

$$\mu = \frac{v^2}{2g} + y.$$

Cuando el líquido se encuentra en reposo, todas las columnas manométricas se elevan hasta la horizontal *A B*; y cuando el líquido está en movimiento, se necesita restar: 1.°, la altura debida á la velocidad, y 2.°, la cantidad *y*, proporcional al trabajo de las fuerzas retardatrices desde el origen del depósito.

Aplicaciones.—En los problemas de conducción de aguas se aplica, con preferencia á esta línea, la de carga (ver esta voz), por ser inferior á la de presión.

Presiones (Curva de).

Definición.—Si consideramos un arco de una bóveda, comprendido entre dos secciones cualesquiera, la línea que pasa por los puntos de aplicación de las fuerzas que obran sobre sus juntas sucesivas, forma un contorno poligonal, que se denomina *polígono de presiones*, y si suponemos la bóveda ficticiamente como compuesta de una infinidad de dovelas infinitamente delgadas, el polígono se convertirá en una curva continua que se nombra *curva de presiones.*

Historia.—El método más antiguo de verificación del equilibrio de una bóveda se atribuye á La Hire; método recomendado luego por Belidor, completándolo Coulomb en su obra *Essai sur une application des régles de maximis et de minimis á quelques problémes de Statique relatifs á l'Architecture.*

Gregory *(Transactions philosophiques)* considera que, haciendo caso omiso del frotamiento, una bóveda infinitamente delgada puede asimilarse á una curva funicular en equilibrio.

A estos estudios siguieron las experiencias de Boistard sobre la manera de deformarse una bóveda, y luego aparece en las obras de Gauthey y en la de Navier *(Resúme des leçons donneés á l'Ecole des Ponts et Chaussées sur l'application de la Mécanique á l'etablissements*

des constructions et des machines, 1836) la idea de la *curva de presiones* como medio para determinar la estabilidad de una bóveda.

Sin embargo, el primero que tomó esta línea por base para esta clase de estudios, introduciendo en la ciencia el principio de la menor resistencia, fué Moseley *(Philosophical magazine*, 1833; *Philosophical transactions*, 1837, y *The mechanical principles of engineering and architecture*, 1843), principio puesto en práctica y demostrado por el Dr. Hermann Scheffler en una obra que publicó en 1857. Mr. Moseley deduce que el empuje debe ser un mínimo, para lo cual pone la condición de que la curva de presiones toque al intradós ó que pase por el punto más bajo de éste.

Mr. Méry *(Annales des Ponts et Chaussées*, 1840) busca la curva que corresponde al mínimo y la que corresponde al máximo del empuje, debiéndose tener para la estabilidad, que la primera, según él, debe tocar al extradós en las inmediaciones del vértice y al intradós cerca de los arranques; y la segunda debe tocar al intradós cerca del vértice y al extradós próximo á los arranques. Estos estudios fueron complementados por A. Durand-Claye *(Annales des Ponts et Chaussées*, 1867, núm. 142, t. I, pág. 63), pudiéndose ver también una Memoria de Mr. Dronets (núm. 103, t. I, pág. 179).

Mr. Hagen *(Uber Form und Stärke gewölbter Bogen*, *Memorias de la Academia de Berlin*, 1844) fija el punto de aplicación del empuje en la clave en su medio, y el punto inferior de dicha curva de presiones en el medio de la junta de arranque, exigiendo que esta curva pase por los medios de todas las juntas, y que así se obtendrá, según él, la mayor estabilidad posible.

A estos estudios han seguido otros varios, entre los cuales señalaremos los de Weisbach *(Lehrbunch der Ingenieur-und Maschinen-Mechanik*, 2.ª parte), que emplea simultáneamente en la exposición de la teoría de las bóvedas, la catenaria y la curva de presiones; los de Mr. Barlow *(The civil engineer and architest's Journal*, Julio 1847), que adopta la teoría de Moseley, pero confunde la curva de presiones con la *curva envolvente* de las presiones, la cual es una catenaria ó un polígono funicular, pretendiendo probar por la experiencia la identidad de ambas curvas; los de Carvallo *(Etude sur la stabilité des voûtes*, *Annales des Ponts et Chaussées*, 1853), elogiados por Poncelet *(Examen historique et critique des principales théories concernant l'equilibre des voûtes*, *Compte rendu de l'Academie de Sciences*, t. XXXV, 1852); los de Mr. Hoffmann *(Uber Form und Stärke gewölbter Bogen*, 1853); los de Ivon-Villarceau *(Recueil des savant étrangers*, t. XII);

los de Deufert-Rochereau (*Revue de l'Architecture et de travaux publics*, de Mr. César Daly, t. XVII, 1859), etc.

En cuanto á las obras que pueden consultarse para el estudio general del trazado, etc., de la curva de presiones, tanto en las bóvedas como en los estribos, muros de sostenimiento, etc., señalaremos los diferentes Tratados de Estática gráfica y las obras de Planat y Marvá de aplicaciones de la Mecánica á la construcción.

Consideraciones generales.— Supongamos una pieza curva, de la que empezaremos por determinar su eje, el cual, si la sección es de altura constante, equidistará del intradós y del trasdós; y si es variable, se formará uniendo los puntos medios de las secciones; supongamos que son conocidas las reacciones 5 y 6 del arco, cuyo

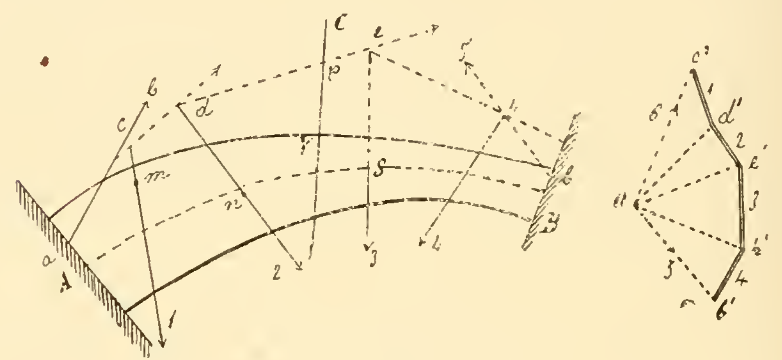


Figura 1.

eje es AB (fig. 1), y sean 1 . 2 . 3..... las fuerzas exteriores aplicadas en los puntos m, n, s..... Tracemos $c'0$, igual y paralela á la reacción 6 y las $c'd'$, $d'e'$, etc., paralelas é iguales, respectivamente, á las fuerzas 1 . 2....., etc.; tomemos 0 como polo y dibujemos los radios polares $0d'$, $0e'$, etc. Se trazará el polígono $abcdeh$, que será uno de los infinitos polígonos funiculares del sistema de fuerzas 1 . 2 . 3....., que pasa por los puntos a y b, y esta condición sirve para determinarlo.

Este polígono se llama *polígono de las presiones*. Si las fuerzas 1 . 2 ... están infinitamente próximas, este polígono determina la *curva de presiones*.

Propiedades.—La tangente á la curva de presiones en un punto x será la línea de acción de la resultante, y el radio polar paralelo á la tangente dará su magnitud.

— El momento de flexión, en una sección transversal cualquiera del

arco, es igual al producto del empuje horizontal por la distancia vertical del centro de gravedad de la sección, al polígono ó curva de las presiones.

— Cuando el eje de la pieza curva coincide con la curva de las presiones, los momentos de flexión son cero, y la pieza trabaja únicamente por compresión y por esfuerzo cortante.

— Entre todos los polígonos funiculares correspondientes á un sistema de fuerzas aplicadas á un cuerpo ó á un sistema de cuerpos, existe uno cuyos lados son las líneas de acción de las resultantes de las acciones exteriores correspondientes á una sección transversal cualquiera, estando representadas las magnitudes de estas resultantes por los radios polares respectivos.

Aplicación á la estabilidad de las bóvedas.—Sea (fig. 2) $ABCD$ una semi-bóveda, en la que AB es la sección en la clave y CD en el arranque. Si N es la resultante de las presiones en la clave, la acción de la semibóveda inmediata quedará sustituída por esta reacción N en el plano AB, la cual se denomina *empuje en la clave*.

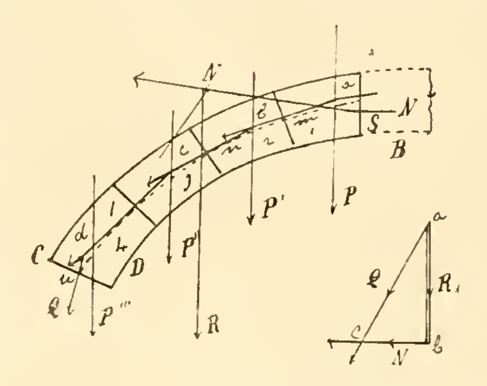


Figura 2.

Componiendo N con el peso P de la dovela *1*, obtendremos la presión ab en la junta de las dovelas *1* y *2* y su punto de aplicación ó centro de presión m. La resultante ab compuesta con P', peso de la dovela *2*, dará bc presión en el plano de junta de las dovelas *2* y *3*, y continuando estas operaciones obtendremos el *polígono de presiones* $Sabcdn$ y el *polígono de centros de presión* $Smnru$, los cuales se convertirán en curvas que reciben estos mismos nombres cuando las dovelas *1*. *2* ., etc., sean infinitamente pequeñas, porque los planos de junta se encuentren muy próximos entre si.

Sustituyendo la presión Q en el arranque CD por su igual y contraria la reacción en este plano, podrá suponerse que la semibóveda $ABCD$ se encuentra en equilibrio en el espacio, bajo la acción de la reacción Q en el arranque, del empuje N en la clave y de los pesos P y P'..... ó de su resultante R_1. Para el equilibrio es necesario que estas tres fuerzas concurran en un punto H.

Las magnitudes de N y Q dependen á igual valor y situación

de R_1, de la posición que se asigne á los puntos de aplicación respectivos S y u, pues de ellos depende la posición del punto H, la dirección de Hu y la de su paralela ac, lado del triángulo construído sobre $ab = R_1$. El polígono ó curva de presiones ha de pasar por S y u, y en su trazado y forma influyen también la magnitud de N y la posición de N y u, de modo que á cada posición diferente de estos puntos corresponde un polígono ó curva de presiones diferente también.

Propiedades.—Sea $DEFGH$ (fig. 3) la curva que se obtiene prolongando las verticales que pasan por los centros de gravedad de los pesos P, P', P''..... hasta su encuentro con las juntas correspondientes, y uniendo estos puntos de intersección por un trazado continuo. Si C es el punto de aplicación del empuje horizontal, N, que obra sobre la junta de la clave y determina una curva de presiones que pasa por C, la horizontal CM encontrará á la primera curva en un número cualquiera de puntos, tales como E y G, de modo que ciertas partes de la curva DE, GH estarán por debajo, y otras, EFG, por encima de esta horizontal. La curva de presiones que empieza en C, tal como $CIEKGL$, cualquiera que sea el valor de N por C y por los puntos E y G en que la otra curva encuentra á la horizontal CM y la curva de presiones queda comprendida entre esta horizontal y la curva $DEFGH$.

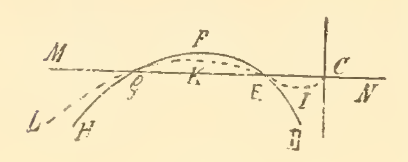


Figura 3.

— Si la curva $DEFGH$ no es cortada por la horizontal CM, la curva de presiones quedará toda ella por encima ó por debajo de esta curva, pero sin tocarla.

— La curva $DEFGH$ representa la curva de presiones particular que responde al caso de $N = 0$, para el cual, por consiguiente, la posición del punto de aplicación de la fuerza nula en el vértice es indeterminada.

— Si se aumenta la fuerza N, conservando su punto de aplicación, se encuentra en lugar de la línea $CIEKGL$, una nueva curva de presiones que pasa por C, E y G, pero que se encuentra comprendida en los demás puntos entre la horizontal CM, y la primera curva de presiones, de manera que las partes CIE, GL se elevan, mientras que la EKG se baja; lo que hace que todas las partes se separen de la horizontal CM. Si, por el contrario, el punto de aplicación C permanece constante, y se disminuye la fuerza N, la nueva curva

de presiones pasará también por *C, E* y *G*, pero se alejarán sus demás puntos de la horizontal *CM*, las partes *CIE, GL* descienden y la *EKG* se eleva.

— Si se hace mover el punto *C* sobre la vertical sin variar la magnitud de *N*, la nueva curva de las presiones se elevará ó descenderá toda ella con relación á *CIEKGL*, sin tener con ésta última ningún punto común; según que el punto *C* se eleve ó descienda.

— Si se hace variar á voluntad la magnitud y el punto de aplicación de la fuerza *N*, al mismo tiempo se obtienen curvas de presiones que se cortan mutuamente. Dos de estas curvas que se cortan en un punto cualquiera *D* (fig. 4), se cortan asimismo en todos sus puntos situados sobre esta horizontal *D* y no en ningún otro situado por encima ó debajo de esta horizontal.

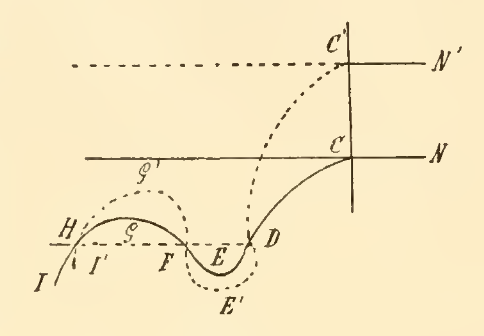


Figura 4.

— El encuentro en estos puntos *D*, que no tienen su tangente horizontal, no producen más que una intersección, mientras que si tuviera lugar en uno de los puntos máximos *C, E, G*, tendrían necesariamente un contacto.

— Las diferentes curvas de presiones que pueden construirse tienen su tangente horizontal en los puntos *C*, puesto que no existe peso aislado que obre en el vértice; y si se supone estas curvas prolongadas indefinidamente en los apoyos, ellas tienden hacia una misma curva que les sirve de asíntota común.

— Todas las propiedades hasta aquí expresadas son extensivas á las curvas de presiones discontinuas ó que responden al caso de pesos aislados. Trazando los pequeños segmentos de fuerte curvatura que restablecen la continuidad, se reconoce fácilmente si una posición relativa cualquiera de dos de estas curvas es ó no posible y si ellas se cortan ó no. Así, por ejemplo; son posibles las posiciones relativas representadas en la figura 5 y no pueden ser las que señalan la figura 6.

— La curva de presiones, que corresponde á un máximo ó á un mínimo del empuje, debe, sin salir en ninguna de sus partes del espesor de la bóveda, tener un punto común con el extradós y otro con el intradós; y si dicho punto de contacto no está al extremo de

la bóveda, sea en la clave, sea en el arranque, tiene que ser necesariamente un punto de contacto de la curva de presiones con la curva-contorno de la bóveda.

— Cuando el punto F de contacto con el extradós está más alto que el punto E de contacto con el intradós, la curva de las presiones de que se trata corresponde á un mínimo del empuje, sea que el punto E esté delante ó detrás del F cuando se recorre la curva desde la clave al arranque.

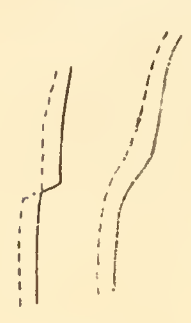


Figura 5.

— Cuando el punto de contacto F con el extradós está más bajo que el punto E de contacto con el intradós, la curva de las presiones correspondiente se aproxima á un máximo del empuje. Pero en este caso, esta propiedad tiene lugar solamente cuando el punto E precede al F en el sentido de la clave al arranque, porque en el caso contrario la curva de las presiones de que se trata deberá cortar en tres puntos á ciertas juntas de la bóveda, lo cual es imposible.

— Si en una bóveda se puede construir una curva que goce al mismo tiempo las propiedades de las de mínimum y de las de máximum, ella será la sola curva posible, y la bóveda se encontraría en el estado de *equilibrio límite*.

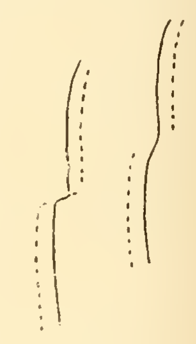


Figura 6.

Aplicaciones.—El conocimiento y trazado de esta curva ha originado diferentes métodos, que se han indicado al hablar de la historia de esta línea, para obtener las condiciones de equilibrio de una bóveda, según hipótesis diversas y mediante fórmulas particulares que dan de antemano el valor del empuje y demás elementos necesarios, según la forma y circunstancias de cargas de la oóveda y según también la naturaleza de los materiales que la constituyen.

Probabilidad (Curva de la).

Definición.—Curva cuyas abscisas son los valoresde una magnitud y cuyas ordenadas son las probabilidades de estos valores; de manera que la ordenada viene á representar la probabilidad del valor de la abscisa.

Historia.—Del origen del cálculo de probabilidades ya hemos tratado en la voz *igual probabilidad*, y nada diremos por consiguiente;

pero del relativo á la curva objeto de este artículo debemos de manifestar que se funda su uso particularmente en el llamado teorema de Jacobo Bernouilli, demostrado por éste en su obra *Ars conjectandi*, 1731, el cual es que «A medida que se multiplican las pruebas, se tiene una probabilidad tanto más aproximada cuanto que la relación del número de resultados A, al de los resultados contrarios B, se separa menos de la relación de sus probabilidades respectivas más allá de un límite dado, en más ó en menos; y cualquiera que sea este límite, la probabilidad de que se trata podrá aproximarse á la unidad, tanto como se quiera, siempre que se aumente suficientemente el número de pruebas».

Determinación de la curva. — Teniendo en cuenta el teorema anterior, consideremos, por ejemplo, asimiladas las pruebas repetidas de la misma clase á tiradas sucesivas en las cuales se extrajera de una urna que contuviese, por ejemplo, f bolas blancas y c bolas negras, una bola que se volviera luego á la urna para no alterar su número. La suerte de extraer una bola blanca sería $\frac{f}{f+c}$ ó p; la suerte contraria sería $\frac{c}{f+c}$ ó q, de manera que se tenga $p+q=1$.

Según la regla de las probabilidades compuestas, la suerte de extraer desde luego en m tiradas sucesivas, $m-n$ bolas blancas, y después n bolas negras, sería el producto de $m-n$ factores iguales á p por n factores iguales á q, es decir, $p.^{m-n}\, q.^{n}$. Pero si no se tiene en cuenta el orden en que las bolas blancas ó negras se suceden, la probabilidad de extraer $m-n$ bolas blancas y n bolas negras en m tiradas estará representada por $p^{m-n} q^{n}$, repetida tantas veces como combinaciones son posibles con m objetos n á n ó $m-n$ á $m-n$. Si, pues, se representa por $C_{m,n}$ este número de combinaciones, la probabilidad de que se trata tendrá por valor $C_{m,n}.\, p^{m-n}q^{n}$; y resulta de esta observación que si se desarrolla la potencia m del binomio $p+q$, lo que nos da:

$$(p+q)^m = p^m + mp^{m-1}q + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\,p^{m-2}q^2 + \ldots\ldots +$$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots n}\,p^{m-n}q^n + \ldots\ldots,$$

el término p^n expresará la probabilidad de extraer m bolas blancas en m tiradas; el segundo término expresará la probabilidad de

extraer $m-1$ bolas blancas y una bola negra, y así sucesivamente.

— El término que ocupa el lugar n expresará la probabilidad de extraer en m tiradas $m-n$ bolas blancas y n bolas negras, y el término q^m expresará la probabilidad de extraer sólo bolas negras. La suma de todas estas probabilidades es igual á la unidad.

— Cuando el número m de pruebas es muy considerable, es impracticable el calcular un gran número de términos del desarrollo de $(p+q)^m$. La probabilidad correspondiente á un término de este desarrollo es una función del rango de este término, y puede, por consiguiente, ser representada por la ordenada de una curva que tenga este rango por abscisa. La curva así obtenida es la *curva de la probabilidad.*

Otro modo de considerar esta curva.— En lugar de tomar la ordenada para la medida de la probabilidad que corresponde á una abscisa dada, se puede tomar el arco del rectángulo elemental que tiene por altura esta ordenada y por base el crecimiento infinitamente pequeño ó la diferencial de la abscisa. La suma de las probabilidades expresadas por los términos del desarrollo comprendidos entre el rango n y el rango n', está así expresada por el área de la curva, tomada desde la abscisa n á la abscisa n'; el área total de la curva comprendida entre las ordenadas correspondientes á las absisas extremas o é ∞, tendrá por valor la unidad, puesto que la suma de todas las probabilidades responde á la certeza.

— A la curva verdad, los analistas han buscado el sustituir otra curva cuya ecuación sea más sencilla y que se aproxime suficientemente á la verdadera. Cuando m es muy grande, se puede, en general, reemplazar la curva de la probabilidad por una curva cuya ecuación es de la forma

$$y = Ae^{-K^2x^2},$$

que es el tipo de las curvas cuyas ordenadas decrecen simétricamente, y de una manera rápida, á un lado y otro de un valor máximo.

— Se demuestra en la *Théorie analytique des probabilités,* de Laplace, que si se pueden desechar las cantidades del orden $\frac{1}{m}$, la probabilidad P, que en un número m de pruebas, el número de resultados A está comprendido entre los límites $m(p-l)$ y $m(p+l)$,

siendo p la probabilidad del resultado simple, estará dado por la fórmula:

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt + \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{2\pi p(1-p)m}},$$

siendo t dada por la relación

$$t = l\sqrt{\frac{m}{2p(1-p)}}.$$

— En la mayoría de los casos, el segundo término del valor de P puede desecharse y reducirse su expresión á la siguiente:

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt.$$

Progresión.

Definición.—Se da este nombre al arco de la elíptica sobre el cual un planeta parece pasar cuando su movimiento es directo, ó sea en sentido de los signos.

Este arco recibe también el nombre de arco de *dirección.* (Ver *Retrogradación.*)

Propagación.

Definiciones.—Si se considera un cuerpo cualquiera, homogéneo é isótropo, y (x, y, z) son las coordenadas rectangulares, y V, la temperatura de uno de sus puntos en el tiempo t,

$$V = f(x, y, z \,.\, t).$$

Si $V = \varepsilon$, siendo ε una constante cualquiera, esta ecuación representa una superficie que pasa por todos los puntos del sólido, cuya temperatura es ε. Esta superficie se llama *superficie isoterma* y el coeficiente ε es el *parámetro termométrico.*

— Si damos á ε crecimientos iguales é infinitamente pequeños, se obtendrán una serie de superficies isotermas infinitamente próximas, y si consideramos una línea sujeta á ser normal á todas estas super-

ficies (ver *Trayectoria octogonal)*, se tendrá lo que se ha designado con el nombre de *línea de propagación.*

Propiedades.—A lo largo de una misma línea de propagación, el flujo de calor, referido á la unidad de superficie, varía en razón inversa de los segmentos interceptados sobre esta línea por las superficies isotermas sucesivas, correspondientes á los crecimientos iguales del parámetro termométrico.

— Si se toma sobre una de las superficies isotermas una extensión transversal, durante la unidad de tiempo para la unidad de calor, y se considera el conjunto de las líneas de propagación que pasan por su contorno, estas líneas, prolongadas hasta la superficie libre del cuerpo, formará ı una especie de tubo ó de canal, recorrido en toda su extensión por un mismo flujo de calor de 1^{cal} por segundo.

Aplicaciones.—La consideración de estas líneas, juntamente con las superficies isotermas y los canales de propagación, permiten el representar de una manera muy curiosa, y de figurar, según los principios de la Geometría Descriptiva, la distribución de las temperaturas y el movimiento del calor en los cuerpos conductores.

Pseudocicloides.

Si se considera un cono cuya base sea una espiral logarítmica y que la altura pase por el polo; haciendo girar este cono sobre un plano, el lugar geométrico de los puntos de contacto de la espiral con el plano ó el desenvolvimiento de la espiral produce esta línea. C. Juel.

Se comprenden en esta clase de líneas las *hipercicloides* y *paracicloides*. (Ver estas voces).

Puentes suspendidos (Curva de los).

Definición.—Curva que afecta un hilo homogéneo suspendido de dos puntos fijos, estando cada elemento solicitado por una fuerza vertical proporcional á la proyección de este elemento sobre una horizontal.

Historia.— Esta curva es la que afecta la cadena de un puente suspendido ó colgante, cuando se desecha el peso de aquélla; de aquí su denominación. Su historia está ligada á la de los problemas de la catenaria (ver esta voz).

— Respecto de los puentes colgantes, se puede decir que son muy

antiguos. Los españoles los encontraron ya en Méjico en la época de la conquista, y desde tiempo inmemorial se conocen en China y en el Indostán. La obra más antigua que se ocupa de ellos se atribuye á Faustur Verantius (1625), escrita en latín, francés, alemán, italiano y español. La primera aplicación en grande se hizo en 1796 por Finley sobre el Jacob-creek, con un puente de 21 metros de longitud, y hoy el más importante construído es el de Fribourg, que tiene una longitud de 246,26 metros.

Para el estudio de estos puentes, y por ende, el de la curva que viene á determinar su forma, se pueden ver las obras de Beránger; el *Cours de routes et ponts*, de M. Mary, y el tratado *Des ponts suspendus*, de Le Moyne (1825).

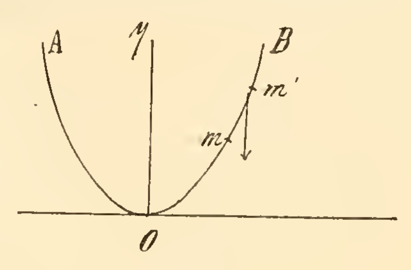


Figura 1.

Ecuación.—Sean A y B (fig. 1) los dos puntos fijos; es claro que la curva AOB, formada por esta cadena, estará en el plano vertical que pasa por A y B. Si suponemos dos ejes trazados en este plano, y si llamamos T la tensión en el punto m y p, la fuerza total que solicita una porción de la cadena, cuya proyección horizontal es igual á la unidad de longitud, se tendrá por las fórmulas (1) (Ver *Funicular)*:

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right)=0, \quad d\left(T\frac{dy}{ds}\right)=p\,dx;$$

de la primera de estas ecuaciones se deduce:

$$T\frac{dx}{ds}=ph,$$

si llamamos ph á la tensión de la curva en el punto más bajo.

Reemplazando en la segunda T por $ph\dfrac{dx}{ds}$, se tendrá:

$$d\,.\,ph\frac{dy}{dx}=p\,dx, \quad \text{ó bien} \quad h\frac{d^2y}{dx^2}=1,$$

tomando á x por variable independiente.

Integrando y representando por C' y C'' dos constantes arbitrarias, se obtiene:

$$y = \frac{1}{2h} x^2 + C'x + C''.$$

Si el origen es el punto más bajo, deberá ser para $x = 0$

$$y = 0 \quad \frac{dy}{dx} = 0;$$

de donde

$$C'' = 0 \quad \text{y} \quad C' = 0,$$

y, por consiguiente,

$$y = \frac{x^2}{2h}.$$

La curva es, pues, una parábola cuyo vértice está en 0 y su eje es vertical.

El valor de T será

$$T = p\sqrt{x^2 + h^2},$$

el cual será un mínimo en 0.

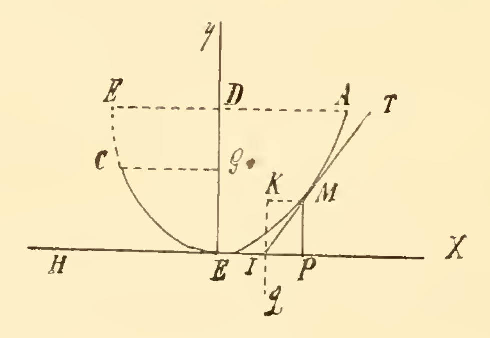


Figura 2.

Construcción de la curva.—Tracemos las horizontales AE, CG (figura 2) y la vertical CE. Las cantidades conocidas son:

$$AE = a, \quad CE = b, \quad ABC = l,$$

y las que se buscan,

$$BD = f, \quad AD = K, \quad DE = K',$$

y la tensión, h.

De la ecuación de la curva

$$2hy = x^2$$

se deduce

$$2hf = K^2, \quad 2h(f - b) = K'^2,$$

de donde

$$2hb = K^2 - K'^2 = a(K - K'),$$

y será, por tanto,

$$K - K' = \frac{2hb}{a}, \quad K + K' = a$$

de donde

$$K = \frac{a}{2} + \frac{bh}{a}, \quad K' = \frac{a}{2} - \frac{bh}{2}.$$

Para la longitud de la curva,

$$ds = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{1}{h}\,dx\sqrt{h^2 + x^2}$$

ó

$$S = \frac{x}{2h}\sqrt{h^2 + x^2} + \frac{h}{2}\,l\,.\left(x + \sqrt{h^2 + x^2}\right) - \frac{h}{2}\,l\,.\,h,$$

haciendo en esta fórmula $x = K$, $x = K'$ y sumando los resultados:

$$2hl = K\sqrt{h^2 + K^2} + K'\sqrt{h^2 + K'^2} + h^2 l\left(K + \sqrt{h^2 + K^2}\right) +$$
$$+ h^2 l\left(K' + \sqrt{h^2 + K'^2}\right) - 2h^2 .\, lh,$$

ecuación que se simplifica cuando los puntos A y C están á igual altura; pues en este caso $b = 0$, $K = K' = \frac{a}{2}$, y será, en consecuencia,

$$hl = K\sqrt{h^2 + K^2} + h^2 l\,\frac{K + \sqrt{h^2 + K^2}}{h}.$$

Puntiforme

Línea que, como la cruciforme (Ver esta voz), de la que es una variante, carece de particular aplicación.

Schoute la nombró *puntiforme carbonosa* por su semejanza con las dobles puntas de los carbones de un mechero eléctrico, y puede estudiarse consultando *Archiv. del Mathematik*, t. II al IV, segunda serie.

R

Rama.

Definición.—Se da este nombre á las partes de una curva que se extiende indefinidamente, sin retroceder sobre si misma, por lo que se dice generalmente *rama indefinida.*

La *rama* como el *arco* (ver esta voz) no son realmente curvas especiales, sino porciones de curvas, y bajo este concepto no debían figurar en este catálogo; pero como tanto éstas como aquéllos tienen tan grande importancia y denominaciones tan distintas, nos ocupamos de ellas, hecha ésta que entendemos necesaria salvedad.

Clasificación.—Las ramas indefinidas de las curvas superiores se dividen en dos especies: *parabólicas* é *hiperbólicas.* Las primeras son aquellas susceptibles de tener por asíntotas parábolas de un orden cualquiera, y las segundas, las que tienen por asíntotas líneas rectas ó hipérbolas de un orden cualquiera.

— Las diferentes especies de ramas de curvas han recibido distintas denominaciones particulares, según su forma, siendo las más usuales las que se comprenden en la siguiente clasificación, hecha por M. Longchamps en su obra *Géometrie Analytique* (segunda parte, página 540, 1884).

Rama serpentina.....

Rama concoidal...........

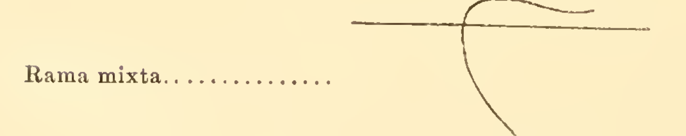
Rama estrofoidal.........

Rama cisoidal............

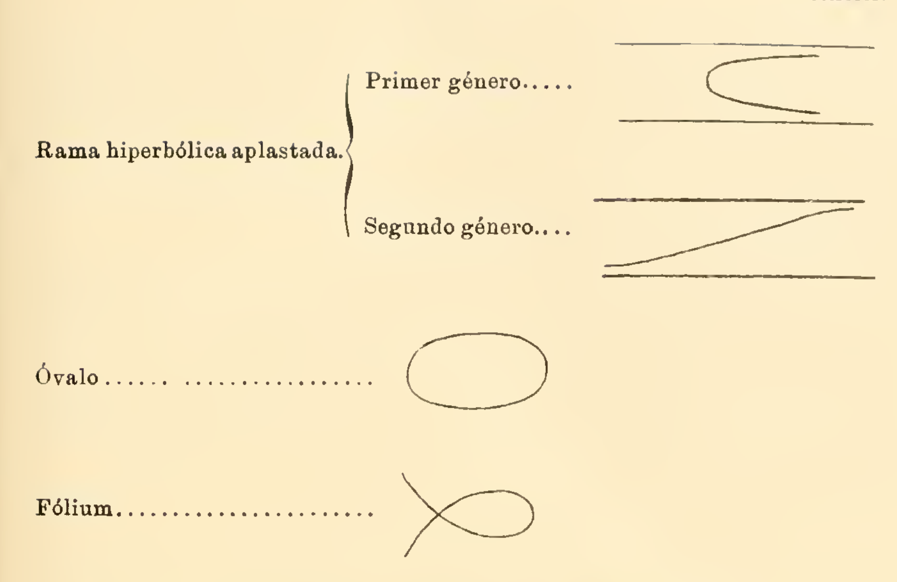
Rama hiperbólica ....
- Primera especie.......... (Inscrita).
- Segunda especie.......... (Mixta).
- Tercera especie.......... (Circunscrita).

Rama parabólica pura.......................................

Rama parabólica inflechada
- Simplemente.............
- Doblemente..............



Rama mixta..............



Historia.—La mayoría de estas denominaciones han sido dadas por Newton *(Enumeratio linearum tertii ordinis*, 1704), y todas ellas, estudiadas é indicadas sus diferentes propiedades por Cramer *(Introduction à l'analyse des lignes courbes algêbriques*, Génova, 1750).

Propiedades.—Estudiadas por separado en este catálogo las diferentes curvas que poseen las ramas de que hemos hecho mención, en los distintos artículos consagrados á cada una de ellas, en dichos artículos se pueden precisar sus particulares propiedades. Aquí, pues, trataremos únicamente de las ramas en sentido general.

— Para comprender la naturaleza de estas ramas, sea x la abscisa; y, la ordenada, y $f(x)$, una función de x, de modo que se tenga:

$$y = f(x)$$

para ecuación de una curva. Dando á x valores cualesquiera, encontramos los correspondientes de y, y obtendremos diferentes puntos de la curva, por medio de los que podemos efectuar su construcción. Si ocurriera que para cada valor positivo de x, la ecuación $y = f(x)$ nos diera dos valores para y de signo contrario, esta circunstancia nos daría á entender que la curva tiene dos ramas, una situada á la derecha del eje de las x, y la otra, á la izquierda; y si, además, los valores de y crecen al mismo tiempo que los de x, que estas dos ramas se extienden indefinidamente. Si se verificase además que para valores negativos de x, la ecuación $y = f(x)$ nos diera, así-

mismo, dos valores para y de signo contrario, se tendrían otras dos ramas, extendiéndose igualmente á la derecha y á la izquierda del eje de las x, si bien por la parte de las x negativas. Si haciendo x negativa, $f(x)$ se hiciera imaginaria, era señal de que la curva carecía de ramas del lado negativo del eje de las abscisas.

Ejemplos.—Sea la ecuación de una curva $y^2 = px$, que nos da $y = \pm\sqrt{px}$. A cada valor de x corresponden dos valores para y, iguales y de signo contrario; el positivo corresponde á las ordenadas situadas á la derecha del eje de las x, y el negativo, á las de la izquierda. Tendremos, pues, dos ramas diferentes, y como y aumenta indefinidamente á la manera que lo hace x, estas dos ramas serán indefinidas.

Si x es negativa,

$$y = \pm\sqrt{-px};$$

luego la curva no tiene ramas en el sentido de las x negativas, por ser $\sqrt{-px}$ una cantidad imaginaria. Esta curva es la *parábola apoloniana.*

— Sea la ecuación de la curva

$$y^2 = \frac{A^2}{B^2}(Bx + x^2),$$

que nos da

$$y = \pm\frac{A}{B}\sqrt{(Bx + x^2)},$$

y se tendrán evidentemente dos ramas del lado de las x positivas. Si se hace á x negativo, la ecuación anterior será

$$y = \pm\frac{A}{B}\sqrt{(x^2 - Bx)}.$$

Cantidad que será imaginaria, mientras Bx sea mayor que x^2; cero en el caso de ser $x^2 = Bx$, ó bien si $x = B$. Así, pues, para los valores de x, comprendidos entre O y B, no se tendrán para y valores reales; pero para valores mayores de B, los que se obtengan para y serán reales; lo cual nos dice que á la distancia B del origen y de la parte negativa del eje de las x empiezan dos ramas que se

extienden al infinito, á la derecha é izquierda de este eje. Esta curva tiene, por consiguiente, cuatro ramas indefinidas; es, por lo tanto, una *hipérbola apoloniana.*

Rebajado.

Definición.—Se llama arco *rebajado* aquel cuya altura ó flecha es menor que la semi-luz.

Clasificación.—Se distinguen el *carpanel* y el *escarzano* (ver estas voces), según le constituya diferentes arcos de círculo ó uno sólo, y también se les designan por la relación de la flecha á la luz; así se dice, rebajado al tercio, al quinto, etc.

Historia.—Esta denominación de *rebajado* se encuentra usada por Caveda *(Ensayo Histórico de la Arquitectura Española*, pág. 74), habiéndosele conocido también con el nombre de *rebaxado* (Bails) y con el de *disminuído* (Alberti, *Arq. trad. por Lozano*, libro I, cap. VII).

Aplicaciones.— Esta clase de arcos ha sido muy usada en los dos primeros períodos del estilo románico y último del ojival, y en cuanto á sus variedades *carpanel* y *escarzano* en los artículos respectivos se manifiestan las que ellos hoy tienen.

Régimen anual.

Definición.— Se llama asi, en Hidráulica, á la curva de los gastos (ver esta voz) de un curso de agua, de todo un año.

Determinación.— Consiste esta determinación en el procedimiento por medio del cual podemos encontrar los gastos medios, reemplazando por un cierto número más pequeño el número enorme de las ordenadas que presenta la curva de los gastos en función del tiempo, tal como de ordinario se considera, y que, representada en el papel, según todas las observaciones hechas en el año, sería poco á propósito para ciertas operaciones, como son: el estudio de proyectos de depósitos para riegos, de compuertas, canales, etc.

A este efecto: en lugar del gasto por segundo, se tomará el gasto por día, por ejemplo, y de este modo, la curva anual se compondrá sólo de 365 ordenadas, separadas por abscisas iguales, lo cual no quita el conservar las curvas de los gastos por segundo, especialmente las que corresponden á grandes crecidas, á fin de tenerlas á mano para casos en que pudieran ser necesarias.

Veamos ahora cómo de las curvas obtenidas para los gastos por

segundo se pasa á la que buscamos, de régimen anual ó curva del conjunto.

Supongamos que durante uno de los dias del año el curso de agua ha gastado un cubo total Q, se tendría:

$$Q = \int_{t_0}^{t_u} q\,dt,$$

siendo t_0 y t_u los tiempos correspondientes al principio y al fin del día.

Esta integral se calcula muy fácilmente sustituyendo á la curva de los gastos por segundo, de la que ella representa el área comprendida entre las abscisas t_0 y t_n un polígono, cuyas ordenadas de sus vértices sean los valores $q_0, q_1, q_2 \ldots\ldots q_n$ que corrrespondan sobre esta curva á las abscisas $t_0, t_1, t_2 \ldots\ldots t_n$; de manera que se tendrá una serie de trapecios que tienen por base las ordenadas $q_0, q_1, q_2, \ldots\ldots q_n$ y por alturas los intervalos sucesivos de los tiepmos $t_1 - t_0$, $t_2 - t_1 \ldots\ldots t_n - t_{n-1}$, y se deducirá:

$$Q = \frac{q_0 + q_1}{2}(t_1 - t_0) + \frac{q_1 + q_2}{2}(t_2 - t_1) \ldots\ldots + \\ + \frac{q_{n-1} + q_n}{2}(t_n - t_{n-1}).$$

Si se calculan de este modo los cubos totales gastados por cada día del año, se tendrá la nueva curva de los *gastos por día,* reemplazando á la de los *gastos por segundo*, la cual sólo tendrá 365 ordenadas en lugar del excesivo número que nos daría una curva de gasto por segundo en un año; y ahora esta curva de gasto por día se puede también simplificar suprimiendo las ordenadas intermedias cuando el gasto va creciendo ó disminuyendo casi uniformemente entre ciertas ordenadas extremas.

Se podrá simplificar todavía más siguiendo el mismo procedimiento y tener la *curva de gasto por semana*, etc.

Reglamentación.

Definición.—Curva que sirve para reglar los movimientos simultáneos de la corredera y del émbolo en las máquinas de vapor.

Determinación.—En la técnica de las máquinas de vapor es de

sumo interés determinar el *avance de la corredera*, ó sea el espacio recorrido por esta pieza á contar de su posición media, cuando el émbolo empieza su carrera. El movimiento de la corredera y del émbolo están indudablemente ligados por medio de una cierta ley, la que se puede representar, ya analítica, ya gráficamente, y construir la curva lugar geométrico de los puntos que tienen por coordenadas las distancias del émbolo, en un instante dado, á su posición media, y la de la corredera en una situación dada á su posición media. La curva descrita por este procedimiento se denomina *curva de reglamentación*, la cual se asemeja algún tanto á ser una elipse.

—Mr. Morin ha ideado un aparato, por virtud del cual la máquina traza su curva de reglamentación.

— De esta línea se deducen todas las circunstancias de la distribución en un instante cualquiera.

— Cuando se proyecta una máquina se pueden calcular, por medio de esta línea, trazada de antemano, la posición más conveniente que deben ocupar la corredera para el momento en que el émbolo empieza su movimiento, y también, una máquina construida, serán determinadas las circunstancias todas de su marcha construyendo su curva de reglamentación.

— Para el trazado de esta linea y su particular estudio, pueden consultarse, entre otras, las obras siguientes: Pascal-Dulos, *Cours de Mécanique*, t. V; Morin, *Leçons de Mécanique pratique*, t. III; Perdonnet, *Traité elementaire des chemins de fer*, t. II, etc.

Reptoria.

Definición.—Si una curva, B, se mueve paralelamente á sí misma permaneciendo siempre tangente á otra curva fija A, se dice que la B recorre la curva A. El lugar geométrico descrito por un punto cualquiera de la primera curva se llama *reptoria*.

Clasificación.—La curva móvil puede recorrer á la fija exterior ó interiormente, según que en el curso del movimiento, ambas curvas estén situadas á distinto lado de la tangente ó al mismo. Según uno ú otro caso, la reptoria se llama *exterior* ó *interior*.

Historia.—Los primeros estudios de esta curva se encuentran en las obras de Bernouilli, *Opera Omnia* (t. I, artículos 26, 72, 74 y 77 á 83), en la cual se determinan propiedades muy bellas, que llamaron poderosamente la atención de Leibnitz, *Leibnitii et Bernoullii, Commercium philosophicum et mathematicum*, y particularmente el teorema último de Bernouilli sobre el movimiento de reptación

(motus reptorius) expuesto en su *Carta á Leibnitz* (1709), carta que concluye con las palabras *Alia mirabiliora in aliam occasionem refero.*

Denominaciones.—Bernouilli denominó *amplitud* de un arco, el ángulo formado por las normales trazadas á sus extremos, y considerando aquí esta significación y no á la que esta palabra tiene en la teoría de las funciones elípticas, se denominará *centro de amplitud* el punto de encuentro de las normales extremas.

En este supuesto, en el movimiento de reptación, los diversos puntos de un arco de la curva móvil están dirigidos sucesivamente al contacto sobre los diversos puntos de otro arco de igual amplitud de la curva fija. Estos dos arcos se llaman *arcos generadores* del arco correspondiente de la reptoria.

Propiedades.—En todo movimiento de reptación puntos cuales-

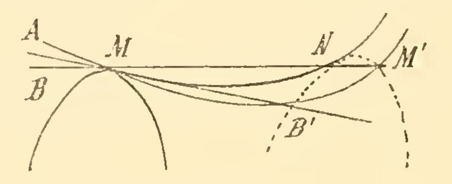


Figura 1.

quiera del plano de la curva móvil describen reptorias iguales y semejantemente dispuestas.

— La tangente en un punto de la reptoria es paralela á la tangente que está actualmente, ó en aquel momento común, á las dos curvas generatrices.

— El arco de la curva fija y el arco correspondiente de la reptoria tienen sus concavidades dirigidas hacia la misma región del plano, con relación á dos tangentes paralelas cualesquiera. Por consiguiente, de ser las curvas generatrices convexas, la reptoria exterior lo será también.

— Un arco de reptoria tiene la misma amplitud que cualquiera de los arcos generadores.

— La reptoria engendrada por la curva A (fig. 2), recorriendo la curva B, no difiere sino por la situación de la reptoria engendrada por B recorriendo A.

— Un arco de reptoria es igual á la suma ó diferencia de sus arcos generadores, según que la reptoria es exterior ó interior.

— El radio del círculo osculador en un punto de esta curva es igual

á la suma algebraica de los radios de los círculos osculadores de las curvas generatrices en los puntos correspondientes.

— La longitud de un arco de esta curva, tomado sobre su evoluta, es igual á la suma algebraica de las longitudes de los arcos corres-

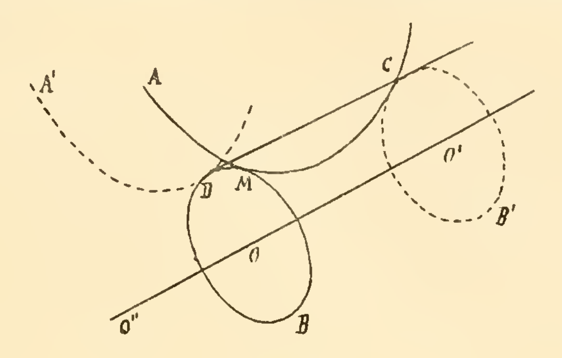


Figura 2.

pondientes, tomados sobre las evolutas de las dos curvas generatrices. Esta propiedad fué conocida por Leibnitz y Bernouilli (*Commercium mathematicum*, t. II. pág. 152).

— Sea AB (fig. 3) un arco de curva, M su medio de amplitud, es

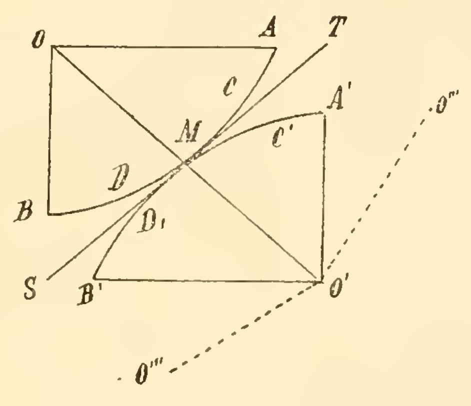


Figura 3.

decir, el punto que le divide en dos arcos de igual amplitud; TS la tangente á AB en el punto M; $A'B'$ un arco simétrico de AB con relación á TS. Si se hace recorrer $A'B'$ sobre su igual AB, se dice que el arco AB es recorrido *sub-contrariamente* sobre sí mismo.

— La reptoria engendrada se llama también reptoria *sub-contraria*.

— El punto M se llama centro de *reptación*. (Propiedades debidas á Mr. Pronhet.)

— Si la curva propuesta es algebraica, lo será la reptoria. Si aquélla es un círculo, la reptoria lo es también.

Resistencia.

Definición.—Si á partir de las diferentes ordenadas que determinan el eje hidráulico (ver esta voz) de una corriente, se toman alturas proporcionales á la velocidad del agua en la vertical correspondiente, se obtiene una serie de puntos, que unidos por un trazado continuo, dan lugar á la línea llamada de *resistencia*.

Ecuación.—Llamando F la pendiente absoluta de esta línea, y H la del eje hidráulico; y representando por h_0, h_1, h_2..... las alturas debidas á la velocidad media que corresponde á cada sección; se tendrá

$$H + h_0 = F + h_n \quad \text{ó} \quad \Delta H = \Delta F + \Delta h,$$

y también

$$dH = dF + dh,$$

ecuación en la cual será

$$dF = fdl,$$

de donde resulta que el valor de f en un punto cualquiera, ó sea la pendiente relativa á este punto, es igual á la inclinación de la tangente á la curva de resistencia en dicho punto.

— La denominación de esta línea se debe á Mr. Courtois, *Traité des moteurs*. T. II, pág. 223).

Retroceso (Líneas de).

Definición.—Se da este nombre al lugar de los puntos situados sobre una superficie, que son de retroceso, respecto de curvas arbitrarias trazadas en la misma.

Historia.—El estudio particular de estas líneas ha sido hecho por Mr. Benjamín Amiot, *Mémoire sur les points singuliers des surfaces*, 1846, y puede verse también *Mémoires de l'Académie de Bruxelles*. Tomo XXI y *Nouvelles Annales*, 1886, pág. 65 á 83.

Aplicaciones. — Estas líneas no ofrecen interés determinado ninguno.

Retrogradación.

Definición.—Se da este nombre al arco de la eclíptica que parece describir un planeta en sentido contrario al orden de los signos.

Particularidades.—La marcha de los planetas ofrecen, en apariencia, particularidades notables que ningún sistema astronómico pudo explicar de una manera satisfactoria hasta los descubrimientos de Keppler.

A estos astros se les ve muchas veces marchar en el sentido directo de O. á E. rápidamente, perder poco á poco su velocidad, aparecer inmóviles, tomando luego un movimiento retrógrado, para volver otra vez á avanzar en el sentido directo; pero siendo mayor su movimiento en el sentido directo que en el retrógrado, los planetas concluyen por recorrer toda la esfera celeste.

— Para explicar estos fenómenos, los antiguos consideraban que los planetas se movían en círculos, cuyos centros giraban sobre otros círculos, formando así unas figuras de círculos entrelazados, que aumentaban á cada irregularidad que de nuevo se observaba. *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1709. (Figuras dadas por Cassini para la ruta que siguen Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno alrededor de la Tierra, supuesta inmóvil en el centro del mundo.)

— Hoy, conocidas las leyes de Keppler, estos fenómenos se explican perfectamente, y las perturbaciones se saben son debidas, entre otras causas, á la de que los nodos de sus órbitas, que están sobre la eclíptica, gozan de ciertos movimientos retrógrados, así como las inclinaciones de las órbitas, sea entre ellos, sea con relación á la de la eclíptica, produciendo á la larga ciertas variaciones.

— El cuadro adjunto pone de manifiesto los valores de los arcos de retrogradación para los diferentes planetas y datos que hacen conocer los límites de estas excursiones y de su duración.

PLANETAS	ARCO de retrogradación.	DURACIÓN EN	DISTANCIA del Sol á la estación.	TIEMPO entre dos conjunciones.
Mercurio ..	9°,22′ á 15°,44′	23^d, 2^h á 21^d,12^h	14°,49′ á 20°,51′	116 días
Venus.....	14 ,35 á 17 ,12	40 ,21 á 43 ,12	27 ,40 á 29 ,41	584 »
Marte	10 , 6 á 19 ,35	60 ,18 á 80 ,15	128 ,44 á 146 ,37	780 »
Júpiter....	6, 51 á 9 ,59	116 ,18 á 122 ,12	113 ,35 á 116 ,42	399 »
Saturno....	6 ,41 á 6 .55	138 ,18 á 135 , 9	107 ,25 á 110 ,46	378 »
Urano.....	3 ,36	151	103 ,30	370 »

Rodonáceas.

— Curvas cuyo nombre es debido á Guido Grandi, que las trata en su obra *Flores Geometrici ex rhodonearum et clœliarum curvarum descriptione resultantes* (Venecia, 1728). También se dice *rosaceas* y *rodoneas*.

— La ecuación de estas líneas se encuentra, en coordenadas de Sacchi, en la obra *Sulla Geometria Analitica delle linee piane (Opuscolo di Giussepe Sacchi*, Pavía, 1854), en la cual su autor establece un particular sistema de coordenadas, que es aquel en que considerando un arco de curva plana AMB, desde un punto fijo O tomado como polo, baja una perpendicular OP á la tangente á la curva trazada en M, las coordenadas son OP y el radio vector OM.

Si OA es un eje polar (estando A sobre la curva); OT, una perpendicular á OM y terminada en la tangente en M, de manera que T está sobre la tangente; prolongando la perpendicular OT hasta que en N encuentre la normal trazada en M, que es paralela á OP, y haciendo

$$OP = p \quad OM = r \quad \dot{w} = MOA,$$

bastará en las ecuaciones

$$(r - b)^m = a^m . \cos . nw$$

$$p^2 [m^2 + p^2 (r - b)^{2m-2} + n^2 a^{2m} - n^2 (r - b)^{2m}] = m^2 r^4 (r - b)^{2m-2}$$

que se encuentran en la citada obra de Sacchi, hacer:

$$b = 0 \quad \text{y} \quad m = 1$$

para obtener las ecuaciones de las rodonáceas de Grandi.

— Ver *Leibnizens math. Schriften*, herausgegeben von Gerhardt. T. IV, pág. 222 y siguientes. El *Annuaire de l'Association française*, (1893, pág. 192) y *Journal de Mathématiques Spéciales* (1893, página 173).

Rœmer (Curva de).

Definición.—Curva directriz para el perfil de los dientes de ciertas ruedas de ángulo, en las cuales la relación de sus velocidades angulares está en razón de la ley de las áreas.

Historia.—Rœmer, astrónomo danés, fué el inventor de un sistema de ruedas, cuyo objeto es el de producir materialmente el movimiento efectuado por los cuerpos planetarios alrededor del sol. Las obras de Rœmer fueron publicadas por Horrebov en 1736 con el título de *Basis astronomiæ.*

Ecuación.—Sean ST, $S'T'$ (fig. 1) los dos ejes paralelos: se cortan estos ejes por una secante cualesquiera SS' y se describen dos super-

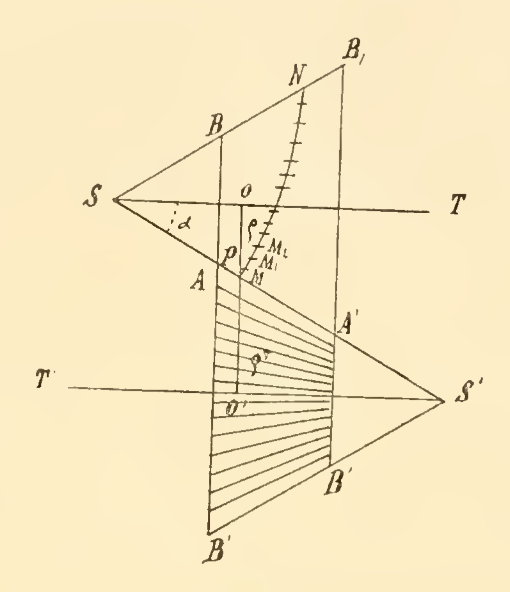


Figura 1.

ficies cónicas de revolución, haciendo girar sucesivamente la recta SS' alrededor de ST y luego alrededor de ST'. Estas dos superficies se tocan según la arista SS'.

Sobre la superficie del cono $S'T'$ se colocan dientes cónicos equidistantes $m\,n$, $m'n'$..... convergentes hacia el vértice S'.

Sobre el cono S se situará, en lugar de los dientes conjugados, simples salientes que ocupen pequeñas longitudes de las generatrices M, M_1, M_2..... repartiéndolos según una cierta línea NP que es la curva que tratamos de determinar.

Cuando el contacto de los dos sistemas giratorios tiene lugar sobre un diente P, la transmisión se verifica como si el engranaje se redujera á las dos circunferencias primitivas OP, $O'P$, cuyos radios serían las longitudes $P\,O$, $P\,O'$ perpendiculares trazadas desde P sobre los ejes paralelos.

La relación de las velocidades angulares es precisamente igual á la relación de estos radios, ó sea

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{OP}{O'P}.$$

Para encontrar la teoría de este mecanismo, supongamos que r y θ sean las coordenadas que determinan un punto cualquiera de una generatriz del cono s; contándose θ alrededor del vértice á partir de una generatriz cualquiera, desenvolviéndose, y r á partir del vértice. Busquemos la ecuación polar de la curva en r y θ, que, arrollada sobre el cono, produce para la relación de las velocidades angulares una ley de variación asignada y arbitraria

$$\frac{\omega}{\omega'} = f(\varphi),$$

siendo φ el ángulo total medido á partir de un meridiano arbitrario que define una generatriz sobre la superficie en el espacio, y por consiguiente, en particular, el ángulo de rotación de la rueda en curva, mientras que la rueda de ángulo conserva una marcha uniforme.

Si Δ es la distancia de los ejes; ρ y ρ', los radios primitivos; α, el ángulo de SS' con los ejes, se tendrá sucesivamente

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{\rho'}{\rho} = \frac{\Delta - \rho}{\rho} = \frac{\Delta - r \operatorname{sen}.\alpha}{r.\operatorname{sen}.\alpha},$$

y evaluando de dos maneras el elemento de sección recta

$$\rho.d\varphi = r.d\theta,$$

de donde

$$d\varphi = \frac{r}{\rho}d\theta = \frac{d\theta}{\operatorname{sen}.\alpha},$$

é integrando

$$\varphi r \frac{\theta}{\operatorname{sen}.\alpha}.$$

La ecuación del problema será, en definitiva,

$$\frac{\Delta - r . \operatorname{sen} . \alpha}{r . \operatorname{sen} . \alpha} = f\left(\frac{\theta}{\operatorname{sen} . \alpha}\right),$$

y se tendrá, eliminando, para ecuación de la curva buscada:

$$r = \frac{\Delta}{\operatorname{sen} . \alpha} . \frac{1}{1 + f\left(\frac{\theta}{\operatorname{sen} . \alpha}\right)}.$$

—Los planos BB', $B_1 B_1'$ limitan lateralmente las dos superficies cónicas, la relación de velocidades angulares puede variar desde

$$\frac{AB'}{AB} \text{ á } \frac{A'B_1}{A'B'_1}.$$

Casos particulares.—Sea el caso de la transmisión sinusoidal

$$\frac{\omega}{\omega'} = a + \tau \cos . n\varphi$$

la curva directriz será

$$r = \frac{\frac{\Delta}{\operatorname{sen} . \alpha}}{1 + a + \tau \cos . \left(\frac{n}{\operatorname{sen} . \alpha} \theta\right)}.$$

Esta curva especial es el perfil de los dientes de transmisión variable derivadas de las secciones cónicas.

Si se dispone la abertura del cono de modo que

$$\operatorname{sen} . \alpha = n,$$

la curva vendrá á ser una sección cónica.

Para $1 + a + b = 0$ se encuentran los dientes que derivan de la parábola y la parábola misma; si bien, en este caso se tiene la relación $\operatorname{sen}.\alpha = n$.

— La directriz capaz de reproducir el movimiento de los cuerpos planetarios, no es más que un caso particular de las curvas obteni-

das en este ejemplo general. La ley de las áreas viene, con efecto, á ser: la velocidad angular de los planetas varía en razón inversa del cuadrado de las distancias de los planetas al sol, distancias que son los radios vectores de una elipse. Este radio tiene por expresión

$$\frac{p}{1 - e \cdot \cos \cdot \varphi}$$

La velocidad angular planetaria deberá variar proporcionalmente á $(1 - e \cdot \cos \varphi)^2$, y si se supone la velocidad de la rueda, de ángulo constante, se deberá tener

$$\frac{\omega}{\omega'} = K(1 - e \cdot \cos \varphi)^2 = K(1 - 2e \cdot \cos \cdot \varphi)$$

desechando el cuadrado de la excentricidad, que es muy pequeño para los planetas y los satélites.

— Para más detalles puede consultarse la obra *Traité des mécanismes* de M. Haton de la Goupilliére (pág. 162).

Rolle (Curva de).

Línea que tiene por ecuación

$$xy^2 = a(y + x).$$

G. de Lonchamps. *Journal de Mathématiques Spéciales*, 1896, página 32 y 34.

Róricas.

Definición.—Se da el nombre de líneas róricas á las que se producen en la superficie de un vidrio por la producción continua de chispas.

— Estas líneas se hacen perceptibles, soplando sobre la misma superficie hasta empañarlas.

Roseta.

Definición.—Curva trazada en el plano de otra, dando al contorno de ésta una forma ondulada.

Clasificación.—Se distingue la roseta *circular, elíptica*, etc., según

que la curva cuyo contorno se ondula sea un círculo, una elipse, etcétera.

También se ha dado el nombre de *rosetón* al lugar geométrico de los pies de las perpendiculares bajadas desde el vértice de un ángulo á una recta de longitud dada, inscrita siempre entre los lados de este ángulo.

Historia.—La teoría completa de las curvas de esta clase, trazadas en un círculo, fué dada por Edwardo Waring en su obra *Propietates algebraicarum curvarum* (1772, problema XV, pág. 56). También se pueden ver en *Journal Crelle* (pág. 387, 1837) algunos teoremas notables de E. F. Augusta, y otros trabajos de Mr. Breton (*Nouv. Ann.*, tomo XIV, pág. 13), etc.

Propiedades.—Si en el plano de un círculo se forma una roseta de $4n + 2$ radios terminada en la circunferencia, la suma de los radios de rango impar es igual á la suma de los de rango par, cualquiera que sea el radio que se tome para el primero.

— Si en el plano de un círculo se construye una roseta de $4n + 2$ radios terminados en la circunferencia, la suma de los radios impares elevados á una potencia entera cualquiera, p, es igual á la suma de los radios pares elevados á la misma potencia, en tanto que se tenga $p < 4n + 2$, siendo p impar.

— El conjunto de todos los diámetros de una curva algebraica de ecuación irreducible forma una roseta elíptica.

Aplicaciones.—Esta curva forma el contorno del disco que se usa en Mecánica, principalmente en el torno de labrar.

En el trazado mecánico de las curvas, se llama por extensión *roseta* á la curva que describe un punto determinado de la pieza móvil, para que otro punto determinado de esta misma pieza trace una curva dada.

Así, por ejemplo, si la pieza móvil está provista de una ranura longitudinal, xx, en la cual se encaja una clavija fija, O, de manera que esta pieza pueda girar en su plano alrededor del punto O, resbalando á lo largo de la clavija, la curva AMB que debe describir un punto determinado M de la pieza, para que otro punto m de esta pieza, invariablemente unido al primero, describa una curva dada, amb, será lo que se llama la *roseta* de amb.

Trazado.—Para obtener esta roseta por puntos, se tomará sobre la curva dada un punto cualquiera, m; se describe sobre la recta Om un segmento capaz del ángulo constante, y dado OMm se describe desde el punto m como centro un segundo arco de círculo con la distancia constante mM por radio; la intersección de los dos arcos de

círculo nos dará el punto M correspondiente á m. Repitiendo la construcción para otras posiciones del punto m sobre amb, se obtendrán tantos puntos como se quieran de la roseta AMB.

El aparato que representa la figura es sólo una modificación de la regleta de La Condamine.

Se puede señalar que si los tres puntos O, m, M están en línea

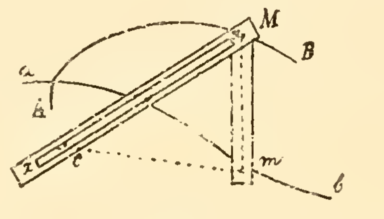


Figura 1.

recta, la diferencia de los radios vectores de las dos curvas será constante é igual á la distancia Mm; cada una de estas curvas será en este caso la *concoide* de la otra.

Si una de ellas fuese una línea recta, la otra sería la concoide ordinaria.

Para más detalles ver *Traité de Cinematique* de M. Laboulaye, y en él está el particular estudio de la roseta llamada de *Condamine*.

Ruletas.

Curvas descritas á modo de las cicloides por un punto ligado á una curva móvil rodando sin resbalar sobre otra curva fija. (Ver *cicloides* y *epicicloides.)*

— A la engendrada por el foco de una elipse ó de una hipérbola cuando la generatriz rueda sin resbalar sobre una recta indefinida que le es tangente, se nombra *ruleta de Delaunay*.

— Cuando la curva fija es una curva alabeada, la curva engendrada por un punto de otra que rueda sin resbalar sobre aquella se llama *ruleta alabeada*.

— Pueden consultarse, entre otros, los estudios de Gigon y de Césaro, *Nouv. Ann.* 1868 y 1888; el *Calcul differentiel* de Lamarle y el *Journal de Liouville*, T. VI, 1841.

S

Salida.

Definición.— Curva de *salida* se llama á una de las dos curvas de intersección de dos superficies cuando existe penetración. (Ver *entrada.*)

Secantoide.

Definición.—Curva cuya ordenada es la secante geométrica del arco tomado sobre un círculo cuyo radio es igual á la absisa.

Ecuación.— Su ecuación en coordenadas rectangulares es:

$$y = R \,.\, \sec \,.\, \frac{x}{R}$$

Si $R = 1$, toma la forma más sencilla

$$y = \sec \,.\, x.$$

Forma.— Como la tangentoide (ver esta voz) se compone de un número infinito de ramas iguales y tiene por asíntotas las rectas

$$x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad x = +\frac{\pi}{2}.$$

— En el punto $x = 0$ é $y = 0$ es tangente al eje de las absisas.

Secciones cilíndricas.

Definición.—Reciben este nombre las curvas que se obtienen cortando un cilindro cualquiera por un plano.

Casos particulares.—Si el cilindro es circular recto, la sección plana

es una elipse. En efecto: sea Ox (fig. 1) la traza del plano secante sobre el meridiano principal (plano que pasa por el eje del cilindro), y Oy una perpendicular levantada en el punto O, al plano del meridiano principal; se puede observar que esta última recta está situada

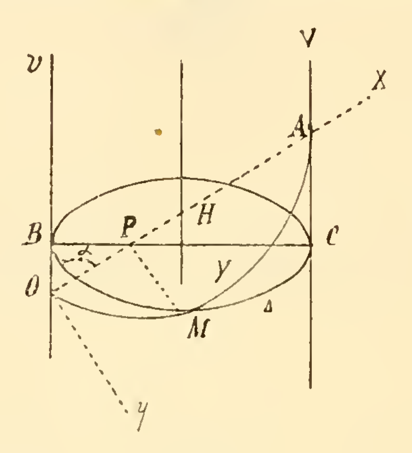


Figura 1.

en el plano secante y se trata de determinar la ecuación de la curva intersección en el sistema de los ejes yox.

Sea M un punto cualquiera de γ; por M se trazará un plano perpendicular al eje del cilindro, y sea Δ el círculo obtenido. Si α es la inclinación del plano secante, y R, el radio del cilindro, se tendrá:

$$MP = BP \,.\, CP$$

$$BP = x \,.\, \text{sen} \,.\, \alpha; \qquad CP = (OA - x)\, \text{sen} \,.\, \alpha = \left(\frac{2R}{\text{sen} \,.\, \alpha} - x\right) \text{sen} \,.\, \alpha,$$

y, por consiguiente, la ecuación de γ será:

$$y^2 = x \,.\, \text{sen} \,.\, \alpha\, (2R - x \,.\, \text{sen} \,.\, \alpha)$$

ó

$$y^2 + x^2 \,.\, \text{sen}^2 \,.\, \alpha = 2Rx \,.\, \text{sen} \,.\, \alpha,$$

y también,

$$y^2 + (x \,.\, \text{sen} \,.\, \alpha - R)^2 = R^2.$$

La curva que corresponde á esta ecuación es una elipse, y su cen-

tro tiene por coordenadas $R . \cos e . \alpha$ y o; es decir, está en el punto H medio de OA. Los ejes de la elipse son $2R$ y $\dfrac{2R}{\operatorname{sen} . \alpha}$.

De lo expuesto se deduce que toda elipse puede ser considerada como obtenida por la sección de un plano con un cilindro recto de base circular, cuyo radio sea igual al eje pequeño de γ', y cortarle por un plano perpendicular á un meridiano de la superficie, cuya traza sobre este meridiano esté tomada de manera que la parte intersectada por las dos generatrices principales U y V del cilindro sea igual al eje mayor de γ'.

—A Mr. Quetelet y Mr. Dandelin se debe un método geométrico, muy elegante, para demostrar, por consideraciones puramente geométricas, la proposición anterior.

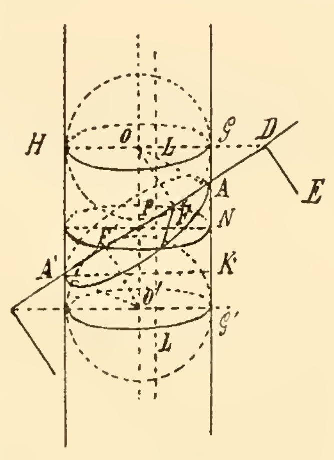


Figura 2.ª

Inscribamos, como se ve en la figura 2, dos círculos tangentes á AA' y á las generatrices principales HH', GG'. Si hacemos girar la figura alrededor de OO' (á excepción de la recta AA'), se engendrarán las superficies siguientes: 1.ª, el cilindro propuesto; 2.ª, dos esferas que son tangentes á esta superficie, respectivamente, á lo largo de los círculos HG, $H'G'$.

Por otra parte, el plano II, siendo perpendicular al meridiano principal, la recta OF, que es perpendicular á AA', será normal á II; este plano es, por lo tanto, tangente á las esferas O y O'.

Ahora bien; siendo iguales las tangentes trazadas desde un punto á una esfera, se tendrá:

$$MF' = ML, \quad MF' = ML',$$

y por consiguiente,

$$MF + MF' = LL' = HH'.$$

Luego el lugar descrito por el punto M, es, pues, una elipse, cuyos focos son los puntos F y F''.

—Si se prolonga AA' y HG, estas rectas se cortarán en el punto D y la distancia que corresponde al foco F, es una recta DE, que pasa por D y es perpendicular al meridiano principal.

Ahora bien; como

$$\frac{DG}{DH} = \frac{DA}{DA'} = \frac{AG}{A'H},$$

y como

$$AF = AG, \quad A'H = A'F,$$

y se sabe que

$$\frac{DA}{DA'} = \frac{FA}{FA'},$$

se ve que el punto D es el punto conjugado armónico de F, con relación á los vértices A y A'. La directriz pasa, por consiguiente, por el punto D, y como está situada en el plano II y es perpendicular á AA', esta directriz será la recta DE. (Longchamps)

Secciones cónicas.

Definición.—En general reciben este nombre las diferentes curvas que se obtienen cortando un cono cualquiera por un plano, si bien se ha particularizado esta expresión para las curvas de *segundo grado* ó *cónicas.*

Clasificación.—Nos ocuparemos primero de las *secciones cónicas en general* y luego de las *secciones cónicas* del cono recto.

Historia.—Los antiguos nombraban secciones cónicas sólo á la elipse, hipérbola y parábola, sin sus variantes, y le daban simplemente el nombre de *cónicas.*

Nosotros llamamos al lector á la voz *cónica* en que desenvolvemos la historia, ecuación, etc., de estas líneas; tocándonos en este artículo expresar la identidad de estas curvas con las de segundo grado, cuya demostración geométrica, como se deja dicho en *cónicas,* se debe á Quetelet y Dandelin.

* * *

Secciones cónicas en general.—No son curvas que hayan recibido nombre especial, las que en un cono de directriz plana cualquiera se obtienen por la sección de un plano, y sólo mencionaremos la relación que guarda una sección producida en esta clase de superficies con la curva de su base, considerando la *transformación por perspectiva* que Poncelet ha descubierto y expuesto en su *Traité des propietés projectives.*

Propiedades.—Sea una curva U (fig. 1), en el plano P; sea S un punto tomado fuera de P y que se nombra *punto de vista.* Consideremos un plano P' y llamemos Δ la recta intersección de P y de P'.

Al punto A del plano P corresponderá sobre P' un punto A', intersección de este plano y de la recta SA.

A una recta ABC, corresponderá una recta $A'B'C'$, intersección del plano P' y del plano $S-ABC$; y estas dos rectas correspondientes se cortarán en el punto M sobre Δ.

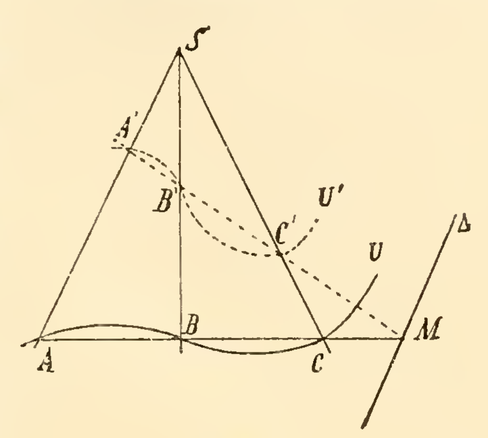


Figura 1.

En general; á una curva U corresponde otra curva U'; las dos curvas U, U' cortan á Δ en los mismos puntos, y no tan sólo serán del mismo orden y de la misma clase, sino que tendrán igual el número de sus puntos múltiplos.

De aquí se deduce que, en particular, á una curva de segundo grado corresponderá otra de segundo grado, y, por tanto, que las secciones planas en los conos de segundo orden serán elipses, hipérbolas ó parábolas.

Secciones cónicas del cono recto.—*La sección plana de un cono circular recto es una elipse cuando el plano secante encuentra las dos generatrices principales,* SU *y* SV, *en dos puntos que determinan un segmento de recta, conteniendo un punto,* S, *del eje.*

Si el punto G *es exterior al segmento, la sección es una hipérbola; y será una parábola, si la traza del plano secante es paralela á una de las generatrices principales.*

En efecto; se tendrá (fig. 2); $y^2 = BP.\ CP$; y como los triángulos OBP y ACP, nos dan

$$\frac{BP}{\text{sen}\ .\ \alpha} = \frac{x}{\cos\ .\ \theta} \quad \text{y} \quad \frac{PC}{(\text{sen}\,\alpha + 2\theta)} = \frac{OA - x}{\cos\ .\ \theta},$$

tendremos, haciendo $OS = d$,

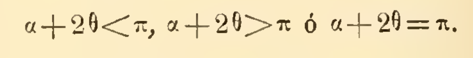
$$\frac{OA}{\text{sen}\ .\ 2\theta} = \frac{d}{\text{sen}\,(\alpha + 2\theta)}$$

ó

$$y^2 \cos^2\theta = x \,\mathrm{sen}\,.\,\alpha \,\{d\,.\,\mathrm{sen}\,.\,2\theta - x\,\mathrm{sen}\,(\alpha + 2\theta)\}.$$

El ángulo α está comprendido entre o y π; por lo tanto, *sen.* α es positivo, y el género de la cónica que corresponde á esta ecuación depende únicamente de sen $(\alpha + 2\theta)$.

La sección es una elipse, una hipérbola ó una parábola, según que:



$$\alpha + 2\theta < \pi, \quad \alpha + 2\theta > \pi \quad \text{ó} \quad \alpha + 2\theta = \pi.$$

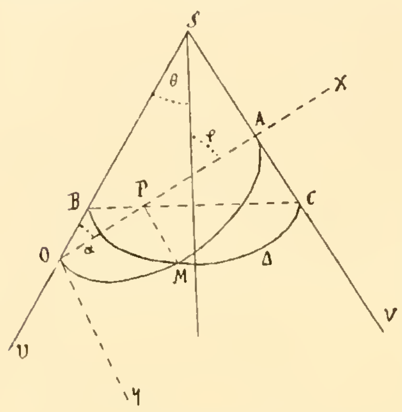


Figura 2.

— Para la demostración geométrica, sea SAA' la sección principal con respecto al plano secante. Consideremos el triángulo SAA' el círculo inscrito O y el circuscrito O' (fig. 3) que corresponden al lado AA'

$$MF = ML, \quad MF' = ML',$$

y, por tanto,

$$MF + MF' = LL'.$$

El lugar del punto M es, pues, una elipse, cuyos focos serán los puntos F y F'.

Su eje mayor, LL', ó su igual, AA', y A y A' los vértices.

— Los casos de la sección hipérbola y parábola, tienen una demostración tan sencilla como está indicada de la elipse.

— Una elipse ó una parábola siempre se pueden colocar sobre un cono circular recto dado.

— Para que una hipérbola pueda colocarse sobre un cono recto de base dada, es necesario que el ángulo de dos generatrices opuestas del cono no sea más pequeño que el de las asintotas de la hipérbola.

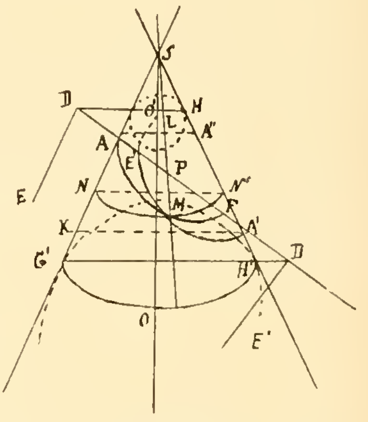


Figura 3.

— Cuando se corta un cono por un plano que divide en dos partes

iguales sus generatrices, la sección obtenida tiene por superficie el cuarto de la que tiene la curva de la base. Esta sección ha sido nombrada por Mr. Cousinery, *sección cónica sub-doble.*

— Las secciones producidas por planos paralelos son semejantes.

— Por último, se tiene en el cono circular oblicuo la sección *antiparalela.* (Ver esta voz.)

Secciones opuestas.

Así nombró Apolonio á las dos ramas opuestas de la hipérbola que consideró por separado. (Véase su *Teoría de focos,* lib. III, prop. XLII, de su obra sobre las cónicas.)

Secciones planas.

Definición.—Se dice, en general, á las producidas en las superficies por planos.

Consideraciones generales.—En Geometria Analítica de dos dimensiones, se estudian particularmente las *secciones cónicas* y las *cilíndricas.* (Ver estas voces.)

En la Geometría Analítica de tres dimensiones, se trata de las secciones en las cuádricas, sobre las cuales haremos algunas consideraciones.

Si la cuádrica tiene centro, su ecuación es:

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = H$$

y la del plano secante siendo:

$$x = \alpha y + \beta z + \rho,$$

la eliminación de x nos dará la ecuación de la proyección de la curva, sección sobre el plano yz, la cual será

$$(P\alpha^2 + P')y^2 + (P\beta^2 + P'')z^2 + 2P\alpha\beta \,.\, yz + 2P\alpha\rho y + 2P\beta\rho z + \\ + P\rho^2 - H = 0,$$

la cual, según represente una elipse, una hipérbola ó una parábola, la intersección será, asimismo, una elipse, una hipérbola ó una parábola.

Si la cuádrica está desprovista de centro, su ecuación es:

$$P'y^2 + P''z^2 = 2Qx$$

y la del plano secante, siendo

$$x = \alpha y + \beta z + \rho,$$

se tendrá, como antes,

$$P'y^2 + P''z^2 - 2Q\alpha y - 2Q\beta z - 2Q\rho = 0,$$

y la sección será una elipse ó una hipérbola, según que P'' sea positivo ó negativo, es decir, según que el paraboloide es elíptico ó hiperbólico.

— Las secciones hechas por planos paralelos, en una superficie de segundo orden, son curvas semejantes y semejantemente dispuestas.

— Los centros de las secciones producidas por planos paralelos, están todos situados sobre un diámetro de la superficie.

— Un hiperboloide y su cono asintótico, son cortados por un mismo plano, según curvas semejantes.

— Los planos que producen secciones circulares se denominan, según Chasles, *planos cíclicos.*

— Sobre una cuádrica no existen más que tres planos cíclicos reales, los cuales forman un verdadero triedro; excepción hecha del caso en que la superficie sea una esfera.

— En las cuádricas de revolución no existe más que un sistema de planos cíclicos, sistema constituído por los planos perpendiculares al eje de la superficie, y recíprocamente; si no existen en una cuádrica más que un sistema de planos cíclicos, la superficie considerada es de revolución.

— Los puntos comunes de una cuádrica y los diámetros conjugados de los planos cíclicos reales, se llaman *los umbílicos.*

— En la Geometría Descriptiva, el problema de hallar las secciones planas descansa en el principio de que *si se cortan dos superficies cualesquiera por otra, los puntos comunes á las intersecciones de ésta, con cada una de aquéllas, serán también comunes á las dos primeras*, y se eligirán, según los casos, aquellas superficies auxiliares cuyas intersecciones, con cada una de las propuestas, sean conocidas de antemano y cuyas proyecciones se puedan trazar con facilidad, y cada uno de los puntos en que las dos líneas obtenidas se corten, pertene-

cerán á la sección que se busca. Empleando la misma superficie auxiliar en diferentes posiciones, se obtendrán los puntos necesarios para que la línea que por ellos pase quede completamente determinada. Al unir las proyecciones de los puntos de la sección que se han determinado, puede haber alguna dificultad en el trazado de la curva, y convendría conocer la dirección de ésta, lo cual se consigue determinando la tangente á la sección en diferentes puntos de la misma, puesto que se sabe que sus proyecciones serán tangentes á las de la curva del espacio, y es claro que la tangente buscada se hallará en el plano de la sección, y, por consiguiente, para obtenerla, bastará hallar la intersección de este plano con el que sea tangente á la superficie en el punto que se considera.

No entra en los límites de este trabajo dar aquí á conocer por medio de distintos ejemplos los medios empleados, según que las superficies sean de revolución, cilíndrica, cónica, de segundo grado, etc., porque nos extenderíamos tal vez demasiado; así, pues, remitimos al lector á cualquiera de los muchos tratados de *Geometría Descriptiva* que existen para el estudio de estos procedimientos.

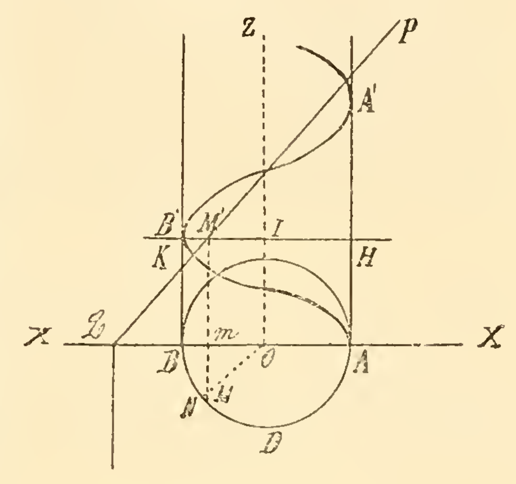


Figura 1.

Sin embargo; vamos á permitirnos presentar un ejemplo por dar lugar á una curva de importante aplicación en el aparejo helizoidal de los puentes oblicuos, la cual proviene de la sección de un plano en un helizoide, tiene una forma especial y de la que no hacemos artículo separado por no tener denominación propia.

Supongamos que la vertical OI (fig. 1) sea el eje de la superficie; que la hélice directriz tenga por proyección horizontal la circunferencia OA y por proyección vertical la sinusoide $AB'A'$...; y sea PQ la traza vertical del plano secante, supuesto perpendicular al vertical de proyección. Se trazará un plano auxiliar horizontal cualquiera, KH, el cual cortará á la superficie helizoidal, según una horizontal que se proyectará verticalmente sobre KH y horizontalmente sobre un radio, ON, que se determinará por la condición de que el arco

ADN esté con la circunferencia completa en la relación de AH con respecto al paso AA'. El mismo plano auxiliar cortará al plano PQ, según una perpendicular al plano vertical, que se proyecta verticalmente según el punto M', y horizontalmente según una perpendicular, mM, á la línea de tierra. El punto $M-M'$, que pertenece á la vez á la generatriz IH, ON y á la intersección del plano auxiliar y del plano secante, será un punto de la intersección del plano PQ con la superficie helizoidal. Del propio modo se obtendrán cuantos puntos de dicha intersección se quieran construir.

Para facilidad del trazado, se divide la circunferencia AB y el paso AA' en igual número de partes iguales á partir del punto A, y los puntos de división del mismo rango nos dará el radio análogo á ON y el plano horizontal análogo á KH, que determinan un punto de la línea buscada. Conocidas las proyecciones de la sección buscada, se obtendrá su verdadera magnitud rebatiendo el plano PQ alrededor de su traza vertical.

Este mismo problema puede resolverse por medio del cálculo. Si se toma por eje de las z el eje OI de la superficie, por eje de las x la dirección del radio OA y por eje de las y un radio perpendicular; llamando h el paso AA' de la hélice directriz, se encuentra por ecuación de la superficie helizoidal

$$z = \frac{h}{2\pi} \,.\, \text{arc} \,.\, \text{tg} \frac{y}{x}.$$

Si α designa el ángulo de PQ con el eje de las x, y b la distancia OC, se tendrá para ecuación del plano secante

$$z = x \,.\, \text{tg} \,.\, \alpha + b.$$

Eliminando z entre estas dos ecuaciones, se obtiene la ecuación de la proyección de la sección buscada sobre el plano de las xy, á saber:

$$\frac{h}{2\pi} \text{arc} \,.\, \left(\text{tg} = \frac{x}{y}\right) = x \,.\, \text{tg} \,.\, \alpha + b,$$

de donde

$$y = x \,.\, \text{tg} \frac{2\pi}{h} (x \,.\, \text{tg} \,.\, \alpha + b),$$

curva que se construye por puntos. La sección del plano secante con el cilindro vertical, que tiene esta curva por base, será la sección de este mismo plano secante con la superficie helizoidal.

La curva que se obtiene por estos métodos presenta la forma que se manifiesta en la figura 2. Se compone de dos ramas que tienen una asíntota común, $\alpha\alpha$, y otras dos asíntotas particulares, $\beta\beta$, $\gamma\gamma$, todas ellas paralelas al eje de las y. Se obtendrán otras ramas y otras asíntotas si se construyera la parte indefinida de la superficie helizoidal que cae fuera del cilindro, cuya base es el círculo ADB.

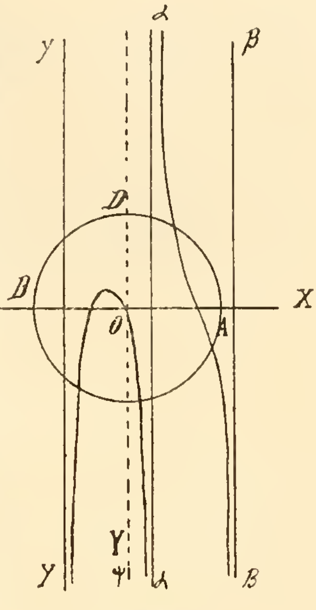


Figura 2.

En las aplicaciones de esta línea para el trazado de las juntas helizoidales de los puentes oblicuos, cuando se trata de encontrar su intersección con los planos de cabeza, se tienen en cuenta, sobre todo si la sección recta de bóveda es de un radio muy grande, otras propiedades de esta curva, que han sido estudiadas por Mr. de la Gournerie y se encuentran en los *Annales des ponts et chaussées* (1851), propiedades que, con ligeras diferencias, se pueden ver en el *Traité de la coupe des pierres,* de M. J. Adhemar (pág. 339 y siguiente). Asimismo puede consultarse el *Tráité des ponts biais,* de Mr. Buck.

Sectric.

Definición.—Esta curva puede considerarse como el lugar de la intersección de dos rectas que giran uniformemente alrededor de dos de sus puntos supuestos fijos; ó, como el lugar del vértice P de un triángulo APA', en el cual el ángulo suplementario de A' está en una relación constante $\frac{n}{n'}$ con el ángulo A.

Historia.—La primera idea de esta línea se debe á Mr. Plateau (*Corresp. Mathe. et Phys.*, t. IV, 1828), y su nombre fué dado por H. Schoute, considerando la posibilidad de utilizarla en la solución gráfica de la división de un ángulo en un número cualquiera de partes iguales.

Propiedades.—Esta curva es simétrica con relación á la línea AA', y pasa $n-1$ veces por A, $n'-1$ veces por A' y n' veces por los puntos cíclicos.

— Si $n'=1$ ó $=n-1$ se obtienen curvas unicursales. Si $n=2$ una circunferencia de centro A y radio AA', y si $n=3$, la curva se nombra *sesquisectric* y es un caso particular del caracol de Pascal.

— La strofoide es una curva sectric.

— Para su estudio se puede consultar los trabajos de H. Schoute, *Journal de Mathe. sps.*, 1885, y los de Aubry en el mismo diario, año de 1896.

Seguimiento.

Definición é historia.—En el tomo II de la *Correspondance sur l'Ecole Polytechnique*, pág. 275, año 1814, se dice: que Mr. Dubois Aymé, en ocasión de pasear sobre un terreno arenoso, se encuentra á cierta distancia con una persona de su conocimiento y se dirige á ella con objeto de saludarla. Su perro, que se le había separado, corre hacia él y describe una curva, cuyo trazo queda sobre la arena. Mr. Dubois, al hacer esta observación, reconoce la regularidad de la curva y busca su ecuación, suponiendo: 1.°, que el perro se dirige siempre hacia el lugar que el amo acaba de ocupar; 2.°, que el amo recorre una línea recta, y 3.°, que las velocidades del amo y del perro son uniformes. Se da allí una ecuación de esta curva, cuya inexactitud ha establecido Mr. Thomas de Saint-Laurent (*Ann. Gergonne*, t. XIII, página 145, año 1822), y dió la primera solución de este problema; estudiado luego con extensión por el mismo Saint-Laurent y monsieur Sturm, en el mismo tomo de la obra citada, pág. 289, ó sea, suponiendo que el perro atraviesa un río y teniendo en cuenta la dirección de la corriente; pero la mejor solución es la fundada sobre la consideración de los movimientos relativos y debida á Mr. Querset, publicada en el mismo tomo, pág. 391.

— La curva considerada en el primer problema, ha sido también estudiada por Bouguer (*Memoires de l'Académie*, 1732, pág. 1.ª), siendo este autor el que la dió el nombre con que se la conoce de *pour-suite*, en francés, y que hemos traducido de *seguimiento*.

Ecuación y propiedades.—La tangente á la curva $y=\varphi(x)$ en el punto ocupado por el perro, pasa por el punto en que en el mismo

instante se encuentra el hombre. Si A' y A son dos posiciones del perro, B' y B son las dos correspondientes del dueño, y si además

$$BB' = m \,.\, \text{arc} \,.\, AA'$$
$$OB = y - x\varphi'(x),$$

y si hacemos

$$z = x \,.\, \varphi'(x)$$

y llamamos l y K los crecimientos de z y de y, correspondientes á un crecimiento h de x, tendremos:

$$OB' = y + K - (z + l), \quad BB' = K - l, \quad \text{cuerda} \,.\, AA' = \sqrt{K^2 + h^2}$$
$$\frac{1}{m} = \frac{\text{arc} \,.\, AA'}{\text{cuerda}\; AA'} \times \frac{\text{cuerda} \,.\, AA'}{BB'}$$

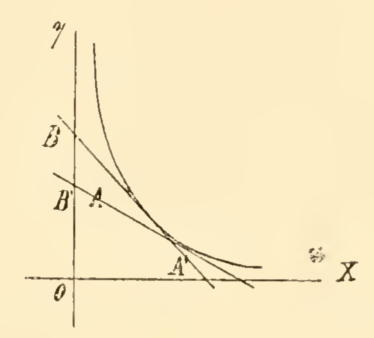


Figura I.

ó

$$\frac{1}{m} = \frac{\text{arc} \,.\, AA'}{\text{cuerda}\; AA'} \,.\, \frac{\sqrt{\dfrac{K^2}{h^2} + 1}}{\dfrac{K}{h} - \dfrac{l}{h}}.$$

En pasando á los límites:

$$\frac{\text{arc} \,.\, AA'}{\text{cuerda}\; AA'} = 1; \qquad \sqrt{\left(\frac{K}{h}\right)^2 + 1} = \sqrt{\varphi'(x)^2 + 1}$$
$$\frac{l}{h} = \varphi'(x) + x\varphi''(x); \quad \frac{1}{m} = \sqrt{\frac{\varphi'(x)^2 + 1}{x\varphi''(x)}};$$

de donde,

$$x^2 \varphi''(x)^2 = [\varphi'(x)^2 + 1]\, m^2. \tag{1}$$

El valor de $\varphi'(x)$, supuesto algebraico será:

$$\varphi'(x) = Ax^m - \frac{1}{LA} x^{-m}. \tag{2}$$

Mr. Saint-Laurent llega á la misma ecuación (1); pero en lugar de suponer $\varphi'(x)$ algebraico, integra la ecuación (1), y llega directamente á la ecuación (2); toma luego por eje de las x la tangente perpendicular al eje de las y, llamando a la distancia del punto de contacto al origen, se tiene:

$$Aa^m - \frac{1}{4A} a^{-m} = 0,$$

de donde,

$$A = \frac{1}{2} a^{-m} \quad \text{y} \quad \varphi'(x) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^m - \left(\frac{a}{x}\right)^m\right].$$

— La curva es rectificable, y la longitud de su arco s, contando desde el punto de contacto con el eje de las x, es:

$$\frac{2s}{a} = \frac{1}{n+1}\left[\left(\frac{a}{x}\right)^{n-1} - 1\right] - \frac{1}{n+1}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1} - 1\right],$$

si x disminuye, s crece positivamente.

— La curva puede construirse sirviéndonos de otras dos curvas: una parabólica y otra hiperbólica.

Segundo grado (Curvas de).

Definición.—Reciben el nombre de *curvas de segundo grado*, las representadas por la ecuación general

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

Propiedad.—Toda sección plana de un cono de base circular es una curva de segundo grado, y recíprocamente, toda curva de segundo

grado puede considerarse como una sección cónica (ver esta voz), y bajo este punto de vista han sido estudiadas primeramente por los geómetras las curvas de segundo grado.

—Con frecuencia se dice, *sección cónica* ó simplemente *cónica*, en lugar de curvas *de segundo grado*.

Advertencia.—Véase la voz *cónica* en que desenvolvemos la historia, ecuación y demás propiedades de estas líneas.

Seguridad ó acierto.

Definición.—Si en un mismo instante, y desde un mismo punto, se lanzan en todas direcciones una infinidad de proyectiles, animados de igual velocidad, sus trayectorias compondrán una superficie que se nombra *superficie de seguridad ó acierto.* La meridiana de esta superficie, que lo será de revolución alrededor de la vertical que pasa por el punto de partida, recibe el nombre de *curva de seguridad ó de acierto.*

Determinación de la curva.—Para obtener esta línea es necesario buscar la envolvente de las parábolas representadas por la ecuación.

$$Z = \frac{1}{2} g \frac{1}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 - \mathrm{tg} . \alpha . x \text{ (ver } \textit{balística}\text{).}$$

Considerando α como variable, para lo cual se eliminará la constante arbitraria entre la ecuación de la curva y la derivada de esta ecuación con relación á la constante.

—Si consideramos el movimiento en el vacío, la ecuación de la parábola variable puede escribirse en la forma

$$Z = \frac{gx^2}{2\nu_0^2}(1 + \mathrm{tg}^2 \alpha) - x . \mathrm{tg} . \alpha,$$

pudiéndose tomar $tg.\alpha$ por constante arbitraria en lugar de α, y derivando se tiene

$$O = \frac{gx^2}{\nu_0^2} \mathrm{tg} . \alpha - x,$$

de donde

$$\mathrm{tg} . \alpha = \frac{\nu_0^2}{gx},$$

y substituyendo la ecuación de la curva, será

$$Z = \frac{gx^2}{2\nu_0^2}\left(\frac{g^2x^2+\nu_0^4}{g^2x^2}\right) - \frac{\nu_0^2}{g} \quad \text{ó} \quad Z = \frac{gx^2}{2\nu_0^2} - \frac{\nu_0^2}{2g};$$

por tanto, la curva de seguridad es una nueva parábola, cuyo eje es la vertical del punto, desde el cual se lanzan los proyectiles.

—Es fácil demostrar que el lugar de los vértices de las trayectorias de todos los móviles considerados, es una elipse dada por la ecuación

$$x^2 + 4z^2 + \frac{2\nu_0^2}{2g}z = 0,$$

y que *todos los proyectiles lanzados en un mismo instante se encuentran en una época cualquiera sobre la circunferencia de un mismo círculo, cuyo radio crece proporcionalmente al tiempo, y cuyo centro desciende como un cuerpo pesado.*

—Si el movimiento tiene lugar en el aire, las fórmulas analíticas son muy complicadas y se puede obtener una fórmula empírica conforme con la experiencia, la cual es

$$z = x\,\mathrm{tg}\,.\,\alpha - \frac{g\,x^2}{2\cos^2\alpha}\left(\frac{1}{\nu^2} + \varphi(x)\right).$$

y hacer en ella $\varphi(x) = KX$ determinándose K por la expresión

$$O = \mathrm{tg}\,.\,\alpha - \frac{gX}{2\cos^2\alpha}\left(\frac{1}{\nu^2} + KX\right) \quad \text{ó} \quad \frac{1}{\nu^2} + KX = \frac{\mathrm{sen}\,.\,2\alpha}{gX},$$

representando por X el alcance del tiro. La curva es ahora una línea de tercer grado muy sencilla.

Selenoide.

Nombre dado por J. H. Vincent *(Essai d'une théorie du parallelogramme de Watt,* 1837) á la curva obtenida, considerando un caso particular de la curva de Watt.

Semejantes.

Definición.— Llámanse *semejantes y semejantemente colocadas* dos curvas de un grado cualquiera situadas en un mismo plano (ó en planos paralelos), si los radios vectores trazados en la primera desde un punto O, están en una relación constante con los trazados en la segunda por otro punto O', paralelamente á aquéllos y dirigidos en el mismo sentido.

Ecuación.— Sea $f(x, y) = 0$ la ecuación de una curva cualquiera; la ecuación general de las curvas semejantes colocadas con relación al origen, será

$$f(Kx, Ky) = 0$$

las de las curvas semejantes, pero simplemente paralelas,

$$f(K(x + a), \quad K(y + b)) = 0,$$

y las de las curvas semejantes colocadas arbitrariamente en el plano de los ejes

$$f\left(Ka + K\frac{x \,.\, \text{sen}\,.\,(\theta - \alpha) - y \,.\, \text{sen}\,.\,\alpha}{\text{sen}\,.\,\theta},\right.$$

$$\left. Kb + K\frac{x \,.\, \text{sen}\,.\,\alpha + y \,.\, \text{sen}\,.\,(\theta + \alpha)}{\text{sen}\,.\,\theta}\right) = 0.$$

La relación de semejanza será K; el origen y el punto, $x = -a$, $y = -b$ serán homólogos, y las líneas homólogas estarán inclinadas entre sí el ángulo α.

Propiedades.— Si existen en dos curvas dos centros O y O' que llenan las condiciones de

$$\frac{O'M'}{OM} = \frac{O'N'}{ON} = \ldots\ldots = K$$

existen infinitos, puesto que si en la figura Σ se toma un punto cualquiera, I, y se traza paralelamente á OI, la recta $O'I'$ sobre la cual se toma una longitud tal que

$$\frac{O'I'}{OI} = K,$$

los triángulos semejantes OIM, $O'I'M'$... hacen ver que los radios vectores IM é $I'M'$, IN é $I'N'$..., son respectivamente paralelos y guardan entre sí la relación K. Así, pues, los puntos I é I' serán dos centros correspondientes.

— En las curvas *semejantes en forma y posición*, las tangentes en las extremidades de dos radios vectores homólogos, OM y $O'M'$, son siempre paralelas entre sí.

— Cuando los radios vectores proporcionales no son respectivamente paralelos, pero forman al menos ángulos iguales con dos rectas fijas de dirección diferente, las curvas serían semejantes solo en *la forma y no en la posición*. Si además de esta rotación se transporta la segunda curva paralelamente á sí misma, de manera que se haga coincidir el punto O' con O, las dos curvas semejantes se harán *concéntricas* en cuanto á sus centros de semejanza ó simétricos.

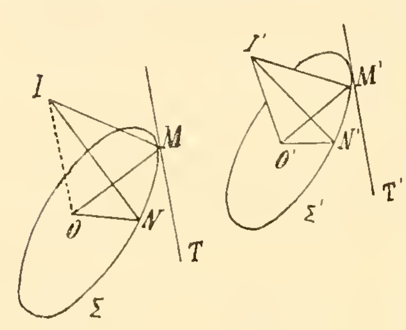


Figura 1.

— Las secciones paralelas de una superficie de segundo orden son curvas semejantes en forma y en posición.

— Las curvas semejantes se pueden también considerar de la siguiente manera: Dada una curva, si se toma un punto cualquiera, y se imagina el cono cuyo vértice fuese este punto y la curva dada su directriz, una curva semejante á la propuesta y semejantemente dispuesta con relación al punto dado, sería el lugar de los puntos de división en partes proporcionales de las aristas del cono, terminadas en la curva primitiva; dos puntos homólogos de las dos curvas pertenecerían á la misma arista; las tangentes en estos puntos, así como los planos osculadores, serán paralelos y las curvaturas serán iguales, etc.

Semidiurno.

Definición.— Cuando un planeta ó estrella se encuentran precisamente en el horizonte, su distancia al meridiano, ó su ángulo horario, recibe el nombre de arco semidiurno.

Determinación.—Sea HZO, la mitad del meridiano; HO, la del horizonte; EQ, la del ecuador; P, el polo; Z, el cenit; L, un astro situado en el horizonte en el momento de su orto; ZL, la distancia al

cenit, que es de 90°, esto es, la distancia aparente, pues la distancia al cenit aparece aumentada por la paralaje y disminuída por la refracción; *PL* es la distancia verdadera del astro al polo boreal del mundo, complemento de la distancia al ecuador ó de su declinación *LA*, si ésta es boreal, y la suma de 90° si es austral; el arco *PZ* es la distancia del polo al cenit en el lugar de la observación, es decir, el complemento de la latitud ó de la altura del polo *PO;* los tres lados *PL*, *PZ* y *ZL* del triángulo *PZL*, son conocidos, por lo cual puede deducirse el valor del ángulo *P* por los procedimientos de la trigonometría esférica; este ángulo *P*, ó *ZPL*, es el ángulo horario del astro; su distancia al meridiano en el momento del orto, ó su *arco semidiurno*, que puede hallarse por la regla siguiente:

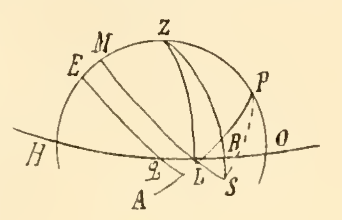


Figura 1.

Súmense los tres lados conocidos del triángulo *PZL* y tómese la mitad de la suma, de cuya mitad réstense sucesivamente, y por separado, los dos lados *PZ* y *PL*, que comprenden el ángulo buscado *P*, es decir, el complemento de la latitud y la distancia del astro al polo boreal del mundo, obteniéndose por este procedimiento dos diferencias; súmense los logaritmos de los senos de las diferencias procedentes de estas dos substracciones; súmense los logaritmos de los senos de los dos lados *PZ* y *PL;* réstese la suma de estos dos logaritmos de la suma de los otros dos logaritmos de los senos de las diferencias; tómese la mitad del resto, y éste será el logaritmo del seno de un número de grados y minutos, cuyo duplo será el ángulo *P* ó arco semidiurno buscado, que hay que convertir en tiempo.

Aplicaciones.—Por medio de las tablas de los arcos semidiurnos, calculados para distintos grados de declinación y de latitud, se puede determinar fácilmente, sin necesidad de emplear las fórmulas, la salida y postura de los astros para todos los países de la tierra y en todas las épocas del año. (Ver *Géodésie Francoeur,* pág. 473.)

Seminocturno.

Definición.—Se da este nombre á un arco de la misma naturaleza que el semidiurno (ver esta voz), y el cual es la mitad del arco nocturno.

Separatriz.

Definición.—Se da este nombre á la línea que, en la superficie de un cuerpo opaco iluminado, separa la parte obscura de la parte luminosa.

Historia.—El nombre de *separatriz* fué propuesto por De La Gournerie. (*Traité de Géométrie Descriptive*, París, 1860-1864.)

La determinación científica de esta línea, usando los medios de que dispone la Geometría Descriptiva, ha sido expuesta en muchas obras, entre las cuales, citaremos: en Francia, la de Vallée, *Traité de la science du dessin; contenant la théorie générale des ombres* (París, 1821); la de Olivier, *Applications de la géométrie descriptive aux ombres* (París, 1847); de Leroy y de Adhemar, etc.

En Alemania, además de las de Hummel, Schreiber y los opúsculos de Appel, Raetz y Fliesen que carecen de importancia, se tienen las siguientes obras, dignas de especial mención: la de Burg, *Die orthogonale und perspektivische Schatten-Konstruktion* (Leipzig, 1880); la de Robert Schmidt, *Theoretisch-praktische Anleitung zum geometrischen Zeichnen* (Leipzig, 1859); la de Weishaupt, *Elementar-Unterricht in Linear-Zeichnen III Abtheilung, Schatten-Construktion* (München, 1863); la de Joh. Müller, *Die constructive Zeichnungslehre* (Braunschweig, 1874), y la de Dietzel, *Leitfaden für den Unterricht im technischen Zeichnen* (Leipzig, 1875), etc.

En inglés se ha publicado la obra *General Problems of Schades and Schadows* (New York, 1872), de Warren.

En italiano podríamos citar las de Amati, Marconi, Landriani y Astori, que son pequeños opúsculos; las de Tramontini, Bordoni y Astolfi, que fueron muy apreciadas en la época que se publicaron (1811, 1816 y 1824); las de Peri y Cicconetti, publicadas en los años 1859 y 1869, que son estudios muy elementales é insuficientes para dar completo conocimiento de esta ciencia, siendo la más apreciada la de Tessari, *La teoria delle ombre é del Chiaro-scuro* (1883).

Además, en muchos tratados de Geometría Descriptiva se podrán encontrar alguna parte ó capítulo en que se exprese más ó menos detalladamente la determinación de la separatriz y sombra de los cuerpos; tal sucede en los tratados de Hachette, de I. P. Schmit, de Menetrier, de Amiot de Hönig, de Schlesinger, de Klingenfeld y de Binns.

Determinación.—Se distinguen dos casos principales, según que el cuerpo de que se trate esté iluminado por un punto único ó por un

cuerpo luminoso de dimensiones finitas. El primero de estos casos se subdivide en dos, según que el punto luminoso esté situado á una distancia finita ó á una distancia infinita de los objetos que se iluminan; es decir, según que los rayos luminosos sean divergentes ó que puedan ser considerados como paralelos.

En todos estos supuestos, la consideración de los planos tangentes es la que determina la separatriz. Así, por ejemplo: cuando la luz emana de un punto único, y situado á una distancia finita del cuerpo, se considerará que por dicho punto se dirige un plano tangente á la superficie del cuerpo; el rayo luminoso, trazado al punto de contacto, será tangente á la superficie. Variando la posición del plano tangente de todas las maneras posibles, los rayos dirigidos á los diferentes puntos de contacto formarán una superficie cónica, envolvente de las posiciones del plano tangente, y la cual será tangente á la superficie del cuerpo. Así, por tanto, la línea de contacto (ver esta voz) de estas dos superficies será la separatriz.

Cuando el punto luminoso se considere en el infinito, la superficie cónica se cambia en una superficie cilíndrica, y la curva de contacto deestas dos superficies será la separatriz.

Naturaleza de la separatriz.—La naturaleza de la separatriz dependerá de la naturaleza de la superficie iluminada. Cuando ésta sea un cilindro, la separatriz se compondrá de dos generatrices; sobre una esfera, será un círculo, el cual será un círculo pequeño ó máximo, según esté iluminada por un punto situado en el espacio finito ó en el infinito; es decir, si son paralelos los rayos luminosos. En general, sobre una superficie de segundo grado, la separatriz es siempre una curva plana, puesto que es la línea de contacto con un cono ó cilindro que le es circunscrito.

— Sobre el elipsoide es la separatriz, en los dos casos que venimos examinando una elipse ó un círculo; en el paraboloide hiperbólico, será una hipérbola si el punto luminoso está á una distancia finita, y una parábola si los rayos luminosos son paralelos. En el hiperboloide de una hoja, la separatriz es una hipérbola si el punto luminoso está colocado sobre un diámetro trasverso; una elipse, si lo está sobre uno no trasverso, y una parábola, si está colocado sobre una de las generatrices del cono asintótico.

Serpentina.

Definición.— Si se consideran dos puntos fijos O y O' (fig. 1) y una recta Δ paralela á la OO', efectuando la construcción 1, 2, 3, 4,

el lugar descrito por el punto I es la cúbica que lleva este nombre.

Historia.—La denominación de *Serpentina* fué dada por Newton, *Enumeratio linearum tertii ordinis*, debida á su particular forma,

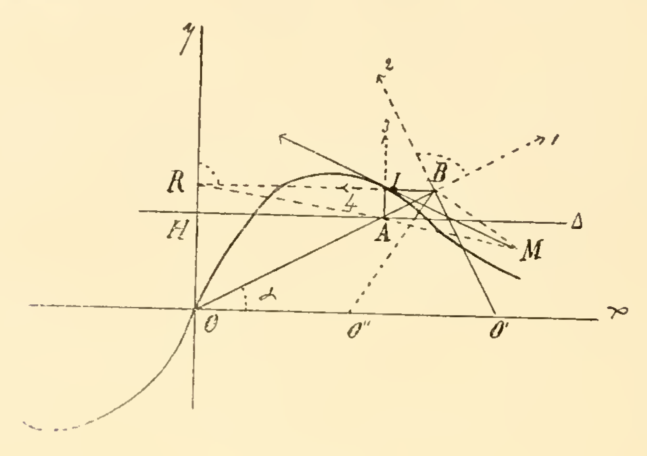


Figura 1.

pudiéndose ver, para conocimiento de los trabajos hechos sobre esta línea y enumeración de sus propiedades (*Journal de Mathematiques spéciales*, páginas 154 y 200, 1885.) También se llama *anguinea*.

Ecuación.—Si llamamos x é y las coordenadas del punto I y haciendo:

$$OH = d, \quad OO' = d', \quad BOO' = \alpha$$

se tiene:

$$x = d \,.\, \cot \,.\, \alpha, \quad y = d' \operatorname{sen} \,.\, \alpha \,.\, \cos \,.\, \alpha,$$

relación que se puede escribir en la forma

$$y\,(\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) = d' \operatorname{sen} \,.\, \alpha \,.\, \cos \,.\, \alpha,$$

y la ecuación de la curva, será, por consiguiente,

$$y\,(x^2 + d^2) = d'dx.$$

Tangente.—El trazado de la tangente en el punto I está marcado en la figura, según el método de construcción seguido por Mr. Godefroy.

Simétricas.

Del griego (συμμετρια).

Definición.—Dos curvas son *simétricas* con relación á un punto, á un eje ó á un plano, cuando sus puntos están situados dos á dos sobre una misma recta que pasa por este punto, ó perpendicular á este eje, ó en fin, perpendicular á este plano de uno y otro lado y á la misma distancia.

Historia.—La teoría de las figuras y curvas simétricas ha sido tratada especialmente por Bravais (*Journal Mathemathique,* t. XIV).

Propiedades.—Dos curvas simétricas con relación á un eje, son iguales y superponibles.

— Dos curvas simétricas de una misma curva, con relación á dos centros diferentes, son iguales.

Si dos curvas son simétricas con relación á un plano, se puede hacer girar una de ellas de manera á colocarla simétrica de la otra con relación á un punto cualquiera tomado en este plano.

De las propiedades expuestas se deduce que la simetría con relación á un eje no nos da una curva distinta de otra dada, sino únicamente una curva igual diferentemente orientada, y que las otras dos especies de simetría no pueden formar sino una sola curva simétrica de otra dada, siendo sólo la orientación la que puede cambiar.

Se dice que una curva tiene *un centro, un eje* ó *un plano de simetría,* cuando los puntos de esta curva están dos á dos situados simétricamente con relación á este punto, á este eje ó á este plano. Asi en la elipse, la recta que pasa por los focos y la perpendicular á esta recta por su medio, son dos ejes de simetría; su intersección, es un punto de simetría.

Simple.

Definición é historia.—(Ver *Geminal.*)

Propiedades.—Una rama simple tiene siempre un número impar de pares de puntos de inflexión, y si no presenta nodos, ni puntos de retroceso, presentará por lo menos tres pares de puntos de inflexión.

— Un círculo máximo corta á una rama simple en un número de puntos imparmente par.

— No se puede ir desde un punto de una curva simple á otro situado diametralmente opuesto, sin pasar por lo menos por un punto singular (nodal de retroceso ó de inflexión).

Sinclinal.

Definición.—Llámase *línea sinclinal* en Geonomía, aquélla que indica la intersección de capas cuyo buzamiento se confunde en un mismo punto, ó en otros términos, en estratos entrantes.

Propiedades.— Estas líneas están marcadas por el fondo de los valles, coincidiendo con el *thalweg*, denominación dada por los alemanes á estas líneas de fondo.

— Algunas veces, por efecto de depresiones terrestres, las capas en los montes se dirigen hacia su interior, en cuyo caso la cima coincide con el eje sinclinal. (Ver Macpherson, *Memoria geológica sobre la provincia de Cádiz.*)

— Un caso análogo es lo que sucede en las estratificaciones palmeadas ó en abanico.

Aplicaciones.—(Ver *Anticlinal.*)

Sincrona.

Del griego χρονος, *tiempo*, y de συν, *junto.*

Definición.—Se ha dado este nombre á una curva tal, que diferentes cuerpos pesados iguales entre sí, partiendo de un mismo punto y describiendo todas las cicloides imaginables que tengan su vértice común en este punto y sus bases sobre la misma horizontal, llegasen á los diferentes puntos de aquélla en el mismo y menor tiempo posible.

Historia.— Juan Bernouilli (*Actes de Leipsik*, 1697), dió á esta curva, que estudió, el nombre de sincrona, demostrando que dicha línea corta á todas las cicloides en ángulo recto.

Esta cuestión le hace llegar al problema famoso de las trayectorias ortogonales. (Ver esta voz.)

Ecuación y propiedades.— Sin importancia alguna, esta línea ha sido poco estudiada por los geómetras que han venido después de su autor; por lo que á lo dicho por éste en la obra citada, hacemos referencia con respecto á este punto.

— La palabra sincrona ha quedado en la ciencia para designar en mecánica los movimientos que se ejecutan al mismo é igual intervalo de tiempo.

Singulares.

Definición.—Se da este nombre á las curvas á que dan lugar ciertos resultados geométricos, cuando se hace degenerar sucesivamente una curva general.

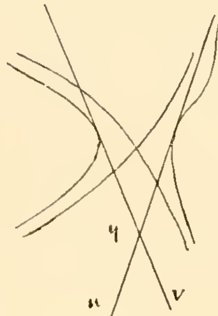


Figura 1.

Ejemplos. — En la figura 1 se ve cómo por causa de la aproximación de las dos ramas de una curva se obtiene una *singular* de punto doble, y en la figura 2 cómo por la unión de los puntos *A* y *B* de las ramas de una de tangente doble, esta última viene á ser tangente de inflexión de la curva singular *CD.*

Aplicaciones. — Estos ejemplos hacen ver como los puntos singulares de las curvas reducen la clase de éstas.

Véase Plucker, *Solution d'une question fondamentale concernant*

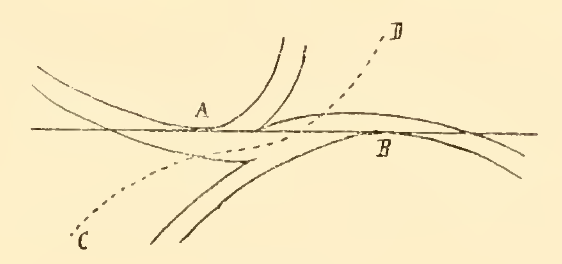


Figura 2.

la théorie générale des courbes (*Journal de Crelle,* tomo XII, 1834), y del mismo autor, *System der analytischen Géometrie* (Berlín, 1835, página 289.)

Sintrepentes.

Del griego, συντρεπειν, girar juntos.

Definición.—Dos curvas, en general, son *sintrepentes* cuando pueden girar simultáneamente alrededor de las extremidades *O* y *O'*, de una distancia *O O'* constante *K*, sin cesar de ser tangentes entre sí y sin giramiento.

Propiedades.—Los arcos de las dos curvas *HM*, *HM'* que pasan al mismo tiempo por el punto *H* de contacto (punto que puede va-

riar de situación pero que debe estar siempre sobre OO'), serán constantemente iguales entre sí.

—La suma de los radios vectores OM, $O'M'$ de los puntos correspondientes es constante é igual á K.

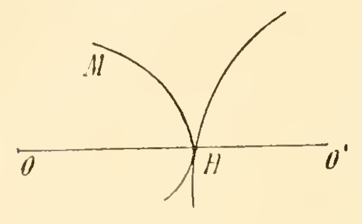


Figura 1.

— Los ángulos formados por estos radios vectores con las tangentes trazadas á los puntos M y M', son todos ellos iguales dos á dos.

— Si $\omega = \varphi(\rho)$ y $\omega' = \psi(\rho)$ son las ecuaciones polares de estas dos curvas con respecto á los polos O y O', $OM = \rho$, $OM' = \rho'$, $MOX = \omega$ y $M'O'X = \omega$, será

$$\rho\,\psi'(\rho) = (K - \rho)\,\varphi'(K - \rho).$$

—La sintrepente de una elipse girando alrededor de uno de sus focos para $K = 2a$, es otra elipse igual á la primera.

Sinusoide.

Definicion.—Curva cuya ordenada es el seno geométrico del arco tomado sobre un círculo, cuyo radio es igual á la abscisa.

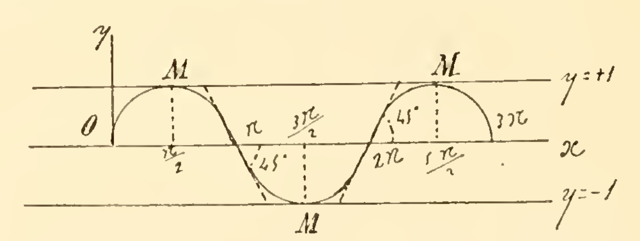


Figura 1.

Ecuación.—La ecuación de esta curva en coordenadas rectangulares es, según esta definición,

$$y = R\ \text{sen.}\ \frac{x}{R},$$

si $R = 1$ toma la forma más sencilla,

$$y = \text{sen.}\ x.$$

Forma.—La curva (fig. 1) corta al eje de las x en los puntos en que la abscisa es igual á los arcos rectificados $0, \pi, 2\pi, 3\pi\ldots..$ En estos

puntos, siendo $\frac{dy}{dx} = \pm 1$, la tangente forma con el eje un ángulo de 45°.

—Si la abscisa aumenta en 2π, la ordenada permanece constante; así, pues, la curva se compone de una infinidad de arcos iguales al que se obtiene dando á x valores comprendidos entre 0 y 2π; todos estos arcos forman una curva continua, uniéndose por sus extremidades, puesto que $x = 2\pi$ nos da $y = 0$ para $x = 0$.

—Si se hace

$$x = \frac{\pi}{2} \pm h,$$

se obtienen valores iguales para y; por consiguiente, la curva es simétrica con relación á una cualquiera de las paralelas al eje de las y trazadas á la distancia $x = K\frac{\pi}{2}$. También lo será, y por una razón semejante, con relación á cada una de las paralelas,

$$x = \frac{3}{2} K\pi.$$

—Los vértices situados sobre los primeros ejes tienen por ordenada común $y = 1$; los otros tienen por ordenada $y = -1$, la curva está toda entera comprendida entre las dos rectas $y = \pm 1$ que tocan en los puntos en que x es igual á los arcos.

$$\frac{\pi}{2} \quad \frac{3\pi}{2} \quad \frac{5\pi}{2} \ldots\ldots$$

—El signo del coeficiente diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\text{sen. } x;$$

siendo contrario al de la ordenada, indica que la curva presenta su concavidad hacia abajo, cuando la ordenada es positiva; y hacia arriba, cuando es negativa, lo cual nos dice que los puntos en que la ordenada es cero son puntos de inflexión.

—Cada uno de los puntos de inflexión es, al propio tiempo, un centro de la curva, porque dando á x dos valores $n\pi \pm h$ equidistantes

de la abscisa en uno de estos puntos, se encuentra para y dos valores $\pm$ sen. h iguales y de signo contrario.

—La curva, según todas estas consideraciones, se ve afecta la forma indicada en la figura.

Propiedades.— Á más de las que quedan expresadas en el estudio que de la forma hemos hecho, se pueden señalar, entre otras, las siguientes:

—La ecuación de la sinusoide se puede escribir:

$$y = R \frac{e^{\frac{x}{R}\sqrt{-1}} \quad e^{-\frac{x}{R}\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

y se reconoce que su conjugada (ver esta voz) en coordenadas reales y abscisas imaginarias de la forma $\frac{\pi}{2} R - x\sqrt{-1}$ es una catenaria. Porque, en efecto, haciendo en la ecuación anterior $x = \frac{\pi}{2} R - x\sqrt{-1}$, el valor de y se transforma en

$$y = R \cos. \left(\frac{x}{R}\sqrt{-1}\right)$$

ó

$$y = R \frac{e^{-x} + e^{x}}{2},$$

que es la ordenada de una catenaria. (Ver esta voz.)

Trazado.—Esta curva puede obtenerse por las intersecciones sucesivas de dos rectas; la primera, que se mueva uniformemente permaneciendo siempre paralela á sí misma y recorriendo los diversos puntos de una circunferencia, y la segunda, dotada de un movimiento, también uniforme, y perpendicular constantemente á la anterior. Si las dos rectas se mueven con igual velocidad, esto es, si en el mismo tiempo recorren distancias iguales, la sinusoide que resulta se llama *natural*, y si ésto no sucede, se obtiene la sinusoide *prolongada* ó la *reducida*, según que la primera ó la segunda de las rectas mencionadas sea la que posee un movimiento más lento.

Sinusoide natural.—Se describe (fig. 2) una circunferencia de radio a que tenga su centro en el eje; á partir del origen de uno y otro lado, se lleva una longitud igual á la rectificación de la circunferen-

cia (que aquí suponemos es *dl*), de radio *a*; cuyos intervalos, así como los de la circunferencia, se dividen en partes iguales; por los puntos de división del eje, se trazan perpendiculares á éste, y por los del círculo, paralelas, y éstas serán las direcciones de las dos rectas que por su intersección describen la curva; así, pues, los puntos

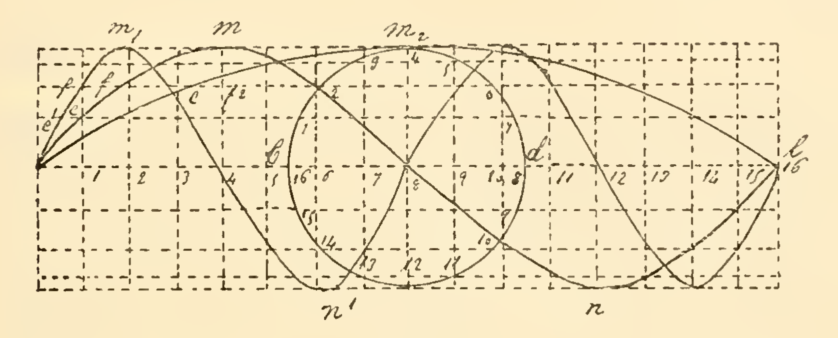


Figura 2.

en que se corten las rectas que parten de divisiones de un mismo signo y un mismo orden, es decir, primera abscisa positiva con primer arco positivo, etc., serán los puntos de la sinusoide natural *dmnl*.

Sinusoide prolongada.—Para trazarla, tomaremos los mismos datos y dividiremos la recta *dl* en doble número de partes iguales que la circunferencia de radio *a*, y del mismo modo que antes, se tendrá la curva pedida $dm_1 n_1$.

Sinusoide reducida. — Si la recta *dl* se divide en la mitad del número de partes que la circunferencia de radio *a*, obtendremos la curva buscada que será la $d\,m_2\,l$.

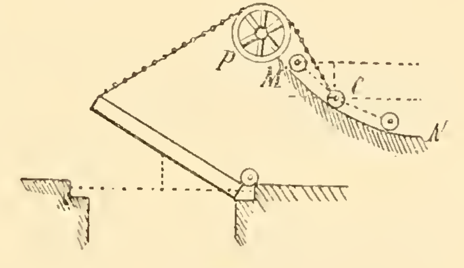


Figura 3.

Sinusoide de Belidor.— En el sistema de puente levadizo imaginado por Belidor (*Science des ingenieurs*), la cadena que sostiene el tablero se arrolla sobre una polea *P* (fig. 3), viniendo á servirle de contrapeso un cilindro *C*, sujeto á resbalar sobre una curva fija *MN*. (Ver *Equilibraciones.*)

Belidor ha dado á esta curva el nombre de *sinusoide* á causa de la propiedad que ella posee de tener sus ordenadas proporcionales á los senos de los ángulos de elevación del tablero como es fácil demos-

trar. (J. V. Poncelet, *Cours de Mecanique appliquée aux machines*, Lieja, 8.ª Sect. pág. 663.)

Mr. Haton de la Goupillére ha dado la ecuación de esta curva en la hipótesis que la polea se reduzca á un punto; esta ecuación es muy complicada, y por otra parte, no ofrece interés alguno en la práctica.

Solar.

Definición.—Se ha dado este nombre á la curva que sigue un rayo luminoso en nuestra atmósfera.

Historia.—La denominación anterior es debida á Mr. Bouguer. (*Essai d'optique sur la gradation de la lumière*, Paris, 1729.)

Ecuación.—Bouguer en su obra se propone encontrar la ecuación de esta curva, suponiendo conocida la ley de variación de la densidad en las distintas capas de la atmósfera. A este objeto supone que la diferencia del seno del ángulo del rayo con la normal es proporcional á la diferencia de la densidad, deduciendo que la distancia de una tangente á la *solar*, en el centro de la tierra, es proporcional á la densidad de la atmósfera en el punto de contacto; de donde resulta como corolario, que, si la densidad varía en razón inversa de la distancia al centro de la tierra, la solar será una logarítmica.

Solutiva.

Definición.—Se ha dado este nombre á ciertas curvas que nos dan las raíces de la ecuación

$$z^n + pz + q = 0,$$

por medio de construcciones gráficas.

Clasificación. — Se conocen la solutiva de Mr. Lalanne y la de Mr. D'Ocagne.

Solutiva de Mr. Lalanne.—Definición.—Curva trazada en un plano de tal manera, que si desde un punto del mismo, determinado por la ecuación propuesta, se le trazan las tangentes, éstas hacen conocer las raíces de dicha ecuación.

Historia.—Mr. Lalanne la propone (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1846), con motivo de la resolución gráfica de las ecuaciones numéricas.

Trazado y uso.—Sea la ecuación:

$$z^n + pz + q = 0 \qquad (1)$$

si en ella damos á z un cierto valor α y reemplazamos p y p por las variables x é y, se tendrá

$$\alpha^n + \alpha x + y = 0,$$

expresión que se puede considerar como la ecuación de una recta referida á dos ejes $0x$ y $0y$. Si se hace variar el parámetro α, la recta representada por esta ecuación variará, pero permaneciendo tangente á una cierta curva, E, su envolvente. Si suponemos esta curva trazada, para resolver la ecuación (1) se tomará el punto cuyas coordenadas son $x = p$ é $y = q$, y por este punto se trazarán las tangentes que se pueda á la curva E. Los valores del parámetro α, correspondientes á las diversas tangentes, son iguales á las raíces reales de la ecuación propuesta. Para obtener estos valores, basta considerar que el parámetro α, correspondiente á una tangente dada, es igual al parámetro angular de esta tangente cambiado de signo.

— Mr. Lalanne traza á la *solutiva E* diferentes tangentes, al lado de las cuales coloca el valor correspondiente de α, y tomado el punto cuyas coordenadas son $x = p$ é $y = q$, dirige desde él las tangentes posibles á la curva, y deduce, por aproximación á las tangentes ya trazadas que más se acercan á las nuevas, los valores del parámetro α que corresponden á éstas; éstos son las raíces de la ecuación propuesta.

Solutiva de Mr. D'Ocagne.—Definición.—Curva que nos da las raíces de la ecuación propuesta, por intersección con las rectas correspondientes á esta ecuación.

Historia.—Mr. D'Ocagne en vista de la dificultad que ofrece la solutiva de Mr. Lalanne, dado que el trazado de tangentes á una curva gráfica por un punto exterior no se puede hacer sino aproximadamente, estudia otra clase de solutiva en su obra *Coordonnées parallèles et axiales* (1885).

Trazado y uso.—Sea la ecuación

$$z^n + pz + q = 0;$$

si en ella reemplazamos z por α y p y q por u y v, se tendrá

$$\alpha^2 + \alpha u + v = 0;$$

ecuación que, referida á un sistema de coordenadas paralelas, puede ser considerada como la de un punto P con respecto á los dos ejes paralelos Au y Av.

Este punto P se puede construir fácilmente. En efecto: si p es el punto en que la paralela á los ejes, trazada por P corta la recta AB, se tiene:

$$\frac{p^B}{p^A} = -\alpha, \qquad (a)$$

lo que determina la recta Pp.

Si la recta AP corta á Bv en B', se tiene,

$$BB' = -\alpha^n, \qquad (b)$$

y si la recta BP corta á la Au en A', será:

$$AA' = -\alpha^{n-1}, \qquad (c)$$

se puede, pues, por medio de las fórmulas *(a)*, *(b)* y *(c)* construir las rectas Pp, AP y BP; bastando dos cualesquiera de ellas para determinar el punto P.

Así se obtendrán una serie de puntos que se acotarán, los cuales, unidos entre sí, forman la *solutiva* de la ecuación (1) que llamaremos C_n.

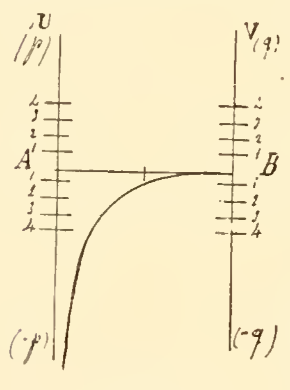


Figura 1.

Trazada esta curva, la ecuación propuesta determina una recta en este plano y los puntos de encuentro de esta recta con la curva C_n harán conocer las raíces de la ecuación.

Propiedades.—Cualquiera que sea, n, la curva, afecta la misma forma general (figura 1); ella parte de un punto B tangencialmente á la recta AB y se encorva gradualmente y de una manera continua, para ser asintótica con respecto á la parte negativa del eje Au.

—El punto de cota 1 es el mismo para todas las curvas solutivas. Este punto se encuentra á igual distancia de los ejes Au y Bv sobre la recta

$$n = r = -1.$$

—Si n es par, las raíces positivas serán dadas por la recta

$$(n = p, r = q).$$

Las negativas por la $(n = -p,\ v = q)$.

—Si n es impar, las raíces positivas serán dadas por la recta

$$(n = p,\ v = q).$$

Las negativas por la $(n = p,\ v = -q)$.

—La solutiva C_2 es una rama de hipérbola cuyas asíntotas son: por una parte, el eje An, y por otra, la recta cuyas coordenadas son

$$n = 2,\ v = 1.$$

La ecuación de esta hipérbola será

$$n^2 - 4\,v = 0,$$

y de ella se pueden deducir todos sus elementos. Haciendo uso de esta curva, se pueden efectuar las seis operaciones fundamentales de la Aritmética.

— La solutiva C_3 permite también verificar las operaciones de elevación al cubo y extracción de la raíz cúbica.

Sombras (líneas de).

Consideraciones generales.—La sombra de un cuerpo es una consecuencia inmediata de la propagación rectilínea de la luz.

Cuando la superficie de un cuerpo opaco S (fig. 1) se coloca frente á un haz de rayos luminosos, presenta dos regiones distintas; una, A, que es herida por los rayos incidentes, los que le hacen aparecer iluminada y se llama *parte iluminada*, y otra, B, en la dirección contraria á la luz, y que no puede recibir ningún rayo que la ilumine y se llama *sombra propia* del cuerpo.

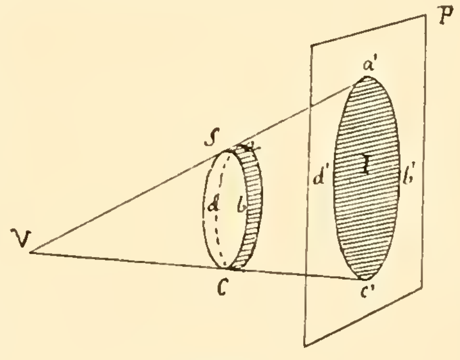


Figura 1.

Además, como quiera que los rayos que hieren al cuerpo quedan por éste intersectados, si consideramos un segundo cuerpo opaco P colocado detrás del propuesto con relación á dichos radios, este se-

gundo cuerpo resultará privado de luz en un cierto espacio I, y éste será la *sombra arrojada* por S sobre P.

Las líneas *abcd* que separa la parte iluminada de la sombra propia del cuerpo, y *a'b'c'd'* que da el contorno de la sombra arrojada, se llaman *líneas de sombras*. La primera ha recibido más particularmente el nombre de *separatriz*. (Ver esta voz.)

Casos generales.—Se distinguen en la determinación de las líneas de sombras de los cuerpos dos casos generales: según que el cuerpo esté iluminado por un punto, ó bien si los rayos luminosos que caen sobre él son paralelos entre sí.

En el primer caso, el problema queda reducido, como es fácil ver, á la determinación de la curva de contacto de un cono circunscrito á dicho cuerpo, cuyo vértice sea el punto luminoso, y esta curva de contacto nos da la separatriz, y á encontrar la intersección de dicho cono prolongado con el cuerpo sobre el cual se quiere deternar la *línea de sombra* arrojada. Generalmente esta segunda parte del problema se refiere á buscar las trazas del cono de sombra sobre los planos de proyección, respecto á los cuales el cuerpo propuesto está referido.

La tangente en un punto de la línea de sombra arrojada por el cuerpo sobre uno de los planos de proyección, se determina hallando la traza sobre el plano que se considera, del plano tangente á la superficie del cono de sombra á lo largo de la generatriz del mismo que pasa por el punto de la línea de sombra proyectada.

—En el segundo caso el problema es idéntico al anterior, considerando, en lugar de un cono circunscrito, el de un cilindro igualmente circunscrito á la superficie del cuerpo y cuyas generatrices sean paralelas á la dirección del rayo luminoso, y la determinación de la sombra arrojada al problema de hallar las trazas de un cilindro sobre los planos de proyección.

—Para completar lo concerniente á estas líneas, véanse los artículos *curvas de contacto* y *separatriz*.

Aplicaciones.—El trazado geométrico de las líneas de sombras es una de las principales aplicaciones de la Geometria descriptiva, toda vez que en las representaciones gráficas facilitan notablemente la inteligencia de los dibujos.

Steineriana.

Definición.—Se sabe que el lugar de los puntos dobles de las primeras polares de un punto y con respecto á una curva

$$f = a_x{}^n = b_x{}^n = \ldots\ldots = 0,$$

es la curva hessiana. (Ver esta voz.) Pues bien; eliminando las y_1 coordenadas del polo entre las tres ecuaciones

$$\left(f_{ik} = \frac{1}{n(n-1)} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} a_x^{n-2} a_y\, a_1 = \Sigma f_{1k}\, y_k = 0 \\ a_x^{n-2} a_y\, a_2 = \Sigma f_{2k}\, y_k = 0 \\ a_x^{n-2} a_y\, a_3 = \Sigma f_{3k}\, y_k = 0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

una segunda curva será recorrida por el polo y; esta es la *steineriana.*

Historia.— Steiner llamó á esta curva *curva-noyau* (Kerncurve), y sus propiedades las expuso, sin demostrarlas, en *Journal de Crelle*, tomo XLVII; Cayley abordó su estudio para las curvas de tercer orden (*A memoir on curves of the third order. Philosophical Transactions*, t. CXLVII, 2.ª parte, 1857); Cremona ha deducido sus números plückerianos (*Einleitung in die einige von Steiner behandelte Curven)*, pudiéndose consultar á Clebsch (*Ueber einige von Steiner behandelte Curven. Journal de Crelle*, t. LXIV).

Ecuación, orden y clase.—La ecuación de la steineriana se obtendrá eliminando las x en las ecuaciones (1). Conforme á la proposición, según la cual el grado del resultado con relación á los coeficientes de cada ecuación es igual al producto de los órdenes en los cuales entran las variables en las otras ecuaciones, el orden de la steineriana resultará ser igual á

$$3\,(n-2)^2.$$

Para determinar su clase, consideremos que las coordenadas n_1 de una de sus tangentes se encuentra por medio de las fórmulas

$$\left.\begin{array}{l} n_1\ y_1 + n_2\ y_2 + n_3\ y_3 = 0 \\ n_1 dy_1 + n_2 dy_2 + n_3 dy_3 = 0 \end{array}\right\} \quad (2)$$

por ser la tangente la línea que une los puntos y_1 é $y_1 + dy_1$. El punto $y + dy$ debe satisfacer, lo propio que el y á las ecuaciones (1), si en estas ecuaciones se pone $x_i + dx_i$ en lugar de x_i. Se tendrán las tres ecuaciones,

$$\left.\begin{array}{l} f_{11} dy_1 + f_{12} dy_2 + f_{13} dy_3 + y_1 df_{11} + y_2 df_{12} + y_3 df_{13} = 0 \\ f_{21} dy_1 + f_{22} dy_2 + f_{23} dy_3 + y_1 df_{21} + y_2 df_{22} + y_3 df_{23} = 0 \\ f_{31} dy_1 + f_{32} dy_2 + f_{33} dy_3 + y_1 df_{31} + y_2 df_{32} + y_3 df_{33} = 0 \end{array}\right\} \quad (3)$$

Multiplicando las ecuaciones (1) una vez por x_1, x_2, x_3, y otra por dx_1, dx_2, dx_3 y sumándolas cada vez, se tiene

$$\left.\begin{array}{l} f_1\, y_1 + f_2\, y_2 + f_3\, y_3 = 0 \\ y_1 df_1 + y_2 df_2 + y_3 df_3 = 0 \end{array}\right\} (4)$$

y como, por otra parte, las ecuaciones (3) multiplicadas por x_1, x_2, x_3, nos dan, teniendo presente la (4), el resultado

$$fydy_1 + f_2dy_2 + f_3dy_3 = 0.$$

Si se comparan estas ecuaciones con la (2), se tendrá:

$$Mn_1 = f_1, \quad Mn_2 = f_2, \quad Mn_3 = f_3 \quad (5)$$

de donde se deduce, que á todo punto de la hessiana corresponde una tangente á la steineriana.

Eliminando las x entre estas ecuaciones y la ecuación

$$\Delta = 0,$$

resulta una ecuación entre las cantidades u, que será la ecuación de la steineriana en coordenadas líneas.

Así, por tanto, la clase de la steineriana estará determinada por el número de tangentes que pasan por un punto cualquiera x, es decir, que satisfacen á la ecuación;

$$u\,\xi = 0$$

ó

$$f_1\xi_1 + f_2\xi_2 + f_3\xi_3 = 0,$$

y como esta ecuación representa una curva de $(n-1)^{\text{ésimo}}$ orden, que, reunida con la hesseniana, determina los $3(n-2)(n-1)$ puntos tales que las tangentes á la steineriana que les corresponde pasan por el punto ξ. El número de estas tangentes queda determinado y la steineriana, es, por tanto, de la clase $3(n-1)(n-2)$.

Propiedades.—La steineriana es envuelta por las polares lineales de los puntos de la hessiana, y el punto de contacto de una de estas rectas es también el punto y de la steineriana correspondiente al polo x de la hessiana.

—El lugar de los puntos de las primeras polares que tocan á la

hessiana, se descompone en dos partes: la steineriana, que es del orden $3(n-2)^2$, y de otra curva del orden $3(n-2)(4n-9)$, que es el producto de las tangentes de inflexión de la propia steineriana.
—Para las primeras polares de los puntos de estas tangentes de inflexión, el contacto es un contacto propiamente dicho; y, al contrario, para aquellos de los puntos de la steineriana, el contacto es impropiamente dicho; estas últimas polares tienen un punto doble sobre la hessiana.
—El número de tangentes de inflexión de la curva de Steiner, es de $3(n-2)(4n-9)$.
—Existen $\frac{3}{2}(n-2)(n-3)(3n^2-9n-5)$ primeras polares de dos puntos dobles, y los polos correspondientes son los puntos dobles de la steineriana. Las dos tangentes en estos últimos puntos son las polares lineales de los dos puntos correspondientes de la steineriana.
—Existen $12(n-2)(n-3)$ primeras polares que tienen un punto de retroceso; los polos correspondientes son los retrocesos de la steineriana y las tangentes en los puntos de retroceso de las polares que tocan la hessiana en estos puntos.
—Del mismo modo que la hessiana pasa por los puntos de inflexión de la curva originaria, la steineriana toca todas sus tangentes de inflexión.

Steineriana de un haz de curvas.—Cuando en un haz de curvas se considera la hessiana como el lugar de los puntos en que las polares lineales, relativamente á todas las curvas del haz, se cortan en un mismo punto, estos puntos describen la *steineriana del haz* cuya ecuación se obtiene eliminando las cantidades x entre las tres ecuaciones

$$a_x^{m-1}a_z=0;\ a'_x{}^{m-1}a'_z=0,\ \text{y}\ a''_x{}^{m-1}a''_z=0,$$

esta línea es del orden $3(m-1)^2$, conforme á su definición, y está ligada á la hessiana (Ver *hessiana de un haz de curvas*) por una relación de determinación única.

Strofoide.

Definición.—Si desde un punto, A (fig. 1), situado en uno de los lados de un ángulo, yox, se trazan secantes tales como la AB que corten al otro lado en un punto B; y si sobre cada secante, á partir de dicho punto B, se toman longitudes $BM=BM'=OB$, el lugar de los puntos M y M' así obtenidos es una *strofoide*.

Clasificación.—Según que el ángulo dado, yox, sea recto ú oblicuo, la strofoide se denomina *recta* ú *oblicua.*

Historia.—Quetelet, al ocuparse del estudio de las focales (*De quibusdam locis geometricis necnon de curva focali*, Gand., 1819), describió esta curva á la cual dió el nombre de *focal de nodo*, expresión poco apropósito, no solamente porque toda línea, lugar de los focos de ciertas secciones planas, puede ser nombrada focal por iguales títulos que esta curva, sino porque también ella goza de un número de propiedades que la caracterizan y distingue perfectamente de aquéllas. Para evitar estas dificultades, Charles la dió el nombre de *focoique (Mémoires de la Académie de Bruxelles,* 1829); pero luego se le ha asignado el de strofoide, con el cual se la conoce hoy día. Casali las denominó *pteroide. (Bolletino de Boncompagni*, t. VIII, 1875.)

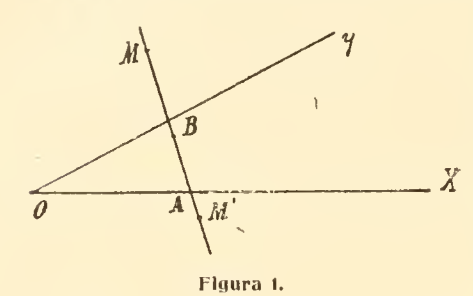


Figura 1.

Strofoide recta.—Ecuación.—Siendo recto el ángulo BCD (figura 2), esta curva es el lugar de los puntos M y M' de manera que $CZ = ZM = Z'M'$.

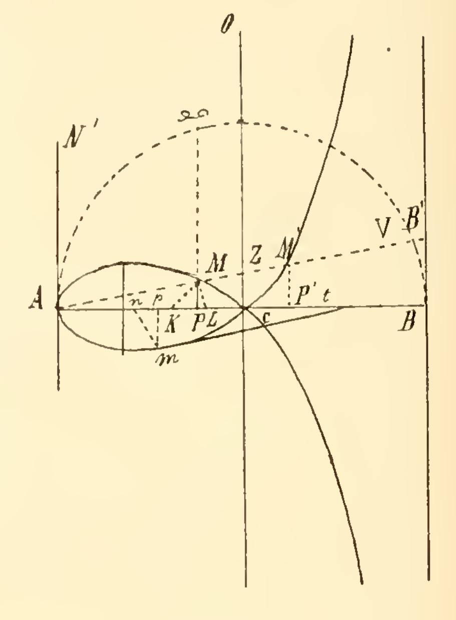


Figura 2.

Su ecuación polar será: llamando (ρ, ω) las coordenadas del punto M y a la distancia AC

$$\rho = \frac{a \cdot \cos. 2\omega}{\cos. \omega}$$

estando el polo en el punto C.

La ecuación cartesiana, tomando CO por eje de las y y CB por eje de las x, se deducirá fácilmente de la anterior y será:

$$x(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2),$$

lo que nos da:

$$y = x\sqrt{\frac{a - x}{a + x}}.$$

Forma.—Para que y sea real, es necesario que x esté comprendido entre $-a$ y $+a$; así, pues, la curva está situada entre las rectas AA' y BB' que tienen respectivamente por ecuaciones $x = -a$ y $x = a$.

Cuando x varía de O á $-a$, la ordenada desde cero va creciendo para decrecer luego y hacerse nula; así se obtiene el arco CMA. Cuando x varía de 0 á a, la ordenada y varía de 0 á $-\infty$, lo que nos da un arco CH que parte del origen y se aleja al infinito, aproximándose cada vez más á la recta BB' que viene á ser una asíntota.

Cambiando de signo el radical, se obtiene otra rama simétrica á la anterior con respecto á AB.

Propiedades.—Cada punto M tiene su *conjugado* M', y las abscisas CP y CP' conjugadas son iguales entre sí.

— El círculo de radio $AC = a$ se llama *circunscrito* á la curva, y prolongando la ordenada y de la curva en el punto M hasta que encuentre á la circunferencia en Q, este punto es el *conjugado* del círculo perteneciente al punto M.

— Las cuerdas conjugadas MC, $M'C$ forman siempre entre sí un ángulo recto.

— Los tres triángulos rectángulos MCP, $M'CP'$ y MCM' son semejantes.

— La perpendicular ML al radio vector AM en M es igual á la parte CL del eje comprendido entre el centro y el punto L en que la perpendicular ML corta al eje.

— Una perpendicular MK á la cuerda CM en M, corta al eje en K, divide el ángulo AMP en partes iguales entre sí y al ángulo MCP.

— Se tiene la proporción:

$$PK : PM :: CP : M'P'.$$

— La tangente conjugada del círculo Q es paralela al radio vector AM.

— La curva corta al eje en C según un ángulo de 45°.

— La ordenada máxima de la porción cerrada vale próximamen-

te $\frac{3}{10}a$; su conjugada $\frac{6}{5}a$, y su abscisa del centro es próximamente igual á $\frac{3}{5}a$, ó sea doble de la ordenada de la parte cerrada.

— La tangente

$$MT = \frac{a(a-x)}{(a-x)^2-ax}\sqrt{\frac{x(a^2+2ax-x^2)}{2a-x}}$$

— La subtangente

$$PT = \frac{x(2a-x)(a-x)}{(a-x)^2-ax}.$$

— Si de la subtangente conjugada del círculo circunscristo restamos el semieje, la tercera proporcional á la diferencia obtenida y á la ordenada conjugada del círculo nos dará la subtangente de la curva y, por consiguiente, la tangente.

— La normal

$$MN = \frac{a(a-x)}{(2a-x)^2}\sqrt{a^2+2ax-x^2}$$

— La subnormal

$$PN = \frac{(a-x)\left[(a-x)^2-ax\right]}{(2a-x)^2}$$

— Un arco S se encuentra expresado por la serie:

$$S = \sqrt{2}\left(x - \frac{x^2}{2a} + \frac{5x^3}{3.4.a^2} - \frac{5x^4}{4^2.a^3} + \frac{47.x^5}{4.5.8.a^4} - \text{etc.}\right)$$

— La cuadratura se obtiene por la expresión

$$\int y\,dx = \int x\,dx\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$$

que integrada entre los límites $x=o$ y $x=a$ nos da

$$a^2 - \frac{\pi.a^2}{4},$$

de la parte cerrada ú hoja.

— El sólido de revolución de la hoja alrededor del eje es:

$$\pi \int y^2\,dx = 2\pi a^3 \left(\log.\, 2a - \frac{2}{3}\right).$$

— Consideremos (fig. 3) un círculo Δ y dos diámetros rectangulares; si alrededor del punto O se hace girar una transversal Δ′ y se toma en cada posición de ella $OI = CD$, el lugar de los puntos I es una *strofoide recta.*— En efecto; la perpendicular bajada desde el centro A á la transversal Δ′ cae al medio de la cuerda OD; por lo tanto, al medio de CI, puesto que se supone que $OI = CD$. El triángulo IAC, semejante al IEO, prueba que el lugar del punto I es una strofoide, que tiene por vértice el punto A y por punto doble el O. Si se toma $D\mu' = D\mu$, la recta $\mu' I$ es la tangente á la curva en el punto I.

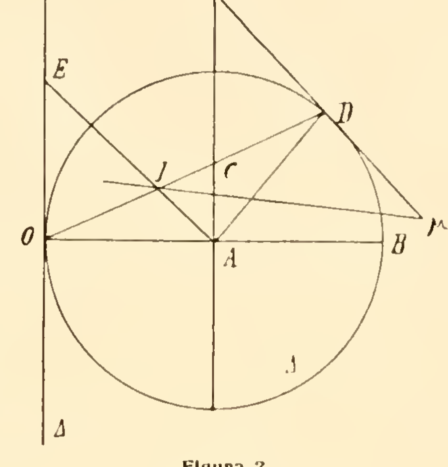


Figura 3.

— Cuando una parábola rueda sobre otra parábola igual, el pie de la directriz describe una *strofoide* recta.

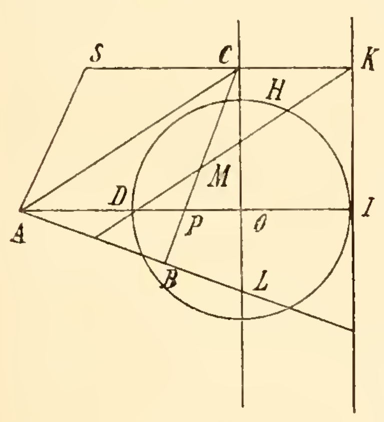


Figura 4.

— Esta curva es la podar del pie de la directriz de una parábola.

Trazado.—Esta curva puede trazarse por un movimiento contínuo; en efecto: sea un círculo (fig. 4), un diámetro OD y la tangente en uno de los extremos I de este diámetro. Tomemos sobre la prolongación de OD el punto A á una distancia de D igual á OD, y consideremos una escuadra, cuyo lado BC sea igual al diámetro del círculo y se mueva de modo que su lado indefinido pase por A y el extremo C recorra el diámetro OC perpendicular á OD. El punto B describirá la strofoide recta, porque siendo iguales los

triángulos rectángulos AOC y ABC, la figura $ABOC$ es un trapecio isósceles, y por tanto, $LB = LO$ y B un punto de la curva.

Strofoide oblicua.—Ecuación.—No siendo recto el ángulo yox, esta curva es el lugar de los puntos M y M', de tal manera, que $BM = BM' = BO$ (fig. 5).

Su ecuación polar será, llamando (ρ, ω) las coordenadas del punto M, a la distancia OA y θ el ángulo yox

$$\rho = \frac{a \,.\, \text{sen.}\,(2\omega - \theta)}{\text{sen.}\,(\omega - \theta)}.$$

Forma.—Si el punto B coincide con O, los puntos M y M' coinciden asimismo con O; luego este punto O es un punto *doble*.

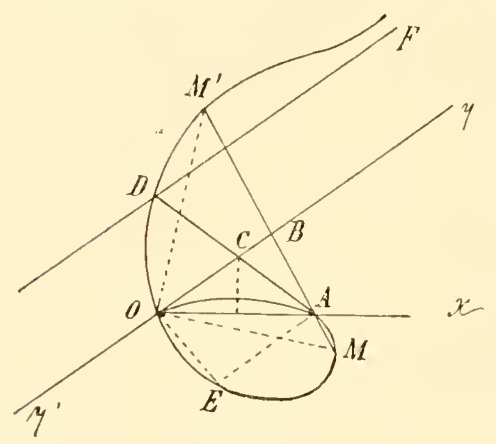


Figura 5.

La curva pasa por A, puesto que para el punto C, encuentro con Oy de la perpendicular en el medio de OA, será $OC = CA$.

Si B se aleja al infinito en el sentido Oy', el arco OM' se extiende también al infinito, y tiene por asíntota á la recta DF dirigida por D paralelamente á Oy.

Si B se mueve en el sentido Oy', se obtendrán dos arcos de la curva que parten del punto O; el uno viene á acodarse con el AME en el punto E y el otro se alejará al infinito, y tendrá por asíntota la recta DF.

La curva, pues, presentará la forma manifiesta en la figura.

Propiedades.—El lugar de las secciones producidas en un cono, por planos que pasen por una recta, tangente á este cono y perpendicular á una arista, es una strofoide oblicua. (Quetelet.)

— Ella es también el lugar de los puntos de contacto de las tangentes dirigidas desde un punto á una serie de cónicas homofocales y de los pies de las normales trazadas desde el mismo punto á estas cónicas

— Consideremos un círculo Δ y dos diámetros oblicuos AOB, PAQ; por el punto O (fig. 6) tracemos una transversal sobre la cual tomemos $OI = CD$; el lugar de los puntos I es una *strofoide oblicua*.

Llamando $2R$ el diámetro del círculo Δ, su ecuación polar será

$$\frac{\rho}{R} = \frac{\text{sen.}\,(\alpha - 2\,\omega)}{\text{sen.}\,(\alpha - \omega)},$$

y su ecuación cartesiana

$$(x^2 + y^2)\,x\,\text{sen.}\,\alpha - y\cos.\,\alpha) = R\,(x^2\,\text{sen.}\,\alpha - 2\,x\,y\cos.\,\alpha - y^2.\text{sen.}\,\alpha).$$

Si se toma $D\mu' = D\mu$, la recta $\mu' I$ es la tangente á la curva en el punto I.

— Cuando una cúbica pasa por los ombílicos del plano, si admite un

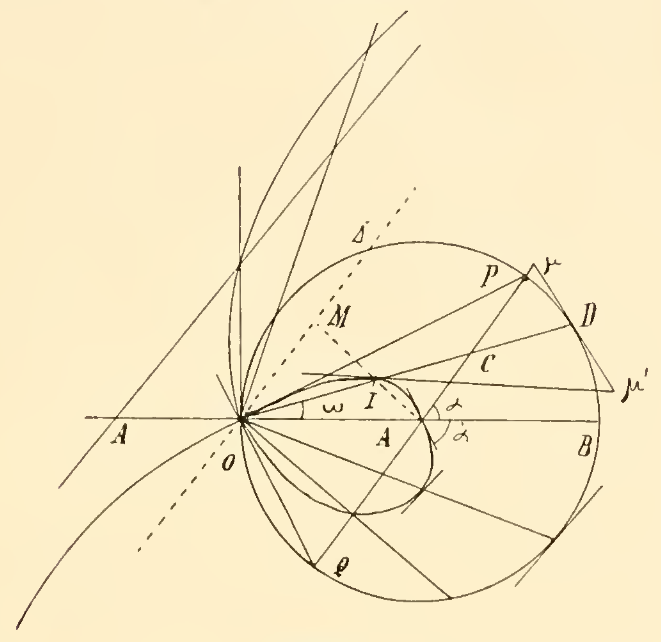


Figura 6.

nodo con dos tangentes rectangulares, esta curva es una strofoide (recta ú oblicua).

—Si en un círculo se considera un radio fijo OA y un radio móvil OB, el lugar del punto de encuentro de las alturas del triángulo AOB es una strofoide.

Strofoide de Mr. Montucci.—Este matemático estudia en los *Nouvelles Annales*, t. V, pág. 470, bajo el nombre de strofoide, la curva que se conoce con el nombre de logocyclica. (Ver esta voz.)

Aplicaciones.—Esta línea, por la variedad de curvaturas que presenta, se presta á dar á la Arquitectura formas más graciosas que

las del círculo, elipse, etc., y como las strofoides son todas semejantes, usada esta curva en los dibujos se pueden éstos reducir ó aumentar de escala sin perder los perfiles nada de su gracia, lo que no puede ser cuando las curvas son trazadas á *mano alzada.*

Se presta especialmente para la arquitectura gótica. La parte de la hoja comprendida entre el nodo y la ordenada máxima tiene la ventaja de la solidez y altura mayor, que aquella que, en igualdad de longitud, corresponde á una ojiva ordinaria circunscrita al triángulo equilátero. La porción comprendida entre el vértice y la ordenada máxima, de la parte de hoja, tiene alguna semejanza con el semicírculo y es tan elegante; presenta ventajas en la construcción de puentes, atendiendo á que bajo una misma longitud ofrece un décimo más de altura, y, por consecuencia, más solidez que el arco semicircular.

Ofrece, por último, ventajas para obtener curvaturas más dulces en los caminos, teniendo á su favor sobre la parábola de ser la strofoide una curva asintótica, lo cual no es la parábola, que es la curva que generalmente se usa. (Ritt.)

— La *cappa* (ver curva k) y la strofoide son casos particulares de la curva de sombra del helizoide alabeado estudiado por Poncelet. (A. Aubry).

T

Talón.

Del latino, *talus*.

Definición.—Curva formada por dos arcos de círculo que son tangentes exteriormente, siendo el convexo el que más vuela. Es la inversa de la gola. (Ver esta voz.)

Historia.—Se le ha dado á esta curva el nombre de *cimacio lesbio*, cuando la corona un filete (Genaro, *Escuela de Arquitectura*, lib. I, página 26), y también á causa de su forma sinusoidal; se la conoce con el nombre de *pequeña onda*. Cuando corona el capitel de una columna, se la suele llamar *cimacio*.

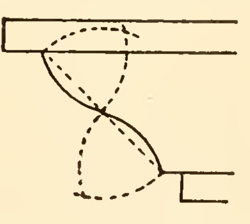
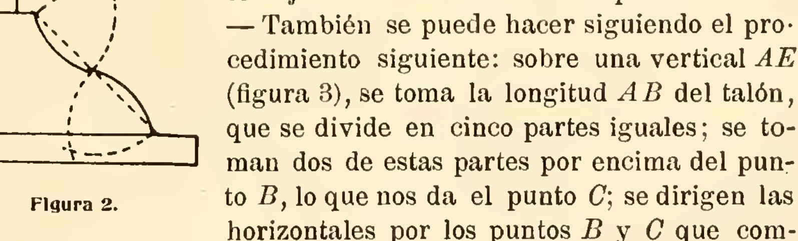


Figura 1.

Clasificación.—Se distingue el talón *recto* y el *inverso*, el primero es aquél que tiene vuelto el vuelo hacia arriba (fig. 1), y el segundo el que tiene el vuelo hacia abajo (fig. 2).

Trazado.—Se unen por una recta los puntos A y B y se hace el dibujo de la curva como el de la gola, por la semejanza de esta curva con aquélla.



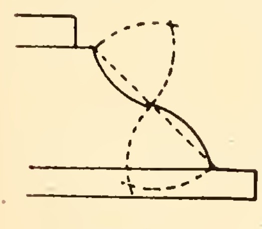


Figura 2.

— También se puede hacer siguiendo el procedimiento siguiente: sobre una vertical AE (figura 3), se toma la longitud AB del talón, que se divide en cinco partes iguales; se toman dos de estas partes por encima del punto B, lo que nos da el punto C; se dirigen las horizontales por los puntos B y C que comprenden el filete superior; se toma la distancia AB y se la lleva en Bc; se traza la eA y se prolonga esta línea hasta su encuentro en c con la horizontal del punto C; se baja desde este punto c una

vertical que corta en b y a las horizontales de los puntos A y B; por último, se toma la mitad de la línea Ac y se la refiere en bf y en Ag;

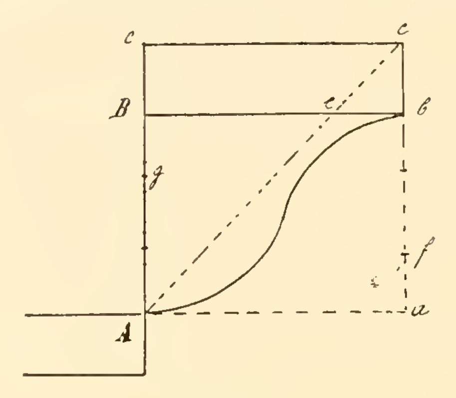


Figura 3.

f y g son los centros de los dos arcos de círculo y bf ó Ag sus radios. Se terminan estos arcos en su punto de encuentro.

Tangente hiperbólica.

Mr. William Roberts *(Nouvelles Annales*, t. XIII, pág. 240) ha dado el nombre particular de *tangente hiperbólica* á la hipérbola equilátera que, siendo tangente á una cónica en uno de sus puntos, es, al mismo tiempo, concéntrica con ella.

Tangentes.

Definición.—Se dice que dos curvas son tangentes, cuando tienen en un mismo punto, perteneciente á ambas, una tangente que le es común.

Relación de condición.—Siendo $f = 0$ y $\varphi = 0$ las ecuaciones de las dos curvas, para que éstas tengan un elemento común, las coordenadas del punto M de contacto han de satisfacer á las ecuaciones de las dos curvas y los coeficientes angulares de sus tangentes en el M serán iguales. Así, pues, las coordenadas (x, y) deberán, por tanto, satisfacer á las tres ecuaciones:

$$f(x, y) = 0, \quad \varphi(x, y) = 0, \quad \frac{f'x}{f'y} = \frac{\varphi' x}{\varphi' y}.$$

Eliminando x é y entre estas tres ecuaciones, se llegará á una relación entre los coeficientes, que será la condición del contacto; y si uno de dichos coeficientes es desconocido, se tendrá su valor.

Casos particulares.—Cuando una de estas coordenadas es infinita ó lo son las dos, las curvas son asintóticas (ver esta voz), de modo que, si se da una de ellas y la forma de la otra por su ecuación, en la que entran coeficientes indeterminados, éstos se determinarán por la condición de que alguna coordenada infinita satisfaga á la ecuación anterior y á las de las líneas.

Caso especial.—Mr. Chasles ha demostrado en una comunicación á la Academia de Ciencias de París, en 15 de Febrero de 1864, que el número de cónicas tangentes, á cinco cónicas dadas, es de 3264.

Tangentóide.

Definición.—Curva cuya ordenada es la tangente geométrica del arco tomado sobre un círculo cuyo radio es igual á la abscisa.

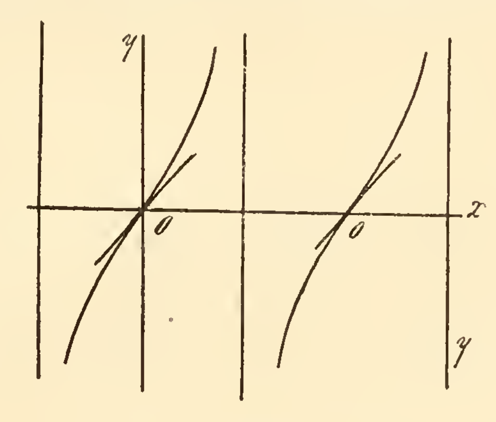


Figura 1.

Ecuación.—La ecuación de esta curva en coordenadas rectangulares, es según esta definición

$$y = R \operatorname{tg.} \frac{x}{R}.$$

Si $R = 1$ toma la forma más sencilla

$$y = \operatorname{tg.} x.$$

Forma.—Esta curva se compone de una infinidad de partes idénticas. Los puntos en que corta el eje de las x distan entre sí una semicircunferencia, puesto que para $x = R\pi$ es $y = 0$.

El origen es un centro, puesto que cambiando x en $-x$ é y en $-y$ no cambia su ecuación y lo propio ocurre con todos los puntos de intersección de la curva con el eje de las x.

— Para $x = \frac{\pi}{2}$ ó $x = \frac{2K+1}{2}\pi$ se tiene $y = \pm\infty$. Por tanto, las paralelas trazadas al eje de las y, por los puntos situados á igual distancia de dos centros consecutivos, son asíntotas de la curva.

Los valores de los coeficientes diferenciales de primero y segundo orden, siendo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos.^2 x}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2 \,.\, \text{sen.}\, x}{\cos.^3 x},$$

nos dicen que en los puntos en que la curva corta al eje de las x, la tangente forma un ángulo de 45°, y son, además, puntos de inflexión, puesto que son puntos centros que están sobre la curva.

Tautócrona.

Del griego ταὐτό, *el mismo,* y χρόνος, *tiempo.*

Definición.—Curva cuya propiedad es que, si desde uno cualquiera de sus puntos se deja caer un cuerpo pesado á lo largo de su concavidad, llega siempre al punto más bajo en el mismo tiempo.

Historia.— La naturaleza de esta curva ha ocupado á los geómetras del siglo pasado, siendo uno de los mayores títulos de gloria para Huygens (*Horologium oscillatorium, sive de motu pendulorum ad Horología aptato demonstrationes Geométricæ,* París, 1673), en cuyo capítulo II, titulado *De descensu graviam et motu eorum in Cicloyde,* establece el tautocronismo del movimiento cicloidal, sirviéndose de esta propiedad para la construcción de los relojes.

Newton encontró asimismo una cicloide, suponiendo la resistencia proporcional á la velocidad, siéndolo también por Euler (*Actes de Leipsig,* 1726; *Commentaires de Saint-Petersbourg,* 1729, y en el t. II de su *Mecanique,* 1741), en el que supone un medio resistente como el cuadrado de la velocidad, lo cual había sido estudiado por Juan Bernouilli (*Recueil de l'Académie des Sciences,* 1730).

La Fontaine en sus *Memoires* insertas en *Recueil de l'Académie des Sciences* y en la obra *Memoires de Mathématiques*, Paris, 1764, considera el caso en que la resistencia está representada por un término de segundo grado en función de la velocidad y aplica un análisis nuevo y más general que el de sus antecesores.

Lagrange *(Sur les courbes tautóchrones, Memoires de l'Academie royale des Sciences et Belles Lettres de Berlín*, t. XXI, 1765), se propone la cuestión más general de determinar cual es la fuerza necesaria para producir el tautocronismo, considerando esta fuerza como una función cualquiera de la velocidad y de la posición del móvil. La fórmula encontrada por Lagrange fué también demostrada por D'Alembert en las mismas Memorias. Lagrange escribe otra Memoria en 1770 y deduce que: «Toda curva que es tautócrona en una hipótesis cualquiera de fuerza y de resistencia, lo es si se supone la resistencia aumentada de un término proporcional á la velocidad».

Mr. Puiseux ha estudiado el problema de las tautócronas fundándose *(Journal Liouville*, t. IX, pág. 409, 1844) en la diferenciación bajo el signo integral, cuyo método es preferible al de Mr. Poissons *(Cours de Mecanique)*, por desarrollo en serie.

Para terminar este punto, mencionaremos un elegante artículo de Mr. Haton de La Goupilliere (*Journal de Liouville*, tomo XIII, 2.ª serie, pág. 304), en el cual se demuestra que la epicicloide y demás curvas encontradas por Mr. Puiseux son las únicas para las cuales la ley de la fuerza está comprendida en la fórmula general de Lagrange relativa al tautocronismo.

Ecuación.—Sea un móvil pesado y en el vacío. Dirigiendo el eje de las x en sentido contrario á la gravedad, se trata de encontrar la curva que debe seguir un punto material para llegar todas las veces al mismo tiempo al origen de coordenadas, cualquiera que sea el punto de partida, pero sin velocidad inicial.

Si llamamos t el tiempo:

s el arco de tautócrona á partir del origen;

h el valor de x para el punto de partida del móvil;

g la acción de la gravedad;

T el tiempo empleado por el móvil para llegar al origen;

tendremos:

$$s = \frac{2\,T}{\pi}\sqrt{2gx}\,; \qquad x = \frac{\pi^2}{8gT^2}\,s^2\,,$$

ecuación de una cicloide cuyo vértice está en el origen y cuyo eje, dirigido en sentido contrario de la gravedad, tiene por longitud

$$\frac{2gT^2}{\pi^2}.$$

Los detalles de los cálculos á que los anteriores resultados se refieren, pueden verse en Despeyrus (*Cours de Mecanique*, tomo I, página 315), así como los relativos á los que siguen.

Casos particulares.—Supongamos el móvil atraído ó repulsado por un centro fijo, y llamemos

s la distancia del móvil á este centro;

$f(r)$ la fuerza que le solicita, positiva para la atracción y negativa para la repulsión;

a el valor de r, para el punto de partida del móvil;

α el valor de r, para los arcos recorridos en el mismo tiempo;

θ el ángulo comprendido entre los radios vectores r y α,

tendremos,

$$s = \frac{2T}{\pi}\sqrt{2\int_{\alpha}^{r} f(r)\,dr}$$

y como se demuestra que

$$f(r)\frac{dr}{ds} = \frac{\pi^2 s}{4T^2},$$

se ve que la componente, según el radio vector de la fuerza que solicita el móvil, debe ser en cada instante proporcional al arco que le resta por recorrer. Propiedad es ésta ya conocida por Newton (*Principés*, lib. I, sección X).

— Como $\frac{dr}{ds} = 0$ para $r = \alpha$ se ve que, en general, la tautócrona es normal al radio vector dirigido desde el centro fijo al origen de los arcos recorridos en tiempos iguales; este origen es un vértice de la curva.

— Si se supone la fuerza proporcional á una potencia de la distancia se llega á obtener como tautócranas curvas como la epicicloide y espirales de ramas simétricas.

— Cuando la fuerza es proporcional á la primera potencia de la distancia se obtiene una epicicloide (*Principés*).

— Se pueden hacer diversas hipótesis sobre la ley de la fuerza y se

obtienen curvas de formas variadas y más ó menos fáciles de discutir.

— Si el móvil no está en el vacío, sino que experimenta de parte del medio en que se mueve cierta resistencia, como, por ejemplo, cuando ésta es proporcional al cuadrado de su velocidad, tendremos, llamando K á esta resistencia, para una velocidad igual á la unidad y conservando la notación anterior,

$$x = \frac{\pi^2}{4 K^2 g T^2} (e^{ks} - ks - 1)$$

para $K = 0$,

$$x = \frac{\pi^2}{8 g T^2} s^2$$

y se encuentra la cicloide.

— Cualquiera que sea K, la tautócrona es tangente á la cicloide en su vértice, y el contacto es de segundo orden.

— Cuando se tiene en cuenta el frotamiento, se demuestra que la cicloide es la única curva plana que goza de la propiedad del tautocronismo con relación al movimiento de un punto pesado, y que las solas curvas planas que son tautócronas para fuerzas centrales proporcionales á la distancia, cuando se tiene en cuenta el frotamiento, son las que han sido estudiadas por Puiseux y que son tautócronas en el caso en que no se considera el frotamiento (Mr. Darboux: *Cours de Mecanique*, de Despeyrus, t. I, pág. 441).

Tensiones (Línea de).

Definición.—En telegrafía se da este nombre al lugar geométrico de las extremidades de las líneas que representan las tensiones en los diversos puntos de un conductor.

Historia.—Volta designó con el nombre de *tensión eléctrica* á lo que hoy se llama *potencial*. Diferencia de tensión es, pues, diferencia de potencial; y como la palabra tensión se ha tomado con diferentes acepciones, es preferible abandonarla. Sin embargo, en Galante (*Manual de Mediciones eléctricas*, pág. 30), encuéntrase la línea de tensiones definida tal como dejamos arriba indicado, por lo cual hacemos aquí á ella referencia.

Térmica.

Definición.—Si un haz de luz solar cae sobre un prisma de vidrio ó, mejor aún, de sal gema, el calor que acompaña al haz luminoso no sólo se refracta con éste, sino que, como él, se dispersa perpendicularmente á las aristas del prisma, dando lugar al espectro calorífico y poniendo de manifiesto que, así como la luz está formada por rayos luminosos de varias especies, así también el calor se compone de diversos rayos caloríferos, desigualmente refrangibles. Representando por una recta dada la extensión total de la radiación calorífica y luminosa, levantando sobre dicha recta perpendiculares cuyas magnitudes representen la intensidad respectiva del calor en cada punto, y uniendo entre sí los extremos de estas perpendiculares, se obtiene una curva que recibe el nombre de *térmica* y que representa la distribución del calor en el espectro solar.

Historia. — Léslie fué el primero que reconoció, haciendo uso de su termómetro diferencial, que el calor aumenta en el espectro desde el violado hasta el rojo, y Herschel (*Philosophical Transactions*, 1840) opinó que dicho incremento se extendía aún más allá de este último color, pues fijó el máximo en la banda obscura que le termina, y Berad lo hizo en el rojo mismo.

Melloni (*Annales de Chimie et de Physique*, 2.ª serie, t. LIV, página 5, y t. LV, pág. 337, 1833) y Masson y Jamín (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XXXI, pág. 14, 1850), estudiaron las leyes de la transmisión del calor á través de substancias distintas, demostrando Seebeck que la variación encontrada por sus antecesores dependía de la naturaleza del prisma refringente; así, por tanto, con un prisma de agua encontró este físico el máximum de calor en el amarillo, con uno de alcohol le observó en el amarillo anaranjado y con uno de *crown* en el rojo medio. Melloni, con su termomultiplicador, confirmó más tarde todos estos resultados y sentando la ley de que el máximum del calor se aleja tanto más del amarillo, aproximándose al rojo, cuanto más diatérmana es la substancia de que está compuesto el prisma. Si éste es de sal gema, el máximum se forma por completo fuera del rojo.

Determinación.—Herschel determinó la curva térmica con un prisma de vidrio á cuyo efecto hizo caer sobre dicho prisma, por un orificio abierto en la ventanilla de una cámara obscura, un haz de luz solar y situando detrás del prisma sucesivamente, en las diferentes partes del espectro y á los lados de éste, una pila de Melloni sufi-

cientemente estrecha para que sólo recibiera los rayos que tienen igual refrangilidad.

Müller repitió en Jolburg este experimento con un prisma de sal gema y con instrumentos de mayor precisión, obteniendo la curva *ABCV*. En esta línea (fig. 1) la parte *VCR* corresponde en el espectro visible á la radiación calorífica, desde el violado hasta el rojo, y la parte negra *BCBA* representa la misma radiación en la parte obscura que se encuentra fuera del rojo.

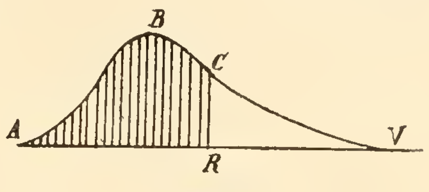


Figura 1.

La curva térmica *ABCV* manifiesta que el máximum del calor tiene lugar en *B*, cuyo punto está situado mucho más allá del rojo, y que la extensión total del espectro calorífero es casi doble que la del luminoso.

Consecuencia importante.—El espectro calorífico que acompaña al luminoso acusa una gran semejanza entre el calor y la luz. Y los experimentos ponen perfectamente de manifiesto que los rayos caloríficos pueden compararse con los luminosos, sin otra excepción que algunos cuerpos, que, siendo transparentes para la luz y para el calor luminoso, no lo son para el obscuro, y recíprocamente.

Térmica del espectro de luz eléctrica.—Tyndall se ha dedicado al estudio de investigaciones análogas á las anteriores respecto del espectro producido por la luz eléctrica, encontrando que la curva térmica para esta clase de luz se eleva, pasado el rojo, de una manera más brusca que en la térmica de la luz solar, y se prolonga mucho más. Este sabio atribuye la inferioridad de la radiación calorífica del espectro solar, comparado con el eléctrico, á la absorción del calor radiante de dicho astro por el vapor de agua que existe en la atmósfera.

Terminales.

Consideraciones generales.—Para los relojes de precisión se usan las espirales de curvas *terminales* teóricas que, entre otras, tienen la propiedad y especial ventaja de hacer desaparecer una de las causas de irregularidad en la marcha, ó sea anular la presión ejercida por la espiral contra el eje del balancín. Esta espiral, ó curva de Phillips, es importante para reglar el isocronismo.

M. C. Rosé ha encontrado una curva teórica de la que todos sus

puntos son exteriores á la parte cilíndrica de la espiral *(Les Mondes,* tomo XXVI). Este nuevo tipo se compone de dos semicircunferencias del mismo radio que las espiras, un poco separadas y reunidas por dos porciones rectilíneas iguales y paralelas á la distancia de los centros. Para que satisfagan á la condición expuesta en la teoria de Phillips ó curvas terminales, basta que la distancia de los centros sea igual, á

$$x = \frac{r}{2}\sqrt{\pi^2 + 4} - \pi = 0{,}02915 - r.$$

Asimismo determinó que la espiral goza de las mismas propiedades cuando se la termina por una curva teórica interior ó por dos curvas teóricas no simétricas.

En la teoria de Phillips se pide: 1.°, que no se ejerza ninguna presión durante el movimiento contra el eje del balancín, y 2.°, que el centro de gravedad de la espiral permanezca siempre, durante el movimiento sobre este eje, y que la reunión, si es posible de estas dos condiciones, resuelve la cuestión con una aproximación, por decirlo así, de segundo orden.

Phillips ha demostrado que, si la segunda condición está cumplida, queda satisfecha necesariamente la primera.

Tetracúspide.

Definición.—Curva que es la envolvente de un segmento rectilíneo de longitud constante, cuyas extremidades se apoyan sobre dos rectas fijas formando un ángulo dado.

Historia.—Su estudio fué propuesto en *Nouvelles Annales*, 1842, y Joachimsthal y Bouteiller se ocuparon de ella en la misma obra, tomo del año 1847. Su nombre es debido á G. Bellavitis. *(Sposizione del Metodo delle Equipollenze*, 1858).

Ecuación.—Si a es la longitud del segmento movil y γ el ángulo de las dos rectas fijas, su ecuación es

$$\operatorname{sen}^2\gamma\,(M^3 + 27\,a^2x^2y^2\operatorname{sen}^2\gamma) - 2a^2xy\,.\cos.\gamma$$

$$(8a^2\cos.^2\gamma + 9M\operatorname{sen}^2\gamma) - a^2M^2\cos^2\gamma = 0,$$

siendo

$$M = a^2 - x^2 - y^2 - 2xy\,.\cos\gamma.$$

— También se la considera como un caso particular de la ecuación

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

ó sea referida esta ecuación, semejante á la de la evoluta á la elipse (ver esta voz), á un sistema cualquiera de ejes coordenados rectangulares ú oblicuos.

Propiedades.—Tiene cuatro puntos de retroceso, de los que los opuestos están sobre una recta que le es tangente común. No se debe confundir con la curva paralela á la astroide (ver *Paralelas),* que tiene también cuatro puntos de retroceso, pero en ellos las tangentes son distintas.

— El área tiene por expresión

$$\frac{\pi a^2}{8 \, . \, \text{sen}^2 \gamma} (1 + 2 \, \text{sen}^2 \gamma),$$

y su perímetro tiene por longitud

$$(\pi \, . \cos . \gamma + 6) \frac{a}{\text{sen} \, . \, \gamma}.$$

— Para el mejor y más completo estudio de esta línea, se pueden consultar los trabajos de Laguerre (*Nouvelles Annales*, 1878), y para su rectificación y formas de su ecuación Mathesis, 1894.

Torbellino.

Consideraciones generales.—Cuando se estudia en Hidráulica el movimiento de las aguas corrientes, si el área de la sección transversal de un curso de agua y la pendiente del fondo son constantes, la pendiente de la superficie lo será también; pero, si permaneciendo el gasto constante, varía el área de la sección, que es el caso más general en el movimiento permanente, la pendiente en la superficie cambia asimismo de una sección á otra. Si va en disminución, se obtiene un *torbellino en elevación*, y cuando, por el contrario, aumenta, un *torbellino en depresión.*

Definición.—La forma adoptada por el perfil en longitud de la co-

rriente en los lugares en que se verifican los torbellinos, se llama *curva del torbellino.*

Forma.—Al tratar del perfil en longitud de una corriente (ver esta voz), se expresó la forma teórica que tomaba esta curva en los torbellinos, por lo que á lo allí expreso hacemos (respecto á este punto) referencia.

Determinación. — En la práctica sucede que esta curva no tiene por asíntota, como la teoría da á conocer, la línea de régimen uniforme, sino más bien por tangente en un cierto punto M (fig. 1) á

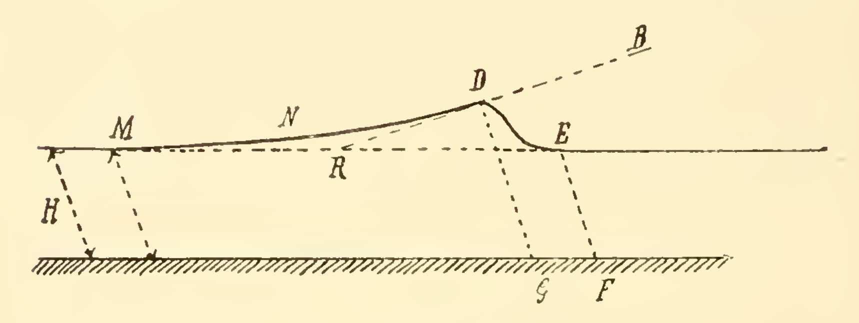


Figura 1.

dicha línea y en D á la horizontal que pasa por B, el punto más alto de los contenidos delante de la sección estrechada y la curva es cóncava hacia el exterior.

De estas consideraciones, Mr. Colignon *(Hydraulique)* deduce un trazado aproximativo de esta línea, el cual es el siguiente: se traza en el plano superior del nivel horizontal BD que encuentra en R la línea MR del régimen uniforme del canal. Para obtener una primera aproximación de la curva buscada, bastará trazar un arco de círculo tangente en D á la horizontal CR y tangente á la línea MR, lo cual conduce á tomar $MR = DR$, y el punto M será el punto aproximado de acuerdo de la curva del remolino, aguas arriba, con la línea de régimen uniforme. Se puede también construir una parábola de acuerdo de las dos tangentes MR y RD. La parte entre la sección DS y la EF será la de una caída brusca que no se rige por la ecuación del movimiento variado; pero como tiene que ser necesariamente tangente á la línea del régimen uniforme en el punto E, á partir del cual ambas líneas se deberán confundir, se sigue que desde el punto D de tangencia á RB al E de tangencia EM, deberá existir una inflexión muy marcada hacia el punto E.

— En el caso de los resaltos, los cuáles han sido observados y estu-

diados la primera vez por Bidone (*Memoires de l'Académie de Turin*, tomo XXV, 1820), la curva, en lugar de tener las líneas AB y CD (figura de perfil en longitud de la corriente) le es tangente y presenta la forma indicada en la figura 2.

— La curva asciende bruscamente de L á K, y se alarga luego desde K á D; la parte LK no está regida por la ecuación del movimiento gradualmente variado; éste es el resalto propiamente dicho. La por-

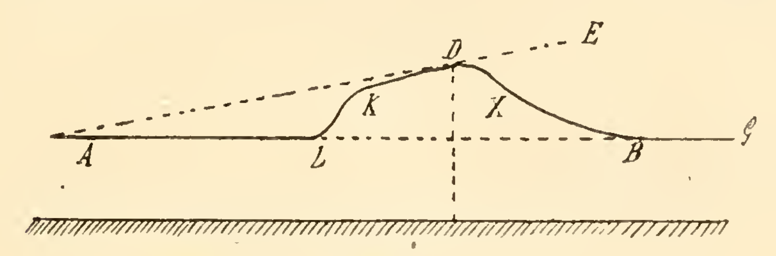


Figura 2.

ción KD pertenece al tipo UT de la figura antes mencionada y de D á X, en lugar de una caída brusca, sigue una porción XBG, que corresponde al tipo UV de dicha figura.

— Uno de los resaltos más notables es el del canal de Durance á la entrada del puente-canal de Roquefavour; su perfil en longitud se puede ver en la obra de Mr. Bazin, *Recherches Hydrauliques*, en la cual se encontrarán numerosos perfiles de resaltos.

Toroide.

Definición.—Si sobre cada una de las normales á la elipse, se toma, á partir de esta curva, una misma longitud, el lugar geométrico así obtenido forma una curva, que se conoce con el nombre de *toroide*.

Historia.—El nombre de toroide ha sido dado por Mr. Breton, por formar esta curva el contorno aparente de la proyección de un toro. (*Nouvelles Annales de Mathe.*, t. III, pág. 446); estudiándola también Mr. Trauson (*Journal de Liouville*, t. I, pág. 191) y Mr. Cauchy en su Memoria sobre la *Theorie analytique des toroides* (*Comptes Rendus*, 2.ª serie, 1841, t. XIII, pág. 1062).

Ecuación.—Puede esta curva ser considerada, en virtud de su definición, como la envolvente de una circunferencia de radio constante, cuyo centro está sujeto á permanecer sobre la elipse, y esta últi-

ma viene á ser la proyección de una circunferencia situada en el espacio. El círculo móvil envolvente puede considerarse como la proyección de una esfera del mismo radio, cuyo centro se mueve sobre la circunferencia de la que la elipse es proyección. La envolvente de esta esfera no es otra cosa que el toro ó superficie anular, de donde se deduce que esta curva forma el contorno aparente de la proyección de un toro, á lo cual, como hemos indicado, debe su nombre.

Siendo

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 1$$

la ecuación de la elipse, y

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = K^2$$

la del círculo generador; la ecuación de la toroide es:

$$(x^2 + y^2 - a^2 - b^2 - K^2)^2 (a^2y^2 + b^2x^2 - a^2K^2 - b^2K^2 - a^2b^2)^2 +$$
$$+ 4a^2b^2K^2(x^2 + y^2 - a^2 - b^2 - K^2)^3 - 27a^4b^4K^4 +$$
$$+ 18a^2b^2K^2(x^2 + y^2 - a^2 - b^2 - K^2)(a^2y^2 +$$
$$+ b^2x^2 - a^2K^2 - b^2K^2 - a^2b^2) + 4(a^2y^2 +$$
$$+ b^2x^2 - a^2K^2 - b^2K^2 - a^2b^2)^3 = 0.$$

Propiedades.—Esta curva es la paralela (ver esta voz) á la elipse, siendo la normal en cada uno de sus puntos, normal á la elipse.

— De la definición de esta curva, resulta que los centros de los círculos osculadores en los puntos correspondientes situados sobre esta línea coinciden, es decir, que los radios de curvatura de las dos curvas presentan una diferencia constante.

— La toroide se compone de dos ramas descritas simultáneamente por los dos puntos de la recta móvil igualmente distantes del punto de la elipse. La primera de estas ramas es de forma de óvalo; la segunda presenta una figura variable, según los casos; es óvalo, cuando la distancia á la elipse es inferior al menor de sus radios de curvatura; cuando mayor, la rama de toroide ofrece cuatro puntos de retroceso situados sobre la evoluta; si la misma distancia crece llegando á ser mayor que el máximo radio de curvatura de la elipse, la rama vuelve á ser óvalo.

—El radio de curvatura en función de la normal es: llamando N la porción de normal comprendida entre la curva y el eje mayor,

$$\rho = \frac{N^3 a^2}{b^4},$$

y si llamamos i el ángulo que la normal forma con los radios vectores r, r' trazados á los dos focos

$$\rho = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{1}{\cos.^3 i} \quad \text{ó} \quad \rho = \frac{(rr')^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

—La longitud del arco de toroide s es igual al de la elipse s_0 aumentado del arco circular comprendido sobre la circunferencia de radio λ, entre dos radios paralelos á las normales extremas; es decir,

$$s = s_0 + 2\pi\lambda.$$

—La superficie, aplicando la regla de Guldin, es:

$$N = \pi ab + \left(\frac{s + s_0}{2}\right)\lambda = \pi ab + s_0\lambda + \pi\lambda^2.$$

Trazado.—La construcción de esta curva se puede efectuar por puntos, por medio de las normales á la elipse, sobre las cuales se toma una longitud constante.

Mr. Prony ha propuesto otro procedimiento, que consiste en considerar á la curva como la envolvente de sus tangentes.

Se puede trazar también por las intersecciones sucesivas de una serie de circunferencias de radio constante que tienen sus centros sobre la elipse.

Y, por último, por medio de un aparato que la traza por un movimiento continuo, que no detallamos, por considerar sale ya su descripción de los límites que están señalados para esta obra.

Tractoar.

Definición.—Dáse este nombre á la curva descrita por una cuerda sobre la cual se ejerce un esfuerzo de tracción.

Tractoar de Huyghens.—Esta curva, denominada también curva

de *antifricción*, goza de la propiedad geométrica de que la longitud de la tangente CT (fig. 1) al eje de las x, es una cantidad constante.

Ecuación.—Si representamos por t la cantidad constante CT, su ecuación será:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{y}{\sqrt{t^2 + y^2}},$$

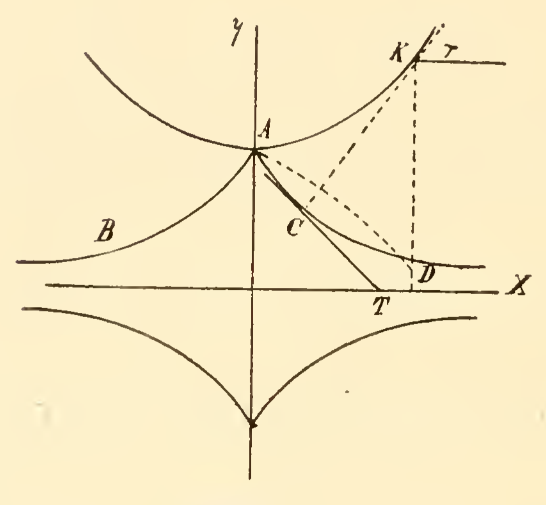


Figura 1

tomándose el signo más ó el menos según que x sea positiva ó negativa.

De aquí se tendrá:

$$\left(\frac{x}{t}\right)^2 = \left[\sqrt{1 - \frac{y^2}{t^2}} - l\left(\pm \frac{t}{y} \pm \sqrt{\frac{t^2}{y^2} - 1}\right)\right]^2,$$

con el signo más ó el menos según que y sea positiva ó negativa.

Propiedades.—El eje de las x es asíntota de las cuatro ramas de la curva.

—La longitud del radio de curvatura tiene por valor:

$$CK = \rho = t\sqrt{\frac{t^2}{y^2} - 1}.$$

— La evoluta de esta curva es una catenaria.

— Su rectificación está dada por el valor:

$$\text{arc. } AC = t.l\left(\frac{y}{t}\right).$$

Tractric.

Definición.—Curva en la que se verifica que todas sus tangentes son iguales.

Historia.—Se le ha dado el nombre de *tractric* porque se la puede considerar engendrada por un punto ligado por un hilo inextensible á otro que se mueve sobre una recta indefinida (*Memoires de l'Academie*, 1736). El primero que la descubrió fué Leibnitz (*Acta eruditorum*, 1693), habiéndose dicho también que Huygens la señaló é indicó alguna de sus propiedades. Bomie, en 1712, la estudia de una manera sistemática.

Ecuación.—Su ecuación diferencial en coordenadas axiales, siendo l el valor constante del segmento de tangente comprendido entre el eje Ox y el punto de contacto, y (λ, θ) las coordenadas de esta tangente, será:

$$l = \frac{d\lambda}{d\theta} \text{ sen } \theta,$$

ó

$$d\lambda = \frac{l \,.\, d\theta}{\text{sen. } \theta},$$

integrando y haciendo $\lambda = 0$ para

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \lambda = l \,.\, L \,.\, tg. \frac{\theta}{2},$$

ó

$$e^{\frac{\lambda}{l}} = \text{tg.} \frac{\theta}{2},$$

que es la ecuación de la tractriz.

— Esta curva presenta un punto de retroceso A sobre la perpendicular OY á Ox y se extiende simétricamente á un lado y otro de este eje, teniendo por asíntota al eje Ox.

Radio de curvatura.—Se tiene

$$\frac{d\lambda}{d\theta} = \frac{l}{\text{sen.}\,\theta}; \quad \frac{d^2\lambda}{d\theta^2} = \frac{-l\,.\cos.\,\theta}{\text{sen.}^2\theta},$$

y substituyendo en

$$r = 2\frac{d\lambda}{d\theta}\cos.\,\theta + \frac{d^2\lambda}{d\theta^2}\,\text{sen.}\,\theta$$

tendremos

$$r = l\,.\cot.\,\theta,$$

lo que nos dice que su centro de curvatura está en el punto de en-

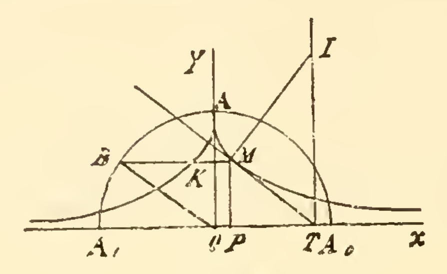


Figura 1.

cuentro I de la normal á la curva y de la perpendicular TI á Ox. — La evoluta de la tractric es una catenaria.

Longitud del arco.—La longitud del arco contada á partir del punto de retroceso A estará dada por la expresión:

$$S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} l\,.\cot.\,\theta\,.\,d\theta = l\,.\,L\,\text{sen.}\,\theta.$$

Area.—El área $OAMT$ estará determinada por la fórmula

$$\sigma = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} l^2\,.\,d\theta = \frac{\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) l^2}{2}$$

Si se traza desde el punto O como centro un círculo de radio igual

á l, ó sea que pase por el punto A y la recta OB paralela á MT, se tendrá:

$$AOB = \theta - \frac{\pi}{2},$$

de donde

$$\text{área del sector } AOB = \frac{\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) l^2}{2}$$

y, por consiguiente,

$$\text{área } OAMT = \text{área } OAB.$$

Para obtener el área $OAMP$ bastará restar del área anterior la del triángulo MTP, y como este triángulo es igual á OBK, se tendrá que

$$\text{área } OAMP = \text{área } ABK,$$

de donde se deducirá que el *área total comprendida entre la tractric y el eje* Ox *es igual al área del semicírculo* OA_0AA_1.

Propiedades. — Las trayectorias octogonales del aparejo octogonal de las bóvedas oblicuas, cuando la curva de cabeza es una circunferencia, son curvas tractrices. (*Annales des Ponts et Chaussées.* Memorias de M. Lefort y Mr. Graeff, 1839 y 1852).

— Para mejor estudio de esta línea puede verse en *Annales de Mathématiques*, tomo II, 2.ª serie, pág. 500, la Memoria de Mr. Rouquel, y también en *Mathesis*, 1882, un trabajo de E. Césaro, titulado *Sur la tractric.*

— Se conocen también la tractric *circular*, la *polar* y la *sintractric* de Silvester, cuyos particulares estudios pueden hacerse consultando los trabajos de Girard en *Nouvelles Annales*, 1862, pág. 70; los de Césaro en la misma publicación, año 1886, pág. 71; los de J. Neuberg en *Nouvelle Correspondance Mathématique*, 1880, pág. 408; los de monsieur D'Ocagne en *Nouvelle Annales,* 1871, pág. 82, etc.

Tranquil.

Definición.—Se nombran así en Arquitectura á los arcos, cuyas extremidades ó arranques están en una línea recta inclinada, la cual recibe el nombre de *línea de rampa.*

Historia.—Aunque el nombre de tranquil es el que más generalmente se ha usado para distinguir esta curva (*Bails*), se la conoce también con los de *tranquil descendente* y *de arranques desiguales*. P. Morton (*Origen y antig. de Santa Engracia*, pág. 707), le llama *arco rampante*, y Juan de Postor (*Cuad. de Arquitectura*, M. S., Biblioteca Nacional, fol. 10), escribe arco *en acente de cana* refiriéndose á esta línea.

Propiedades.—Estos arcos deben conservarse tangentes á las jambas ó pies derechos, y se pueden trazar á mano con un poco de habilidad aún más graciosos que los que se obtienen geométricamente; pero las normales á los así trazados no se pueden dirigir exacta-

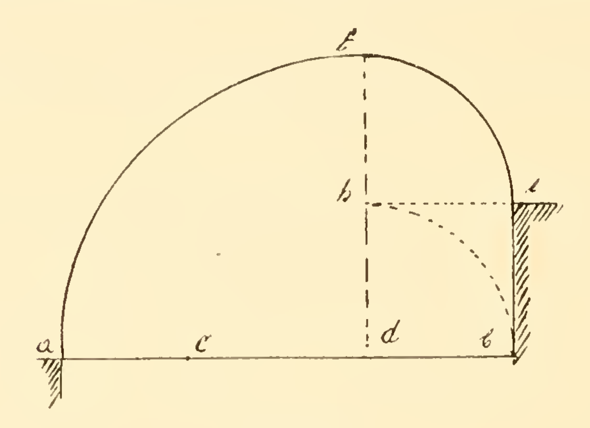


Figura 1.

mente cuando se trata de determinar sus líneas de juntas, y de aquí el que se prefiera hacerlos con compás.

Clasificación.—Distínguense dos casos, según que el arco por tranquil se trace por dos, tres ó más arcos de círculo, ó cuando se usan arcos de elipse.

Primer caso.—*Trazado por arcos de círculo.*—Se distinguen diferentes construcciones, según sean los datos que se dan para su trazado.

A) *Se da sólo la luz del arco.*—Sea ab la luz; se la dividirá en tres partes (fig. 1) $ac = cd = db$; se levanta en d la perpendicular $df = da$ y se traza el arco af con el radio ad. Tómese $dh = db$, y trazando la perpendicular be y la paralela he á la recta ab, se hará centro en h y se trazará el arco fe. Por tanto, afe será el tranquil que se buscaba.

B) *Se dan la luz y una tangente.*—Sean ab la luz (fig. 2) y de la tangente. Levantemos en a y b perpendiculares, que cortarán la lí-

nea inclinada dada en *d* y *e*. Tomaremos sobre *de*, $df = ad$, y sobre

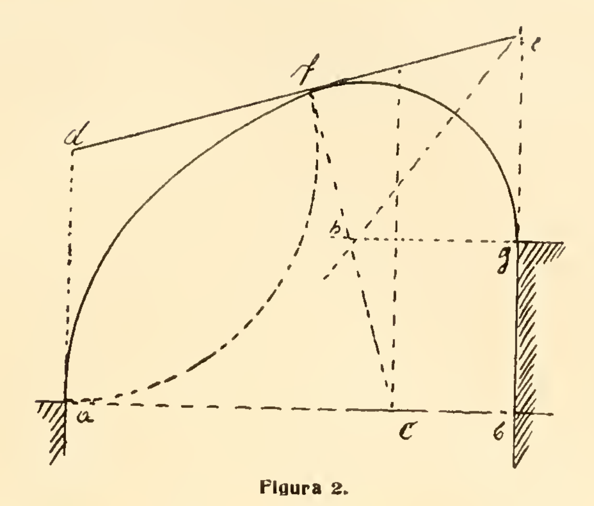


Figura 2.

eb, $eg = ef$; se trazará la bisectriz *dc* del ángulo *fda* hasta su en-

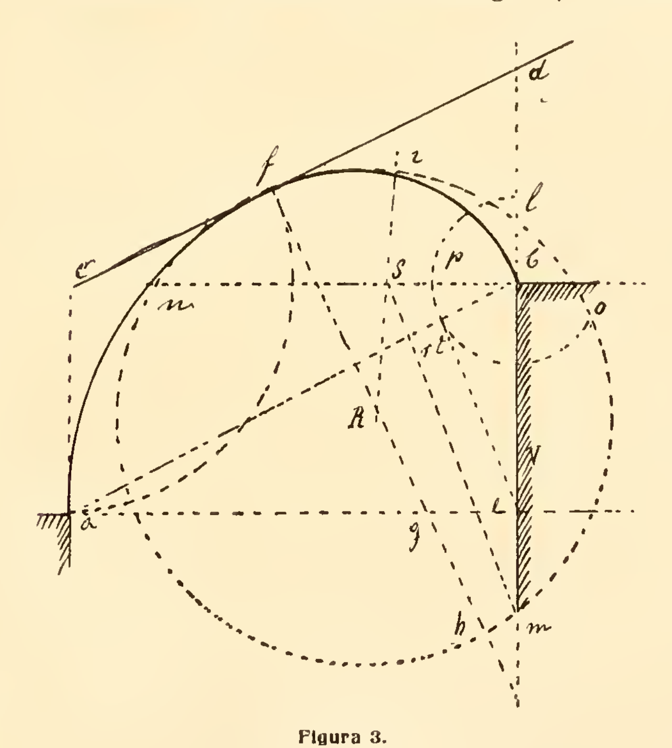


Figura 3.

cuentro en *c* con la *ab* y la bisectriz *eh* del ángulo *feg*, hasta su en-

cuentro en h con la horizontal trazada por g. Los puntos c y h serán los centros de los dos arcos de círculo que forman el tranquil que se pide.

C). *Se dan la luz y la tangente paralela a la línea de los arranques.*

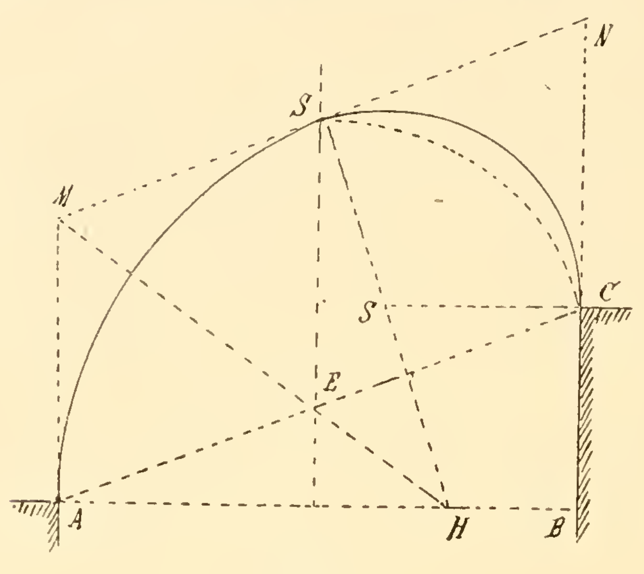


Figura 4.

Sean ae la luz (fig. 3) y cd la tangente paralela á la dirección ab de la rampa. En las escaleras, el caso más general es aquél en que

$$eb = \frac{1}{2} ae,$$

caso que vamos á examinar.

Empecemos por determinar el vértice del arco, tomando sobre cd una magnitud $cf = ca$ y trazaremos la perpendicular fk á la línea cd, la que cortará á la horizontal ac en el punto g. Luego tomaremos arbitrariamente un punto k en la línea fg (pero situado por encima de g) como centro de un círculo de radio kf, el cual descrito, cortará la perpendicular eb en l y m, y á la recta fg en h. Se toma $bp = bo$ y $bt = bl$, y la diferencia entre el diámetro fh y la longitud np se lleva de b hacia v, se une este punto v con el t y se traza por el punto m la recta mr paralela á vt, la cual corta á la ab en el punto r, y llevando la magnitud br sobre nb según bs y uniendo este punto s con k, trazando la ks que prolongaremos hasta que encuentre

el círculo en i. Los puntos g, k, s son los centros de los arcos de círculo af, fi y bi que forman el arco por tranquil.

— Otros varios casos fáciles de resolver, son aquéllos en que se dan la luz y la diferencia de nivel de los arranques del arco (fig. 4), y cuando se da la línea de arranques, y se desea trazar el tranquil por medio de un número determinado de arcos de círculo (fig. 5.)

Segundo caso.—Trazado por arcos de elipses.—Como en el caso anterior, estudiaremos diferentes construcciones, según cuales sean los datos que nos den, para ejecutar el trazado del arco por tranquil.

A). *Se dan: la luz, los puntos de arranques y la tangente paralela á*

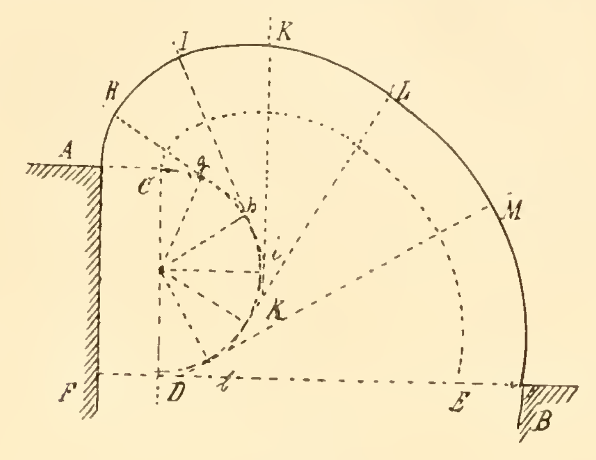


Figura 5.

la línea de nacimiento.—Dividiremos en dos partes iguales la recta ab (fig. 6) y trazaremos por el punto medio m una normal fm. Levantaremos sobre ab la perpendicular mo que cortará á la línea dada cd en o, y á partir de este punto tomaremos sobre om la porción

$$ol = \frac{1}{2}\, ab = ma.$$

Unase el punto medio n de lm con f, y sobre esta recta, tómese una longitud igual $nh = nm$. El eje mayor de la elipse estará dirigido según la recta mh.

Para obtener su semilongitud, basta tomar sobre ml, á partir del punto n, la $ng = nf$, y la longitud buscada será la mg.

El eje menor se obtendrá dirigiendo la perpendicular mv á xy, tomando sobre mn una longitud $mo = mf$, y con bo por radio é y

por centro, trazando un arco de círculo que cortará á *mv* en *v*; *mv*

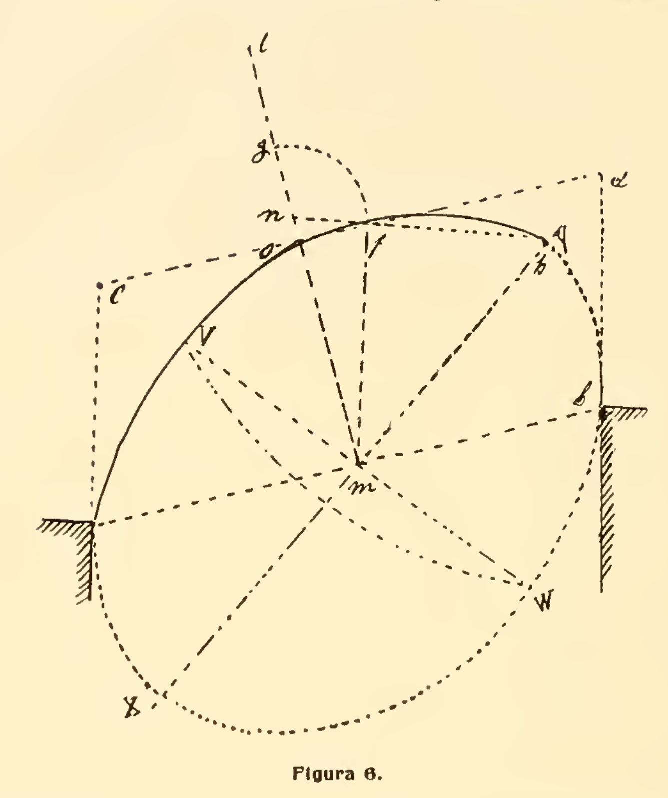


Figura 6.

será el semieje menor. La elipse puede ser ya trazada por cualesquiera de los procedimientos que la geometría enseña.

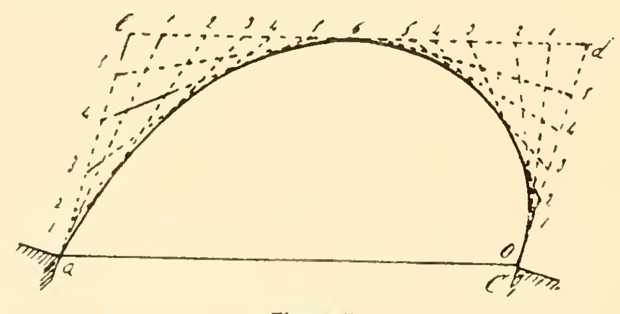


Figura 7.

B). *Se dan la luz, la diferencia de nivel de sus arranques y la altura del arco.*—Se divide (fig. 7) la altura *ae* en un número arbitrario de partes iguales, y la paralela *ed* á la línea de los nacimientos

ac en un número doble de estas partes. Se unen por medio de rectas el punto *o* de *ae*, con el punto 1 de *ed*; el 1 de *ae*, con el 2 de *ed*, y así sucesivamente. Las intersecciones sucesivas de estas rectas for-

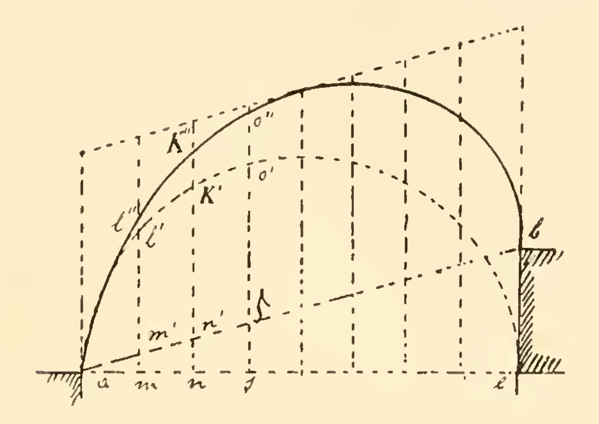


Figura 8.

mará un polígono que será circunscrito á la elipse que cumpla con las condiciones del problema.

Se puede también trazar la elipse como se señala en la figura 8.

C). *Se da la línea de los puntos de arranque del arco.*—Esta línea *ac* (figura 9), y el eje *gb* del arco, son dos diámetros conjugados de la

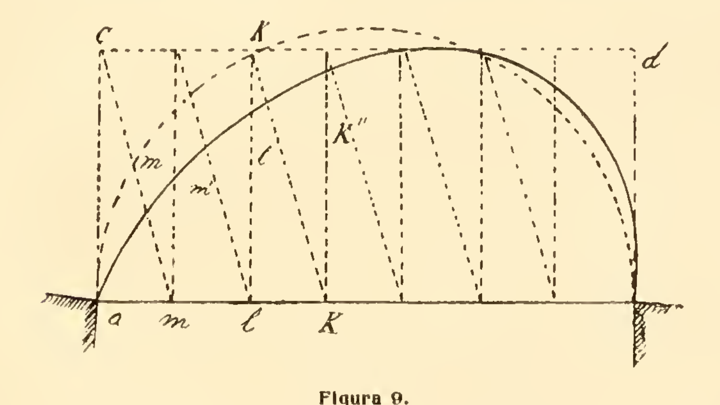


Figura 9.

elipse. Para trazarlas, se describirá sobre la horizontal *df* comprendida entre las jambas un semicírculo, que cortaremos por medio de horizontales 11,22..., y trazaremos rectas paralelas á la *ac* que disten de ella lo que las anteriores de *ed*, es decir, las 1′1′, 2′2′... Refi-

riendo los puntos de las primeras á las segundas por medio de las verticales 11′, 22′. . se tendrán puntos del lugar buscado.

—Si la altura bb' fuese dada, no se puede efectuar esta construcción y se ejecutará el trazado de la elipse por el medio que la Analítica enseña, para cuando dos diámetros conjugados y el ángulo que éstos forman son conocidos

Transformada cuadrática ó arguesianna.

Consideraciones generales.—La transformación cuadrática se establece entre los puntos x é y de dos planos supuestos, reunidos ó separados, E_x y E_y, por medio de las ecuaciones

$$\rho x_1 = y_2 y_3, \quad \rho x_2 = y_3 y_1, \quad \rho x_3 = y_1 y_2 \qquad (1),$$

que nos dan las fórmulas inversas igualmente por determinación única:

$$\sigma y_1 = x_2 x_3, \quad \sigma y_2 = x_3 x_1, \quad \sigma y_3 = x_1 x_2 \qquad (2).$$

Así, pues, á una línea $u_x = 0$ corresponde, en virtud de las relaciones (1) sobre E_y una cónica, é inversamente á una línea $v_y = 0$ corresponde en virtud de las relaciones (2) sobre E_x una cónica, de donde resulta que la relación mutua de los dos planos es absolutamente la misma.

—A las rectas de uno de los planos corresponden sobre el otro cónicas que pasan por tres puntos fijos, que se llaman puntos fundamentales; y á un punto de intersección de dos rectas, el cuarto punto de intersección móvil de las dos cónicas correspondientes.

Definición.—A una curva de $n^{\text{ésimo}}$ orden, pertenecientes á uno de los dos planos E_x, E_y y que pasan respectivamente k_1, k_2, k_3, veces por los puntos fundamentales α_1, α_2, α_3 de su plano, corresponden sobre el otro plano una curva del orden $2n - k_1 - k_2 - k_3$ que pasa respectivamente $n - (k_2 + k_3)$, $n - (k_3 + k_1)$, $n - (k_1 + k_2)$ veces por los puntos fundamentales β_1, β_2, β_3 de este segundo plano, curva que es la *transformada cuadrática* de la anterior,

Ejemplo.—Si consideramos una curva c_4 que tiene un punto doble en cada uno de los puntos α_1, α_2, α_3, corresponde una cónica que no pase por β_1, β_2, β_3, y recíprocamente, á una cónica de esta naturaleza corresponde como transformada cuadrática una curva c_4 que tiene tres puntos dobles en α_1, α_2, α_3.

— En coordenadas trilineares, siendo ABC el triángulo de referencia, la transformación argnesianna se define así. El punto cuyas coordenadas son proporcionales á $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$; se llama el argnesianno del puuto cuyas coordenadas son α, β y γ.

— Puede consultarse, *Mém. de l'Acad. de Belgique*, 1872; trabajos de L. Saltel.

Aplicaciones.— La transformación cuadrática ha dado origen por su generalización á la *racional ó de Cremona.* (Ver esta voz.)

Transformada de Newton.

Definición.—Cuando en una ecuación algebraica del grado m y de dos incógnitas se reemplazan las dos variables por expresiones

$$\frac{ax + by + c}{dx + ey + f} \qquad \frac{a'x + b'y + c'}{dx + ey + f}$$

que tienen igual denominador; los nueve coeficientes nos dan ocho relaciones distintas, y la ecuación resultante, que viene á ser del grado m, pertenece á otra curva que se denomina la *transformada* de la primera.

Historia.—Este método de transformación es debido á Newton, siendo generalizado por Warig (*Propietates curvarum algebraicarum*, pág. 240), método de gran fecundidad, pues disponiendo de las ocho relaciones indeterminadas se ponen en relación las curvas unas con otras, bastando resolver los problemas respecto á una para ser conocidas inmediatamente las soluciones para su *transformada.*

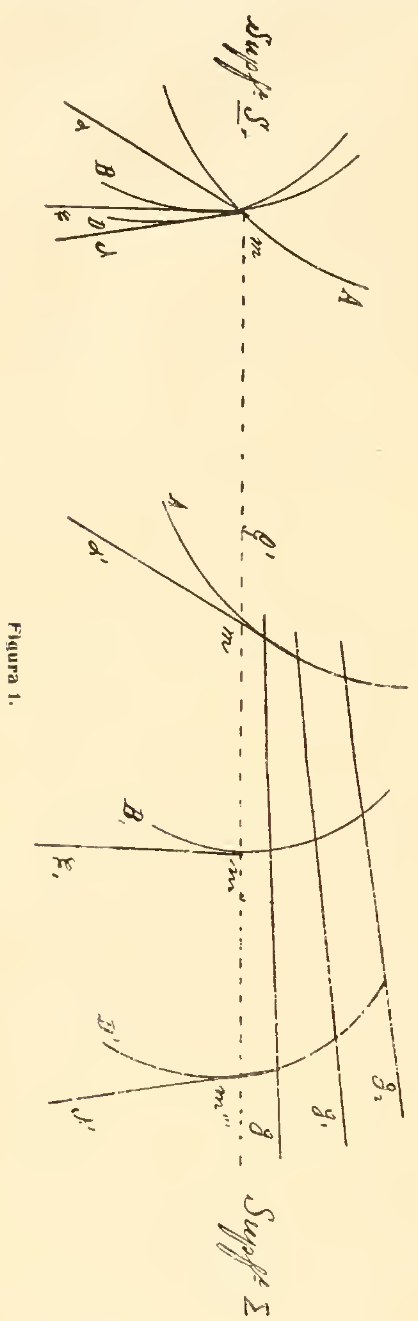
Mr. Lamé ha dado gran importancia á este método. (*Examen des differentes méthodes pour resoudre les problémes de géométrie*, 1818.)

Transformada geométrica.

Definición.—Si tenemos en la superficie de un cuerpo que se va á desarrollar trazada una línea cualquiera, esta línea, al desarrollarse, tomará otra forma, que es lo que se llama la transformada.

Consideraciones generales.—Mr. Olivier (*Journal de l'Ecole Politechnique*, t. XV, pág. 126, 1837), hace las siguientes consideraciones al efecto de definir esta curva.

— Supongamos, dice, una superficie S (fig. 1); un punto m de esta superficie y en este punto el plano tangente T.


Figura 1.

Supongamos que sobre la superficie S se trazan las tres curvas A, B y C que pasan por m. Tracemos por m, y en el plano T, una recta arbitraria G y transportemos paralelamente á ellas mismas las tres curvas A, B y D en $A_{,,}$ $B_{,,}$ y $D_{,}$; el punto m vendrá á colocarse sucesivamente en los puntos m', m'', m''' situados sobre la recta G.

Si se trazan las tres tangentes α, φ, δ á las tres curvas A, B, D por el punto m, éstas se habrán colocado en las tres tangentes α', φ', δ', á las curvas A', B', D' y las tres tangentes α', φ' δ' estarán en el plano T.

Si se hace mover una recta G sobre las tres curvas A', B', D', se engendrará una superficie alaveada ε, y tal, que si se designa por $G g g_1' g_2 g_3 \ldots g_n$ las posiciones sucesivas, é infinitamente próximas de la generatriz recta G, dos posiciones vecinas Gg estarán en el plano T.

De manera que la superficie alaveada es desarrollable á todo lo largo de la generatriz G; ó en otros términos: si por un punto cualquiera K de G se hace pasar una curva arbitraria, pero trazada sobre la superficie ε, la tangente en el punto K á esta curva estará situada en el plano T.

Supongamos ahora que, por las diversas generatrices $g_{,}$, g_1, g_2, $g_3 \ldots$ g_n sucesivas é infinitamente

próximas de la superficie ε se hacen pasar respectivamente los planos P, P', P'', P'''... P^n sujetos á ser todos paralelos á la recta G. El plano P no será otro que el plano T y cortará la superficie S según el *punto superficial* m. Y los planos P', P''... P^n cortarán respectivamente la superficie S, según las curvas C_2, C_3... C_n.

Se podrá, pues, considerar la superficie S como engendrada por la curva c_2 moviéndose sobre las tres curvas A, B, D (como directrices) y modificándose en su forma, para transformarse sucesivamente, durante su movimiento, en las curvas sucesivas é infinitamente próximas c_3, c_4..... c_n. Así, es evidente que las dos superficies S y ε serán respectivamente las *transformadas geométricas*, la una de la otra.

Por consiguiente, si se traza sobre la superficie S una curva v que pase por el punto m, esta curva v, cortando en n_2 á la c_2, en n_3 á la c_3..... n_n á la c_n, y si, por los diferentes puntos sucesivos é infinitamente próximos, n_2, n_3..... n_n de la curva V, se trazan paralelas á la recta G, las cuales vendrán respectivamente á cortar las generatrices rectas g_1, en n'_1, g_2 en n'_2..... g_n en n'_n; los diversos puntos n'_1, n''_1, n_1^n formarán una curva V_1 trazada sobre la superficie Σ y esta curva V_1 será la *transformada geométrica* de la curva v.

Propiedades.—Los radios de curvatura en dos puntos correspondientes de una línea trazada sobre una superficie desarrollable y de su transformada en el desarrollo, es igual al coseno del ángulo que forma el plano osculador de la línea con el tangente á la superficie.
— Cuando una curva trazada sobre una superficie desarrollable toca una generatriz, no varía en el desarrollo el radio de curvatura en el punto de contacto, lo cual supone que el plano osculador es tangente á la superficie.
— En la arista de retroceso se verifica que, como en cada punto es tangente á una generatriz, sus radios de curvatura son idénticos á los de su transformada.
— Una curva trazada sobre una superficie desarrollable pasa de una hoja á otra, con un retroceso de primer orden, á no ser que sea tangente á la envolvente de las generatrices, y la transformada tendrá también un retroceso de primer orden.
— Toda curva transformada tiene la misma longitud que la curva primitiva, y el ángulo que en el desarrollo forma con las generatrices es el mismo que el que la curva primitiva forma con las generatrices correspondientes de la superficie.

Casos particulares.—Transformadas planas de las curvas trazadas sobre un cilindro de revolución, cuyo radio de curvatura es constante.

Representando por a el radio constante, las coordenadas rectangulares de los puntos de esta curva satisfacen á la ecuación:

$$(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx d^2y - dy d^2x)^2 = \frac{ds^6}{a^2}.$$

Si representamos al ángulo $M'oX$ por φ y llamamos (fig. 2) Σ y η las coordenadas de un punto M_1, relativamente á AX y AA'; R al

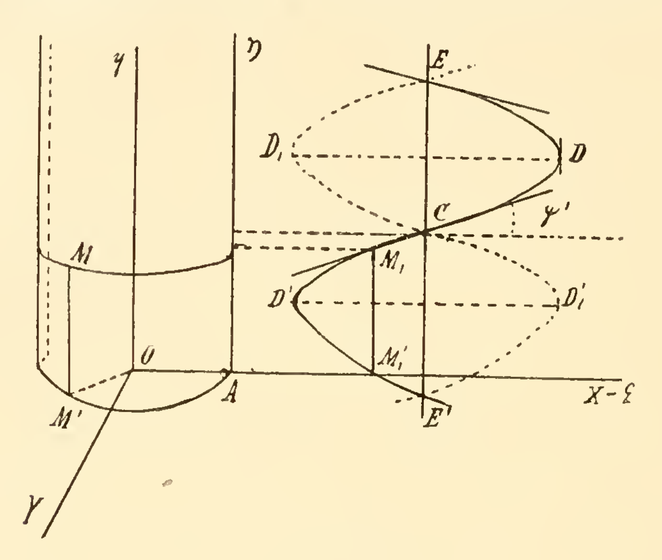


Figura 2.

radio del cilindro, ψ al ángulo que una paralela trazada desde el origen A á una parte determinada de la tangente en cada punto (ε, η) de la curva, forma con $A\varepsilon$; ψ' el menor de los arcos que tenga por coseno $\sqrt{\frac{R}{a}}$; se encuentra

$$\varepsilon = c \pm a \int_{\psi_1}^{\psi} \frac{\cos . \psi}{\Psi} d\psi,$$

$$\eta = c' \pm a \int_{\psi_1}^{\psi} \frac{\text{sen} . \psi}{\Psi} d\psi,$$

siendo c, c' constantes arbitrarias que son los valores de ε y η para $\psi_1 = \psi$ y

$$\Psi = \sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2} \cos^4 \psi}.$$

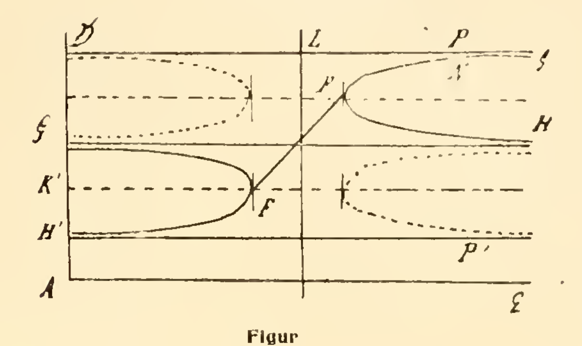
Discutiendo estos valores se encuentra la curva que representa la figura 2 para cuando de los dos parámetros a y R es $a > R$ y la figura 3 para cuando $a \leqq R$.

Rectificación.— $a \lesseqgtr R$

$$ds = \frac{a d\psi}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}\cos^4\psi}}$$

$a = R$

$$ds = \frac{R d\psi}{\operatorname{sen}\psi \sqrt{1 + \cos^2\psi}}.$$



Figur

Integrando:

$$S = \frac{R}{\sqrt{2}} \log. \frac{\sqrt{1 + \cos^2\psi} - \sqrt{2} . \cos . \psi}{\operatorname{sen} . \psi}.$$

Area.—Si $a \lesseqgtr R$ siendo A_1, el área del segmento CDE:

$$A_1 = 2a^2 \int_{\psi'}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\operatorname{sen} . \psi}{\Psi} \int_{\psi'}^{\psi} \frac{\cos . \psi \, d\psi}{\Psi} \right) d\psi.$$

Si $a = R$, el área puede obtenerse por una simple cuadratura.

Radio de curvatura.—Si $a > R$; $\rho = \infty$ para $\psi = \psi'$.

$$\text{Si } a < R;\ \rho = \frac{aR}{\sqrt{R^2 - a^2}} \text{ para } \psi = 0.$$

$$\text{Si } a = R;\ \rho = \pm \frac{R}{\operatorname{sen} . \psi \sqrt{2 - \operatorname{sen}^2\psi}}.$$

Cilindro recto de base circular.—La sección recta, ó sea la perpendicular á las generatrices se transforma según una línea recta. La

curva trazada sobre el cilindro y que forma en cada uno de sus puntos un ángulo constante con la generatriz, se transforma también en una línea recta (ver *Hélice*).

Busquemos la transformada de la sección por el plano PP' (fig. 4) perpendicular al vertical de proyección, sirviéndonos para ello de los procedimientos de la Geometría Descriptiva y conforme en el dibujo se expresan las construcciones necesarias.

— Para conocer la naturaleza de la transformada $A_1\,C_1\,B_1$ se la re-

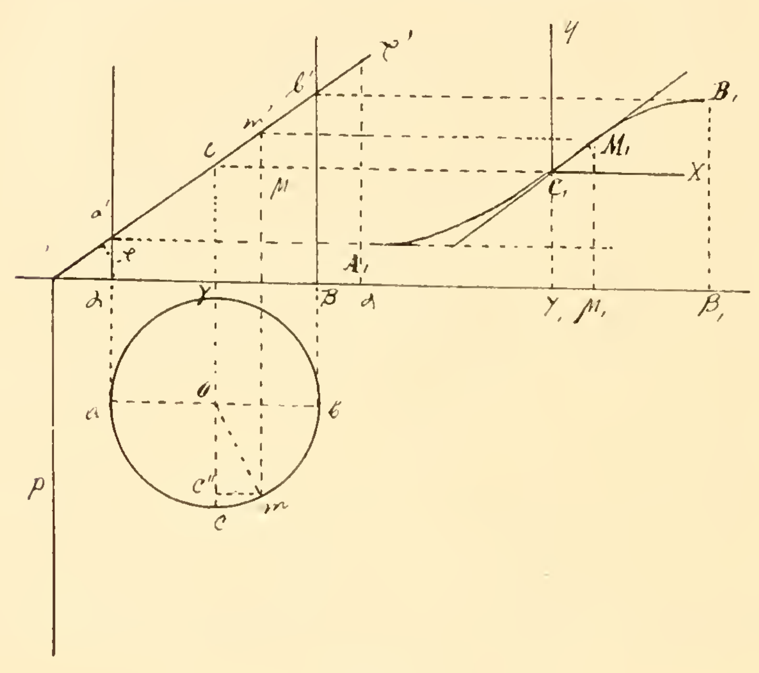


Figura 4.

ferirá á los ejes C_1x y C_1y, el uno paralelo y el otro perpendicular á la línea de tierra; las coordenadas (x, y) del punto M, estarán representadas en la figura por el arco cm y por la distancia $m'\mu'$; ahora si se llama R el radio de la base del cilindro y por φ el ángulo del plano secante con el plano horizontal, la inspección de la figura nos dará

$$x = R\,.\,\text{arc}\left(\text{sen} = \frac{c''m}{R}\right) = R\,.\,\text{arc}\left(\text{sen} = \frac{\mu'c'}{R}\right) =$$

$$= R\,.\,\text{arc}\left(\text{sen} = \frac{\frac{m'\mu'}{\text{tg}\psi}}{R}\right) = R\,.\,\text{arc}\left(\text{sen} = \frac{y}{R\,.\,\text{tg}\,.\,\varphi}\right).$$

resultando para la ecuación de la curva

$$y = R \,.\, \mathrm{tg} \,.\, \varphi \,.\, \mathrm{sen}\, \frac{x}{R};$$

así, pues, la transformada de la sección plana de un cilindro recto es una sinusoide.

El punto C, tomado por origen, es el punto de inflexión de la transformada.

Transformadas planas de las curvas trazadas sobre un cono de revolución.—Para que una curva trazada sobre el cono venga á tener una recta por transformada, es necesario y suficiente que dos elementos consecutivos formen el mismo ángulo con la generatriz intermedia, y como estos elementos prolongados son las tangentes á la curva, será, pues, necesario, que dos tangentes consecutivas de esta curva formen el mismo ángulo con la generatriz intermedia.

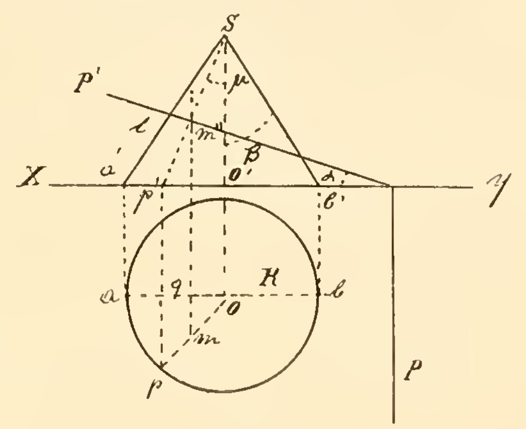


Figura 5.

— La curva trazada en el cono y que tiene la misma propiedad que la hélice en el cilindro, ó sea que encuentre conforme al mismo ángulo á todas las generatrices, tiene por transformada una espiral logarítmica, porque esta línea goza de la propiedad de encontrar según el mismo ángulo todos sus radios vectores.

— Si la curva trazada sobre el cono encuentra todas las generatrices según un ángulo recto, su transformada será un arco de círculo que tendrá el vértice del cono por centro.

Cono recto de base circular.—Busquemos la transformada de la sección por el plano $P - P'$ (fig. 5) perpendicular al vertical de proyección, sirviéndonos para ello de los procedimientos de la Geometría Descriptiva, y conforme en el dibujo se expresan las construcciones necesarias.

Mr. Catalan es autor del teorema siguiente, que permite construir los puntos de inflexión de las transformadas de las secciones planas.

«Si desde el vértice del cono se baja una perpendicular sobre el plano secante, y desde el pie de esta perpendicular se dirige una tangente á la sección, el punto de contacto será aquel que corresponde al punto de inflexión en la transformada.»

— Para conocer la naturaleza de la transformada buscaremos la ecuación polar, tomando por polo el centro del sector, según el cual se transforma este cono.

El cono se definirá por el radio de su base, y su generatriz r y l, y el plano secante por la porción $So'' = d$ del eje, compredida entre el vértice y el plano secante y por su inclinación sobre el plano del círculo de la base.

El radio vector ρ de la transformada de la sección, para el punto correspondiente á mm', es la porción de la generatriz $op - sp'$ que se proyecta en sm'.

$$\frac{\rho}{sm'} = \frac{l}{sp'} = \frac{l \cos p'.so'}{so'} = \frac{l \,.\cos .\, p'so'}{l \,.\cos .\, \beta} = \frac{\cos .\, \mu}{\cos \beta},$$

llamando μ al ángulo $p'so'$ y β el semiángulo en el vértice del cono; por otra parte

$$\frac{sm'}{so''} = \frac{sm'}{d} = \frac{\cos .\, \varphi}{\operatorname{sen}\left(\mu + \frac{\pi}{2} - \varphi\right)} = \frac{\cos .\, \varphi}{\cos(\varphi - \mu)} =$$

$$= \frac{d.\cos .\varphi}{\cos\beta} \cdot \frac{1}{\cos .\varphi - \operatorname{sen} .\varphi .\operatorname{tg} .\mu},$$

si se designa por w el ángulo aop, la tangente del ángulo μ que es la relación de $p'o'$ á $o's$, se expresa por

$$\operatorname{tg} .\, \mu = \frac{r \,.\cos .\, w}{l \,.\cos .\, \beta},$$

por consiguiente

$$\rho = \frac{d.\cos \varphi}{\cos .\beta} \cdot \frac{1}{\cos\varphi - \operatorname{sen} .\varphi \dfrac{r.\cos w}{l.\cos\beta}} = \frac{d.}{\cos .\beta} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{r \,.\operatorname{tg} .\, \varphi}{l.\cos .\beta} \cos .\, w}$$

pero el ángulo polar de la transformada no es w; llamando n este ángulo polar

$$rw = ln, \qquad \text{de donde } w = \frac{l}{r} n;$$

la ecuación de la transformada será en definitiva:

$$\rho = \frac{d}{\cos . \beta} \cdot \frac{1}{1 - \frac{r . \operatorname{tg} . \varphi}{l . \cos \beta} \cos \left(\frac{l}{r} n \right)}.$$

y si se hace

$$\frac{d}{\cos . \beta} = p \qquad \text{y} \qquad \frac{r \operatorname{tg} . \varphi}{l . \cos . \beta} = e,$$

se tendrá, por último,

$$\rho = \frac{p}{1 - e . \cos . \left(\frac{l}{r} n \right)},$$

que presenta la mayor analogía con la de una sección cónica referida á su foco tomado por polo.

Si se quiere construir la cónica representada por la ecuación

$$\rho = \frac{p}{1 - e . \cos . n}$$

para deducir la curva que nos ocupa, basta disminuir los ángulos polares en la relación de $\frac{r}{l}$ sin cambiar los radios vectores.

— Pueden consultarse para los trazados de transformadas, los tratados de *Geometría descriptiva* de Songaylo, Elizalde, etc.

— La transformación de una curva en ella misma puede hacerse por la transformación *puntuada isogonal* definida en coordenadas rectilíneas octogonales por la condición

$$X + iY = f(x + iy),$$

en que f representa una función arbitraria.

— La transformación por *representación conforme* estudiada por Mr. Servant, se reduce á la transformación capaz de conservar los ángulos.

Transformada racional.

Definición. — Es la transformada cuadrática (ver esta voz), substituyendo al sistema de cónicas de tres puntos fijos un sistema lineal doblemente infinito de curvas de n^{esimo} orden que tiene un solo punto de intersección móvil, y por consecuencia, $n^2 - 1$ puntos de intersección fijos.

Historia. — Este sistema de transformación es debido á Cremona, por lo que se dice *transformación Cremona (Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane. — Memorie del l'Académia di Bologna,* segunda serie, t. II, 1863, y t. V, 1865.)

También se pueden consultar, entre otras obras, las siguientes: Cayley, *On the rational transformations between two spaces. (Proceedings of the London math. Society*, t. III, 1870); Rosanes, *Ueber rationale Substitutionen (Journal de Crelle,* t. LXXIII), y Dewulf, *Bulletin des Sciences mathematiques,* t. V, p. 207.

Propiedades. — Si suponemos una transformación racional dada por las tres ecuaciones

$$\rho y_i = f_i(x_1, x_2, x_3), \qquad (i = 1, 2, 3),$$

siendo f_i funciones del orden n que no tienen factor común y cuyo determinante funcional es idénticamente nulo, admitiremos, pues, que á cada punto y esté asociado un punto x por el intermedio de las ecuaciones

$$6\, x_i = \varphi_i(y_1, y_2, y_3),$$

siendo φ_i funciones racionales y enteras del orden v con relación á las cantidades y.

— A las rectas $u_x = 0$ sobre E_x, corresponden sobre E_y las curvas de n^{esimo} orden

$$\Sigma u_i \varphi_i = 0,$$

y á las rectas $v_y = 0$ sobre E_y, las curvas de n^{esimo} orden $\Sigma v_i f_i$ sobre E_x.

A los puntos de intersección de

$$u_x = 0 \quad \text{y} \quad \Sigma v_i f_i = 0,$$

corresponden los puntos de intersección de

$$v_y = 0 \quad \text{y} \quad \Sigma u_i \varphi_i = 0,$$

y siendo el número de estas intersecciones iguales en los dos casos, se tendrá $n = v$.

— Dos curvas cualquiera $\Sigma v_i f_i = 0$ del sistema, se cortan en un solo punto móvil y en $n^2 - 1$ puntos fijos que son los puntos fundamentales de la transformación.

— Un punto en el cual todas las curvas φ poseen un punto de multiplicidad K, recibe el nombre de *punto fundamental* del orden K; y se demuestra que á todo punto fundamental del orden K sobre E_x, corresponde sobre E_y una curva del orden K y del género cero. (Ver *Fundamentales*.)

— Una transformación Cremona está de una manera general caracterizada por un cierto número de constantes absolutas, que sólo dependen de los puntos fundamentales.

— Una transformación Cremona se puede reemplazar por una serie de transformaciones cuadráticas, colocando los tres puntos fundamentales de una transformación de esta naturaleza en los puntos de base más elevados del sistema de curvas de transformación. (Nöther, *Math. Annalen*, t. III, pág. 164.)

— La posibilidad de la transformación que acabamos de indicar, se demuestra también por medio de ciertas consideraciones sobre las curvas del espacio, como se puede ver en la Memoria de Halphen *Sur certaines perspectives gauches des courbes planes algébriques. (Comptes rendus*, 15 Marzo 1875.)

— Dos curvas que se tocan se transforman en otras que son igualmente tangentes, permaneciendo el mismo el orden del contacto.

— La consideración de que á todo punto múltiplo de una curva, tomado por punto fundamental, corresponden sobre la transformada puntos separados, permitirá transformar una curva dada, que tenga puntos singulares, en otra que sólo posea puntos múltiplos ordinarios de tangentes separadas. Así, pues, por transformaciones de esta especie se llega á la consideración del punto múltiplo, descompuesto en diferentes clases, de una manera análoga que por los métodos de Newton, Cramer y Puiseux.

— Se puede ver, para mayor extensión sobre esta materia, Nöther. (*Gottinger Nachrichten*, 1871, y *Math. Annalen*, t. IX.)

Transformadas de Mac-Laurin.

Definición.—Consideremos una curva cualquiera U y dos puntos fijos A y B (fig. 1). Tomemos un punto M en la curva U, únase el punto M con el A y por B trácese la BI paralela á MA.

Si trazamos la MI paralela á una recta fija AZ, se obtendrá el punto I. Al lugar descrito por este punto I, que será una cierta curva V se llama transformada de la curva U, según Mac-Laurin.

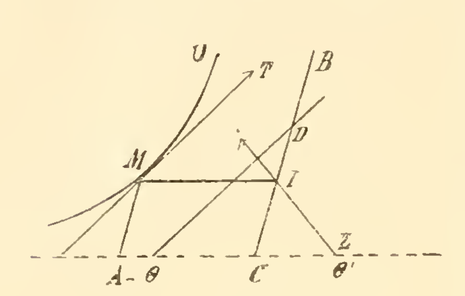


Figura 1.

Historia. — Esta transformación, como queda expresado, es debida á Mac-Laurin, y su estudio ha sido desarrollado en particular por Mr. Schoute en una Memoria publicada en *Archives Néerlandaisès*, tomo XX, 1885.

Tangente.—La tangente en I á la transformada V, se puede trazar de una manera sumamente sencilla. Consideremos dos posiciones próximas del trazado indicado y prolonguemos las rectas BI, BI' (fig. 2) hasta que encuentren AZ en los puntos C y C', y luego tomemos

$$BD = IC = MA, \quad BD' = I'C = M'A,$$

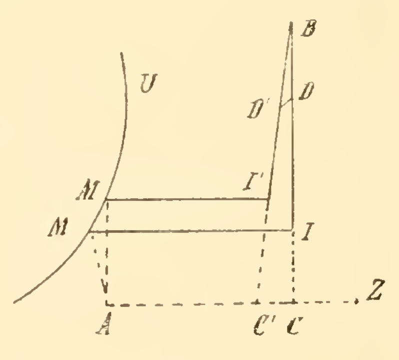


Figura 2.

los triángulos MAM' y BDD' son iguales, y como DD' é II' son dos transversales recíprocas del triángulo BCC', se tiene, que, siendo MT la tangente á la curva U en el punto M, tomando $BD = MA$, y dirigiendo $D\theta$, paralela á MT, hasta su encuentro en θ con AZ; si θ' es simétrico de θ con respecto á C, $\theta' I$ será la tangente buscada.

Caso particular.—Mr. Longchamps (*Journal de Mathematiques spéciales*, pág. 199, 1885), se ocupa de un caso particular de transformadas de Mac-Laurin, que es el siguiente:

Supongamos dos ejes rectangulares Ox, Oy (fig. 3) y sobre Ox un

punto fijo A; sea U la curva á transformar. Para ello, sea M un punto de la curva U y tomemos MI, paralela á Oy, trácese por el punto de encuentro B de AM con Oy una paralela BI á Ox; el punto I corresponderá al punto M Sean (x, y) las coordenadas de M, $(X . Y)$ las del punto I y las fórmulas de transformación serán:

$$x = X \qquad y = Y\frac{X + a}{a}.$$

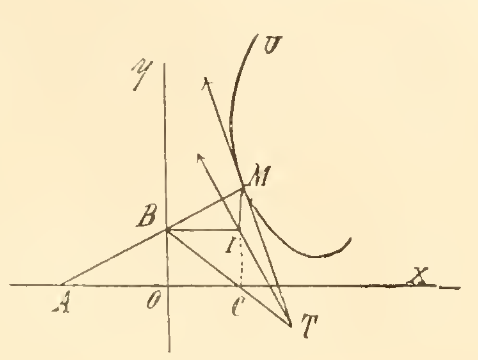


Figura 3.

Mr. Godefroy, Arquitecto de Amsterdam, ha determinado la siguiente propiedad, aplicable á todas las curvas deducidas de una curva dada, por la transformación de Mac Laurin.

«La tangente en M á la curva U, la recta BC y la tangente en I al lugar descrito por este punto, son tres rectas concurrentes»; la cual permite el trazado de las tangentes á las curvas transformadas.

Transcendentes.

Definición.—Se denominan asi las curvas en que una de sus coordenadas está relacionada con la otra por una función transcendente.

Clasificación.—Entre las curvas que corresponden á esta clase, se encuentran expresadas en coordenadas cartesianas, la exponencial, sinusoide, cosenuisoide, tangentoide, etc., que por haber recibido nombres especiales, las describimos separadamente (ver estas voces) y las expresadas en coordenadas polares, las espirales, etc. (ver esta voz), y aquí sólo expondremos, como via de ejemplos, algunos de los que más usualmente se citan en los autores modernos, á fin de indicar la marcha que debe seguirse en la construcción de esta clase de curvas.

Propiedades.—Las más notables que presentan estas curvas son las siguientes:

— Los puntos de parada y los angulosos, son tan sólo propios de esta clase de curvas y de las irracionales.

— Presentar un solo brazo asintótico á una recta, ó sea presentar un punto de parada en el infinito.

— Tener una infinidad de puntos situados sobre una línea recta.

— Para trazar sus asíntotas, se empieza por determinar el límite de $\frac{y}{x}$ para $x = \infty$; y si suponemos se encuentra un número c, este número será el coeficiente angular de una dirección asintótica. Después de determinar esta dirección, se busca el límite de $y - cx$ para $x = \infty$ y si se encuentra que este límite es un número d, la recta que tiene por ecuación

$$y - cx - d = 0,$$

será en general una asíntota de la curva.

Ejemplos en coordenadas cartesianas.—1.° Sea la ecuación

$$y = e^{\frac{1}{x}}.$$

Demos á x valores positivos y sea ε una cantidad positiva tan pequeña como se quiera; cuando x varía de $+\varepsilon$ á $+\infty$, la ordenada y decrece de $+\infty$ á la unidad y se obtiene la rama BA.

Si damos á x valores negativos, y para más facilidad, cambiamos x en $-x$, lo que nos da la ecuación

$$y = \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}.$$

Cuando x varía de $+\varepsilon$ á $+\infty$, la ordenada y crece de 0 á 1 y se obtiene una segunda rama OC.

La función $\frac{1}{x}$ presenta una discontinuidad para $x = 0$.

El límite de $\frac{y}{x}$ cuando x tiende hacia 0 por valores negativos, se obtendrá haciendo

$$x = \frac{-1}{z}, \text{ y tendremos } \frac{y}{x} = \frac{-z}{e^z},$$

para $z = +\infty$ se tiene lím. $\frac{y}{x} = 0$; luego la curva toca á $0x$ en el origen; para $x = -\infty$ se tiene $y = 1$; la curva es, pues, asíntota

á la recta $y = 1$. Ella presenta, por tanto, la forma indicada en la figura 1.

2.° Sea la ecuación

$$y = (\text{sen}\,.\,x)^{\text{sen}\,.\,x}$$

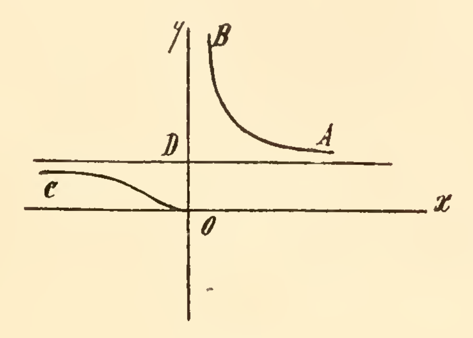


Figura 1.

haciendo variar x de 0 á π, y será real; para $x = 0$ será $y = 1$, se tiene:

$$\lg y = \text{sen}\,.\,x\,.\,\lg\,.\,\text{sen}\,x,$$

$$\frac{y'}{y} = \cos\,.\,x\,(1 + \lg\,.\,\text{sen}\,x),$$

para $x = 0$, $y' = -\infty$; la función y es ahora decreciente, pudiendo disminuir hasta un mínimo correspondiente á

$$\lg\,.\,\text{sen}\,.\,x = -1$$

$$\text{sen}\,.\,x = \frac{1}{e},$$

pues y crece hasta alcanzar el valor 1 para $x = \frac{\pi}{2}$; y el arco de curva se reproduce entre 2π y 3π, y así sucesivamente, presentando la curva la forma indicada en la figura 2.

3.° Sea la ecuación

$$y = ax + b + \frac{\text{sen}\,.\,x}{x^2},$$

buscando primero el límite de $\frac{y}{x}$ y luego el de $y - cx$, para

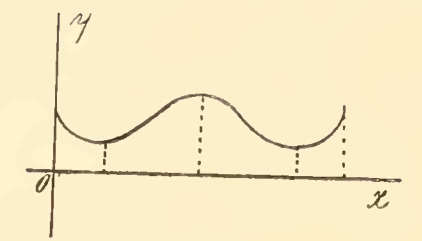


Figura 2.

$x = \infty$ se ve que la recta A que corresponde á la ecuación

$$Y = ax + b$$

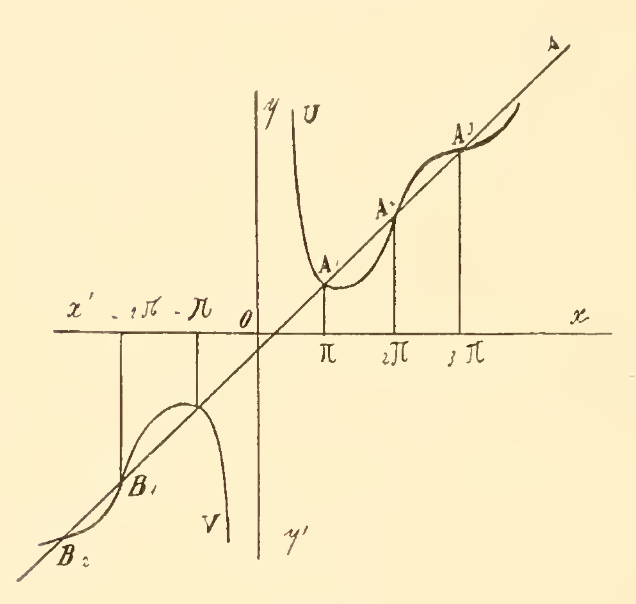


Figura 3.

es una asíntota de la curva. Se ve asimismo que el eje $0y$ es otra asíntota, pues que para $x = 0$ se tiene

$$\lim \frac{\text{sen}\,.\,x}{x^2} = \lim \frac{\frac{\text{sen}\,.\,x}{x}}{x} = \infty \qquad \text{para } x = 0$$

los puntos de encuentro de la curva con la recta Δ tienen por abscisas π, 2π, 3π... $-\pi$, -2π..., etc.

La curva que corresponde á esta ecuación tiene la forma indicada por la figura 3, y se compone de dos ramas que cortan á la asíntota, en un número infinito de puntos A_1, A_2...; B_1, B_2...

Ejemplos en coordenadas polares.—1.° Sea la ecuación

$$\rho = \frac{\omega}{\omega - 1},$$

los valores especiales de ω son 0 y 1, para $\omega = 1$, $\rho = \infty$; busquemos la asíntota, tendremos

$$d = \lim \frac{\omega}{\omega - 1} \operatorname{sen} . (1 - \omega) = -1$$

para obtener la posición de la curva con relación á la asintota, busquemos el signo de la diferencia

$$\rho \operatorname{sen} (\alpha - \omega) - d$$

ó

$$\frac{\omega}{\omega - 1} \operatorname{sen} (1 - \omega) + 1 = \frac{\omega - 1 - \omega \operatorname{sen} . (\omega - 1)}{\omega - 1},$$

cuando ω tiende hacia 1 sin llegar á valerle, se ve que esta fracción es positiva; por tanto, el valor absoluto del producto $\rho \operatorname{sen} (1 - \omega)$ es menor que el de d y la curva está situada con respecto á la asíntota en la misma región que el polo para $\omega = 1 - \Sigma$; por el contrario, para $\omega = 1 + \Sigma$, la curva pasa del otro lado de la asintota; si se hace variar ω de $(1 + \Sigma)$ á $+\infty$, la curva se aproxima indefinidamente al círculo de radio 1, que tiene el polo por centro; es, pues, un círculo asintótico y tiene la curva la forma indicada en la figura 4.

2.° Sea la ecuación

$$\rho = \frac{a}{2} \operatorname{sen} . 2\,\omega.$$

Siendo $\frac{dy}{dx} = a . \cos . 2\,\omega$, se ve que ρ va aumentando constantemente cuando ω varía de 0 á $\frac{\pi}{4}$.

Los ejes de coordenadas y las bisetrices de los ángulos que ellos forman, son ejes de simetría de la curva.

Figura 4.

Escribiendo la ecuación (1) en la forma

$$a = \rho \operatorname{tg} . \omega + \rho \cot . \omega,$$

y si A es un punto tomado sobre la curva y BC la perpendicular á OA en A, se tiene $BC = a$; así, pues, se puede construir esta curva por puntos, proyectando el origen sobre una recta de longitud constante, cuyos extremos se encuentren sobre los ejes coordenados.

La curva presenta la forma manifiesta en la figura 5.

Ejemplo en coordenadas axiales.—Incluímos en este lugar la construcción de una curva que tie-

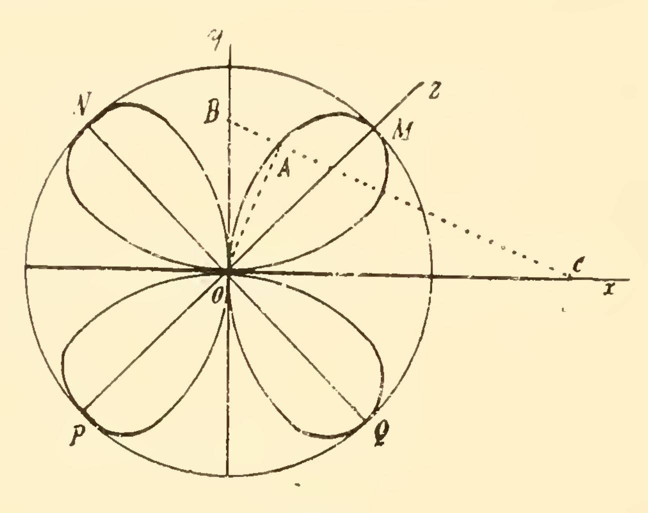


Figura 5.

ne propiedades muy notables, sin que hasta ahora se le haya dado nombre especial, pero cuyo estudio han hecho Mr. D'Ocagne y

Mr. Césaro, demostrando este último que ella es la evolvente de la hipocicloide de cuatro retrocesos. (Ver *Hipocicloide.*)

Sea la ecuación

$$\lambda = a \,.\, \text{sen} \,.\, \theta.$$

la longitud de la tangente será

$$t = a \,.\, \cos \,.\, \theta \,.\, \text{sen} \,.\, \theta,$$

lo que nos dice que la curva puede ser construída por puntos; para ello tomemos sobre OX la longitud $OA = a$, y tracemos el círculo de

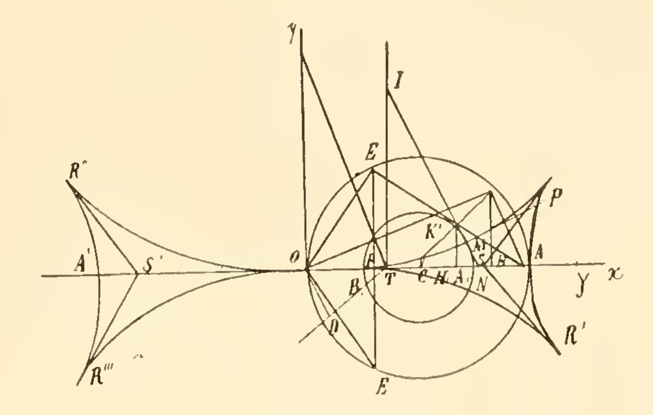


Figura 6.

centro C que tiene OA por diámetro; tracemos la recta OK que forma con Ox el ángulo θ, y luego la recta AK; tendremos

$$AK = OA \,.\, \text{sen}\, \theta = a \,.\, \text{sen}\, \theta = \lambda,$$

y bajando sobre Ox la perpendicular KH se tendrá

$$KH = AK \,.\, \cos \theta = a \,.\, \text{sen}\, \theta \,.\, \cos \theta = t.$$

De aquí la siguiente construcción: tómese sobre Ox la longitud $OT = AK$, luego sobre la paralela á OK trazada por el punto T la longitud $TM = HK$, se tendrá la tangente MT y su punto de contacto M.

El valor del radio de curvatura será:

$$r = \frac{a}{2} + \frac{3a}{2} \cos . 2\theta,$$

luego tomando sobre Ox el segmento $C\gamma = 3\ CH$, el radio de curvatura en un punto M es igual á Or.

En el punto O, $r = 2a$.

En los puntos para los cuales $\cos . 2\theta = \frac{1}{3}$; $r = a$. y para los que $\theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, $r = \frac{a}{2}$.

En los A y A', $r = -a$.

Se tienen, pues, cuatro puntos de retroceso R, R', R'', R''', correspondientes á los valores de θ para los cuales r, se anula, es decir, para los cuales $\cos . 2\theta = -\frac{1}{3}$. Para obtener estos puntos, se toma el segmento $CF = \frac{CA}{3}$, contado negativamente á partir de C, por F se levanta la perpendicular EE' á Ox; tomando luego $OS = AE$, dirigiendo por S paralelas á OE y OE' y tomando sobre estas rectas los segmentos SR y SR' iguales á EF, se tienen los puntos de retroceso R y R'. Los otros dos son simétricos respecto á éstos y la curva queda perfectamente conocida de forma.

Propiedades.—El segmento del eje Ox comprendido entre la tangente y la normal, es igual al λ de la tangente.

— La porción de la normal comprendida entre el eje Ox y la perpendicular á este eje, dirigida por el punto T, es constante é igual á a.

— La distancia OD de cada una de sus tangentes al punto O es igual á la longitud MN de la normal correspondiente comprendida entre la curva y el eje Ox.

La longitud del arco, contado á partir del punto O, tiene por expresión:

$S = \frac{a\theta}{2} + \frac{3a}{4} \text{sen} . 2\theta$; de donde arc. $OM =$ arc. $A_1K_1 + 3K_1H_1$.

— El área comprendida entre la curva, el eje Ox y la tangente MT es dada por la fórmula

$$b = \frac{a^2}{16}\left(\theta - \frac{\text{sen} . 4\theta}{4}\right),$$

y de aquí se deducen los valores siguientes:

$$\text{Area } ORA = \text{Area } A_1 K_1 B_1,$$

y

$$\text{Area } ORR' = \text{Area círculo } A_1 B_1.$$

— Si uno de los lados de un ángulo recto es de longitud constante y resbala entre dos ejes rectangulares, el otro lado envuelve la curva que nos ocupa. Esta propiedad encierra un medio de generación mecánica de esta curva por sus tangentes.

Trasdós.

Definición.—Recibe este nombre la curva que limita el contorno exterior de una bóveda.

Clasificación.—Si el trasdós está á igual distancia del intradós, se dice que la bóveda es de *trasdós concéntrico*; pero este modo de disponer las bóvedas es el peor de todos, por cuanto resulta el menos sólido, de aquí que las formas empleadas sean de curvas *no concéntricas* con la que forma el intradós.

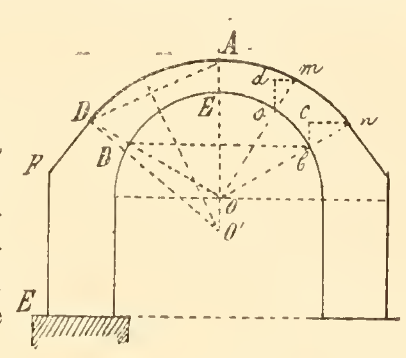


Figura 1.

Trazado.—El procedimiento general para el trazado de esta curva consiste en determinar el espesor de la bóveda en la clave y en los nacimientos por medio de las diferentes fórmulas empíricas que se usan en construcción, tales como las de Perronet, Gauthey, Leveillé, Lesguillier, Dejardin, Dupuit, la de los Ingenieros rusos y alemanes, las de E. Roy, Michon, Planat, etc., según las diversas formas de las bóvedas y las circunstancias que éstas reunen, y obtener así tres puntos por los cuales se hará pasar un trazado continuo, semejante al de la curva de intradós y el cual viene á formar la traza ó forma de la curva del trasdós.

También se conocen y emplean para su trazado diferentes reglas prácticas, una vez determinado el espesor en la clave por las fórmulas antes mencionadas, tales como las siguientes:

Bóvedas de medio punto.—Se toma en la clave y en la junta de fractura DB (fig. 1) el espesor que asignan las fórmulas empíricas,

se traza la recta DA, y la perpendicular levantada en su punto medio determina por su encuentro con la OA el punto O', el cual se toma como centro del arco de *trasdós* limitado por la junta de fractura. En el punto D se traza á este arco una tangente hasta su encuentro con la vertical EF del estribo, cuyo espesor está determinado por las fórmulas correspondientes.

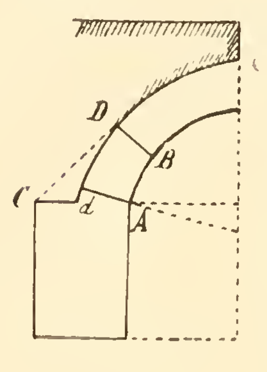


Figura 2.

Cuando las dimensiones del estribo se determinan por las fórmulas de Roy, el punto F resulta muy elevado. Otras veces la curva de trasdós se prolonga hasta el plano horizontal cd (fig. 2), que pasa por el punto A del arranque, obteniéndose una economía insignificante de mampostería representada por el área cDd. Es preferible terminar el trasdós en Dc porque se aumenta la resistencia de la bóveda.

El método de Rondelet consiste en tomar (fig. 3) Co' igual á vez y media Co, y trazar el arco de trasdós AM con el radio $O'M$ hasta su encuentro con la vertical NM. Se continúa el trasdós por la tangente MT hasta su encuentro con el paramento del estribo, como en los casos anteriores.

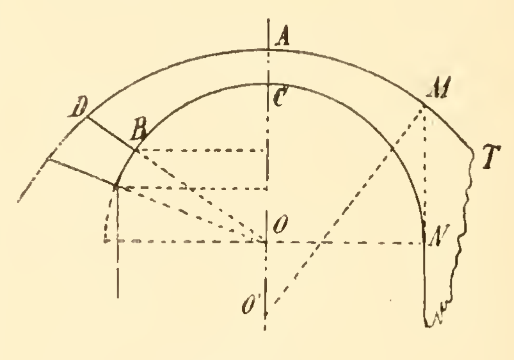


Figura 3.

Mr. Dejardín emplea el siguiente trazado: Se dirigen los radios *oa ob*... (fig. 1) y las rectas *bc*, *ad*... paralelas é iguales á AE (espesor determinado por las fórmulas), se proyectan estas magnitudes sobre aquéllo y se unen los puntos m . n'... así obtenidos.

— Le ha dado el nombre de *pericicloide*.

— Muy generalmente se sigue el procedimiento siguiente: sea (figura 4) AD la altura en la clave; desde C, arranque del arco con un radio igual á HD, determinaremos el punto M sobre AH; se dirige la recta MN, perpendicular en M, á la AH; desde un punto cualquiera del intradós se traza la línea Hy que corta á MN en Q; luego la perpendicular QP á HC y se toma $Hy = PD$. El punto y será un

punto de estradós y todos los otros se pueden determinar del mismo modo. Hy es siempre mayor que HQ, pero se separa continuamente de esta magnitud á medida que el arco Dy crece. Así MN es una asíntota del estradós cuya ecuación deducida de esta construcción es:

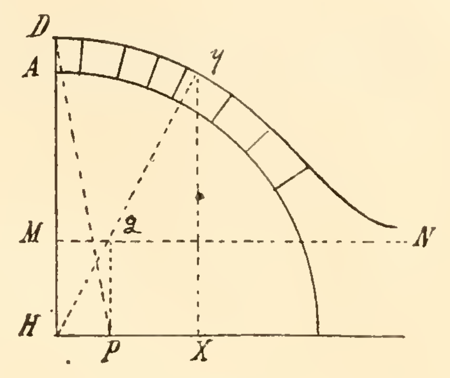


Figura 4.

$$x = \frac{y\sqrt{(a^2 + b^2 - y^2}}{\sqrt{y^2 - b^2}},$$

en la cual $X = Hx$, $xy = y$, $HA = a$ y $MH = b$.

Esta curva es muy semejante á la concoide de Nicómedes.

Bóvedas escarzanas, elípticas ó carpaneles.—Se emplea el mismo procedimiento que para las de medio punto, sea ó no el plano de arranque la junta de fractura. La tangente Db (fig. 5) forma á veces, con el paramento exterior bc del estribo, un ángulo poco obtuso que facilita en cierto modo el que aquél se introduzca á guisa de cuña en las tierras. Para prevenir esta circunstancia se da al trasdós la forma circular Da tomando por radio $O''D$ la parte de $O'D$ prolongado, comprendido por el trasdós D y la vertical ad del estribo, ó bien con la forma Mns, dando á Mn una ligera inclinación.

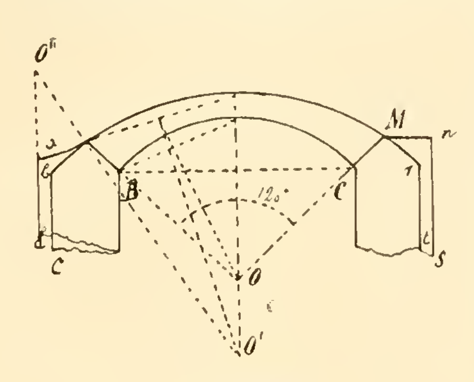


Figura 5.

El trazado indicado por la figura 1, parte de la derecha es ventajoso en este concepto.

Arcos carpaneles y elípticos.—Se forma el trasdós que suele adaptarse en la circular, siguiendo para su trazado los procedimientos ya expuestos para las de medio punto.

Sobre esta cuestión pueden ser consultadas, entre otras, las obras *Recherches sur l'équilibre des voutes*, Bossut; *Architecture hydraulique*, *Principes of Bridges*, Dr. Hutton; *Resistance des Materiaux*, L. Vigreux; *Traité Spécial de Coupe des pierres*, J. P. Douliot, etc.

Trayectoria recíproca.

Definición.—Nombre dado á una curva tal como AB que está colocada en una posición invertida respecto á la CD, que corta según un ángulo constante cuando se mueve paralelamente á sí misma.

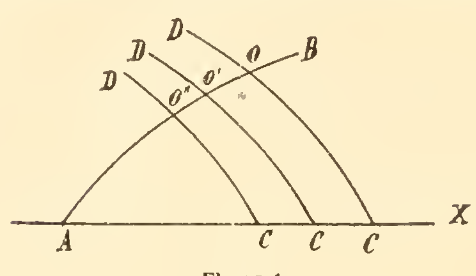


Figura 1.

Historia.—La denominación de trayectoria recíproca dada á esta especie de curva se debe á Juan Bernouilli.

Casos particulares. — Entre todas las curvas que gozan de esta propiedad se distingue la cicloide y la logarítmica. La primera es una trayectoria recíproca ortogonal y la segunda una trayectoria recíproca ortogonal ú oblicua, según diferentes circunstancias.

Trayectorias.

Del latino *trajectorius.*

Definición.—Curva que corta, según un ángulo dado, todas las curvas contenidas en una misma ecuación, haciendo variar un parámetro indeterminado.

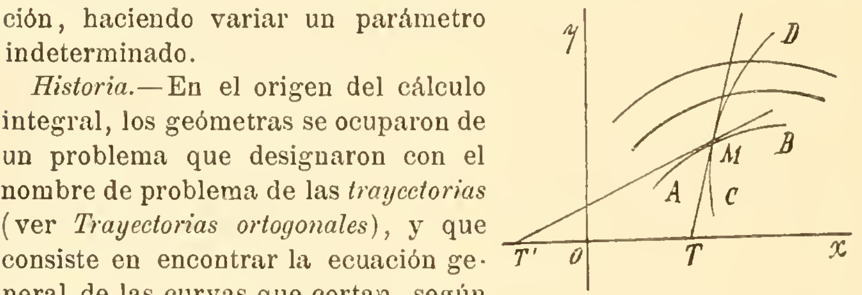


Figura 1.

Historia.—En el origen del cálculo integral, los geómetras se ocuparon de un problema que designaron con el nombre de problema de las *trayectorias* (ver *Trayectorias ortogonales*), y que consiste en encontrar la ecuación general de las curvas que cortan, según un ángulo dado, las curvas representadas por una ecuación $(x, y, a) = 0$ (1) en que a puede tomar todos los valores desde $-\infty$ á $+\infty$.

Ecuación.—Sean (x, y) las coordenadas de un punto M común á una de las curvas AB (fig. 1) y á la trayectoria CD, m la tangente del ángulo dado y T y T' los ángulos que la tangente á la cur-

va AB y á la trayectoria en el punto (x, y) forma con el eje de las x, se tiene,

$$m = \frac{\text{tg}\,.\,T - \text{tg}\,.\,T'}{1 + \text{tg}\,.\,T\,.\,\text{tg}\,.\,T'};$$

pero siendo

$$\text{tg}\,.\,T = \frac{dy}{dx}; \qquad \text{tg}\,.\,T' = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}.$$

se tendrá,

$$m\left(1 - \frac{dy}{dx}\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}\right) = \frac{dy}{dx} + \frac{\frac{df}{dx},}{\frac{df}{dy}}$$

ó bien

$$m\left(\frac{df}{dy} - \frac{df}{dx}\cdot\frac{dy}{dx}\right) = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\cdot\frac{dy}{dx},$$

eliminando a entre las ecuaciones (1) y (2), se tendrá la ecuación diferencial de la curva buscada.

Casos particulares.—La integración de esta ecuación no es posible sino en casos sumamente raros. En el que con más particularidad se ha tratado es aquél en que la curva móvil está representada por la ecuación

$$y^n = ax^p.$$

En este caso,

$$\frac{df}{dx} = -pax^{p-1} \quad \text{y} \quad \frac{df}{dy} = ny^{n-1},$$

y como,

$$a = y^n x^{-p},$$

la ecuación diferencial que se debe integrar es

$$m\left(1 + \frac{dy}{dx}\cdot\frac{px^{p-1}}{xy^{n-1}}\;\frac{y^n}{x^p}\right) = \frac{dy}{dx} - \frac{p}{n}\cdot\frac{y}{x},$$

ó

$$m\left(nx + py\frac{dy}{dx}\right) - nx\frac{dy}{dx} + py = 0,$$

ó bien

$$(mpy - nx)\frac{dy}{dx} + mnx + py = 0,$$

ecuación homogénea que puede ser integrada.

— Si se supone $n = p = 1$, es decir, si se piden las trayectorias de las rectas representadas por la ecuación

$$y = ax,$$

se tendrá

$$m \,.\, l(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = \text{arc}\,.\,\text{tg}\,\frac{y}{x} + C,$$

y tomando coordenadas polares

$$m \,.\, lr = \theta + C \quad \text{ó} \quad r = Ce^{\frac{\theta}{m}},$$

que nos dice que las curvas que cortan según un mismo ángulo todas las rectas trazadas por el origen son espirales logarítmicas semejantes, que tienen el origen por punto asintótico.

— La trayectoria que describe en el vacío, bajo la acción de la gravedad, un cuerpo lanzado oblicuamente, es una parábola cuyo eje es vertical.

— Por extensión, se da el nombre de trayectoria á la curva que un proyectil tal como una bala, bomba, etc., describe al través del espacio (Ver *Balística.)*

Bajo este punto de vista, Mr. Poncelet *(Leçons de Mécanique industrielle*, Metz, 1828 y 1829) ha dado un método en parte analítico, y en parte gráfico para trazar las trayectorias planas, método que ha reproducido bajo una forma algún tanto diferente Mr. Didion en su *Traité de Balistique.*

Trayectorias de las tangentes.

Definición.—Se da este nombre á las trayectorias que cortan, según un ángulo dado, las tangentes á una curva.

Historia.—Mr. H. Molius ha estudiado estas líneas *(Journal de Liouville*, t. VIII, pág. 132.)

Propiedades.—Molius considera que estas curvas tienen por evolutoides (ver esta voz) una curva dada cualquiera y su determinación depende de una ecuación diferencial de primer orden que se puede siempre integrar.

— Cuando estas trayectorias cortan en ángulo recto á la evolutoide, ellas serán la evolvente.

Trayectorias luminosas.

Definición.—Nombre dado á las trayectorias recorridas por los rayos luminosos en los diferentes medios.

Forma de estas líneas.—En los medios isótropos y en los homoédricos la trayectoria luminosa es una línea recta.

— La luz en su propagación siempre sigue trayectorias braquistócronas, encuentre ó no superficies activas por reflexión ó refracción, en los medios homoédricos.

— Cuando las trayectorias luminosas análogas parten de un mismo punto y convergen en otro, todas las trayectorias son tautócronas. Asimismo lo son las que parten de un punto y convergen en otro después de reflejarse sobre una superficie.

Puede consultarse P. J. Delsaulx *(Elemens d'optique physique* página 187) y Cauchy *(Exercices d'analyse et de physique mathématique*, tomo I), etc.

Trayectorias ortogonales.

Definición.—Son aquellas trayectorias en que el ángulo, según el cual encuentran á las curvas de una misma familia, es recto.

Historia.—La cuestión de las trayectorias ortogonales remonta su origen á Juan Bernouilli (*Problema de trajectoriis orthogonalibus*), que es el primero que de ellas se ocupa y da el nombre á estas curvas, nombre que aún conservan.

— Según un escrito de Nicolás, hijo de Juan Bernouilli, publicado en *Acta Eruditorum*, en 1718, bajo el título *De trajectoriis curvas ordinatim positione datas ad angulos rectos*, *vel alia data lege secantibus*, á Juan Bernouilli le sugirieron el estudio de estas especies de líneas la teoría de las ondas luminosas de Huyghens; y este problema adquiere á principios del siglo XVIII una gran celebridad, principalmente debida á la viva polémica que se establece entre la noble familia, gloria de Helvética.

— Leibniz entra en la lid y descubrió la diferenciación bajo el signo *de curva in curvam*, verdadero prodome del cálculo de variaciones, llevando las cartas que Leibniz escribió á Bernouilli sobre este asunto, la fecha de 21 de Marzo de 1694. Más tarde, en 1715, Leibniz propone para *tentar el pulso á los analistas ingleses* (términos que emplea) y que transmite al Abad de Conti, el siguiente problema que aparece en las *Actas de Leipsick* de aquel año, *Encontrar la trayectoria ortogonal de una serie de curvas de la misma naturaleza que tengan el mismo eje y el mismo vértice; por ejemplo, de una serie de hipérbolas del mismo vértice y del mismo centro.*

— Este problema fué prontamente resuelto, no tan sólo por diferentes geómetras ingleses, sino también por Nicolás Bernouilli, hijo de Juan, que hizo así su debut en la carrera de las matemáticas.

—Newton insertó en 1716, en las *Transactions philosophiques*, un estudio sobre estas lineas con el título *Problematis olim in Actis Eruditorum Lipsiæ propositi solutio generalis.*

— Visto por Leibniz que su problema había sido resuelto, inmediatamente concertó con Juan Bernouilli el medio de exponerlo aumentando el número de dificultades, y éste envía al primero la cuestión siguiente: *Encontrar y construir las líneas que cortan en ángulo recto todas las curvas cuyos radios de curvatura estén divididos por el eje en una razón dada*, de la que le acompaña la solución.

— Este problema fué sucesivamente resuelto por Taylor (*Transactions philosophiques*, 1717); Nicolás Bernouilli, hijo de Juan (*Actes de Leipsick*, 1718, 1720); Nicolás Bernouilli, hijo de Jacobo (*Actes de Leipsick*, 1719) y Hermann.

La solución de Juan Bernouilli, que había comunicado á Leibniz, se encuentra en el tomo segundo de sus obras, y es notable por su elegancia. Demuestra que si la relación del radio osculador á su parte interceptada entre el eje y la curva está representada por la de 1 á n, la ecuación de la curva que tiene la propiedad pedida es:

$$y = \int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{a^{2n} - x^{2n}}},$$

que es la ecuación de un círculo si $n = 1$ y la de una cicloide si $n = \frac{1}{2}$.

Ecuación.—Las ecuaciones dadas en *Trayectorias* (ver esta voz) se

simplifican ahora que el ángulo dado es recto y la ecuación diferencial resulta de la eliminación de a entre las dos ecuaciones:

$$f(x, y, a) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{df}{dx} dy - \frac{df}{dy} dx = 0.$$

Así, pues, en el ejemplo que puso en trayectorias, bastará eliminar a entre las ecuaciones:

$$y^n = ax^p \qquad ny^{n-1} + pax^{p-1} \frac{dy}{dx} = 0,$$

lo que nos da la ecuación. . . $nx + py \dfrac{dy}{dx} = 0,$

cuya integral es. . . . . $nx^2 + py^2 = C,$

y según que n y p sean del mismo ó de diferente signo, esta ecuación representa una infinidad de elipses ó de hipérbolas semejantes y concéntricas.

Casos particulares. —Mr. Catalan ha estudiado las trayectorias ortogonales de los círculos situados sobre un elipsoide y paralelos entre sí, encontrando para ecuación de estas líneas:

$$\left[y^2 + \frac{n^2 - m^2}{m^2} x^2 - b^2\right] \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2 \frac{n^2 - m^2}{m^2} xy \frac{dy}{dx} + \frac{n^2}{m^2} y^2 = 0.$$

siendo,

$$m = + \frac{1}{ac} \sqrt{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)} \quad \text{y} \quad n^2 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^2}{c^2} - 1.$$

— Las trayectorias ortogonales de las superficies isotermas correspondientes á un parámetro termométrico determinado, son las líneas de propagación. (Ver esta voz.)

Aplicaciones. —Entre otras, tenemos la que se hace en los aparejos de los puentes oblicuos cuando este aparejo es el llamado ortogonal, en el cual las juntas continuas dibujadas sobre el intradós no son otra cosa que las *trayectorias ortogonales* de las curvas paralelas á las de cabeza. *(Annales des ponts et chaussées*, 1839, artículo de M. Lefort.)

Trayectorias ortogonales isotermas. — En la obra de Mr. J. Gardin, *Thèses presentées á la Faculté des Sciences de Paris pour obtener le grade de Docteur es Sciences mathématiques*, París, 1853, se trata de las tra-

yectorias cualesquiera de un sistema de curvas isotermas, planas ó esféricas (ver isotermas) y demuestra son también isotermas.

— Este teorema sirve al autor para encontrar la ecuación de las líneas que cortan, según un ángulo α, los círculos que pasan por dos puntos, la cual es, representando por A, una constante cualquiera; por r y r', los radios dirigidos desde un punto de la curva á los dos puntos fijos, y por θ el ángulo de estos radios:

$$\frac{r}{r'} = A\, e^{\frac{\theta}{\operatorname{tg}.\,\alpha}}.$$

— Mr. Lamé ha demostrado que á un sistema de curvas planas isotermas corresponden siempre trayectorias ortogonales isotermas.

Trebolado.

Definición. — Arco cuyo contorno está compuesto de tres arcos de círculo que se cortan, formando ángulos agudos y salientes.

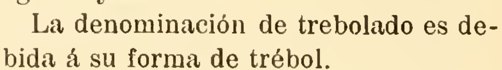
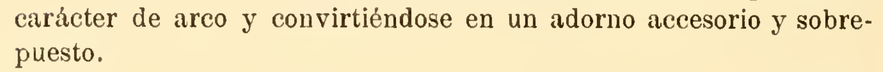


Figura 1.

La denominación de trebolado es debida á su forma de trébol.

Uso. — Se empezaron á usar en el último período del románico y continuaron en el ojival, llegando á perder su carácter de arco y convirtiéndose en un adorno accesorio y sobrepuesto.



Trefle.

En *Nouvelles Annales*, 1891, Mr. Marié da este nombre á una cúbica que goza de la propiedad de tener por asíntotas los tres lados de un triángulo y poseer un punto doble.

Tomando por eje de las x una de las medianas del triángulo por origen el punto doble, y por eje de las y una paralela á uno de los lados $2a$ del triángulo paralelo á las cuerdas conjugadas del eje de las x, tiene por ecuación

$$y = \frac{ax}{3m}\sqrt{\frac{x+3m}{x-m}}.$$

Siendo m el tercio de la mediana correspondiente al lado $2a$ tomado como base.

Triangulares.

Las curvas de la familia

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n + \left(\frac{z}{c}\right)^n = k$$

han recibido varios nombres diferentes, tales como *triangulares*, *triangulares simétricas*, *tetraedrales simétricas*, *de Lamé* (ver esta voz), etcétera.

Para su particular estudio se pueden consultar entre otras las obras siguientes: K. Schwering, *Remarque sur la courbe* $\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = 1$. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, t. XXI, pág. 133 y un opúsculo de F. Weskamp, sobre la misma línea; Gallien, *Untersuchung über die curve* $\frac{a^2}{x^2} \pm \frac{b^2}{y^2} = 1$; V. Jamet, *Sur les surfaces et les courbes tétraèdrales symétriques. Annales scientifiques de l'Ecole Normale supérieure*, 1.ª serie, t. IV; V. Jamet, *Sur le genre des courbes planes triangulaires. Bulletin de la Societé mathématique de France*, t. XVI, página 132, etc.

Tricúspide.

Nombre particular con que se ha designado á la hipocicloide de tres retrocesos. (Ver hipocicloide).

— El eje de una parábola inscrita en un triángulo cualquiera envuelve una tricúspide.

— Además de la obra indicada en *hipocicloide*, se puede consultar la bibliografía de esta línea publicada en *L'Intermediaire des Mathématiciens*, 1896, págs. 166 á 168.

Tridente.

Definición.—Se da este nombre á las cúbicas que, teniendo un punto doble en el infinito, tienen su ecuación cuando se toman convenientemente los ejes coordenados de la forma:

$$y = \frac{U}{V},$$

siendo U y V funciones enteras de x, la primera de tercer grado y la segunda de primero.

Historia.—Esta curva se denomina también *parábola de Descartes;* debe su nombre á su forma particular y puede consultarse sobre sus propiedades, particularmente la obra *Analyse des lignes courbes*, de Cramer, y sobre noticias bibliográficas y otros datos el *Journal de Mathématiques spéciales*, 1885, págs. 154 y 200.

Ecuación.—La ecuación general de estas curvas es:

$$y = \frac{Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}{mx + n},$$

siendo A y m diferentes de cero.

Transportando los ejes paralelamente á si mismos por medio de las fórmulas

$$y + \lambda = Y \qquad x + \frac{n}{m} = X,$$

dicha ecuación se puede disponer bajo la forma

$$Y - \lambda = \frac{AX^3 + B'X^2 + C'X + D'}{mX},$$

y si disponemos de λ de manera que

$$C' + \lambda m = 0$$

se tendrá para ecuación general de los tridentes en este sistema de ejes,

$$Y = \frac{AX^3 + B'X^2 + D'}{mX}. \qquad (1)$$

Casos particulares.—Si alrededor de un punto fijo M (fig. 1) se hace girar una transversal que encuentra los ejes coordenados Ox, Oy en los puntos A y B y se efectúa la construcción 1 . 2 . 3, se obtiene un punto I y el lugar de estos puntos es un tridente.

En efecto; designando por α, β las coordenadas del punto M, se encuentra para ecuación del lugar de los puntos I

$$y = \frac{x[(x - \alpha)^2 + \beta^2]}{\beta(x - \alpha)}.$$

— Consideremos ahora una parábola P (fig. 2) referida á su eje Oy y á su tangente principal Ox; sea A un punto tomado sobre el eje, y B un punto fijo situado sobre la cuerda principal del punto A; ha-

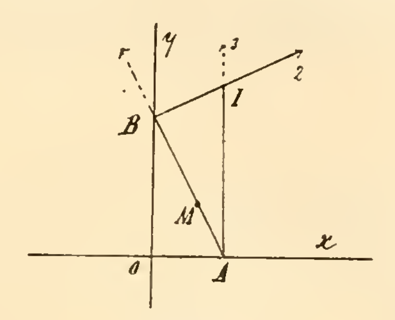


Figura 1.

ciendo la construcción 1 . 2 . 3 se obtiene un punto I y el lugar de estos puntos es un tridente.

En efecto; si $(x'\ y')$ son las coordenadas de M, y se hace

$$OA = b \qquad AB = a$$

Figura 2.

la ecuación de BI será

$$y - b = \frac{y' - b}{x'}(x - a),$$

y como $x = x'$ y $x'^2 = 2py'$; eliminando x' é y' entre estas tres ecuaciones, se tiene para ecuación del lugar de los puntos I

$$y = \frac{x^3 - ax^2 + 2abp}{2px},$$

ecuación que tiene la misma forma que la (1) y que, por consecuencia, es la de una curva tridente.

Trifólium.

Definición. — Si consideramos un círculo Δ (fig. 1) y un diámetro fijo OA; si sobre Δ se considera un punto móvil M, y después de

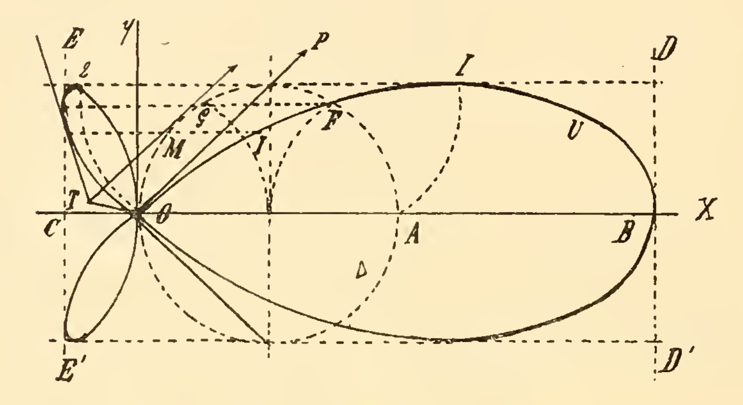


Figura 1.

trazar por C una perpendicular á OA, se toma $MI = MI' = OM$, el lugar V descrito por los puntos I é I' se denomina *trifólium recto.*

Ecuación. — Siendo OI la bisectriz de MOA, será

$$OI = f = 2\,OM \cos\omega \quad \text{y} \quad OM = d\,.\cos 2\,\omega,$$

y la ecuación polar será

$$f = 2\,d \cos.\omega\,.\cos 2\,\omega;$$

su ecuación cartesiana será por consiguiente

$$(x^2 + y^2)^2 = 2\,dx\,(x^2 - y^2).$$

Forma y propiedades. — De la ecuación anterior se deduce:

$$y^4 + 2\,y^2 x\,(x + d) + x^3\,(x - 2\,d) = 0.$$

Si consideramos

$$x - 2\,d > 0$$

y se toma $AB = OA$, se ve que toda la curva está situada á la izquierda de la recta DD', y como

$$x^2(x+d)^2 - x^3(x-2d) > 0$$

ó

$$4x + d > 0$$

si se toma $OC = \frac{OA}{4}$, la curva estará toda situada á la derecha de EE'.

— La curva está asimismo comprendida entre las rectas DE y $D'E'$, que le son doblemente tangentes en los puntos 1 y 2 obtenidos, describiendo un semicírculo desde el punto P como centro y con OP por radio.

— La curva que nos ocupa no tiene más direcciones asintóticas que las isótropas.

— La recta OX es un eje de simetría y el punto O es un punto triple cuyas tangentes son: la perpendicular al eje para una de las ramas y las bisectrices de los ángulos yox y XOP para las otras dos.

— La recta OT, perpendicular á OM, nos da la tangente TI para un punto I de la curva.

Ver A. Brocard, *Journal de Mathématiques Spéciales,* 1891, páginas 109 y 123, y la *Géométrie de la règle*, 1890, Longchamps, páginas 122 y 123.

Trifólium pratense. — Nombre que toma el trifolio compuesto de tres fólium iguales; cada uno de estos fólium está dividido simétricamente por una recta que tiende al interior hacia un punto de retroceso. Las tres rectas del punto triple, que son ejes de simetría, forman entre sí dos ángulos de 120° (*Nouvelles Annales*, t. XIX).

Trisectriz.

Definición. — Se da el nombre de trisectriz á toda curva que permite resolver el problema de la trisección de un ángulo dado.

— Existen una infinidad de curvas trisectrices, y estas líneas, cuando se combinan con una recta para resolver el problema indicado, son por lo menos de tercer grado.

– De las líneas de esta clase, una de las más sencillas es la que lleva el nombre de:

Trisectriz de Mac-Laurin. — *Definición.* — Curva cúbica circular recta provista de un nodo, estando las tangentes en este punto inclinadas respectivamente, sobre el eje de la curva, dos ángulos iguales á 60° y 120°.

Historia. — Esta curva se encuentra primeramente estudiada por Mac-Laurin (*Traité des fluxions*, pág. 198, pl. X, fig. 134-1749), y teniéndose sobre ella diferentes trabajos, entre otros una Memoria debida á Mr. Schoute (*Archives Neerlandaises*, t. XX, 1885); una nota de M. d'Almeida Lima (*Jornal de sciencias mathemáticas e Astronómicas*, Coimbra, 1885, pág. 13) y titulada *Sobre una curva do terceiro grao;* dos artículos de M. Habich (*Gaceta científica*, 1885, números 9 y 12, página 248, Lima), y otros trabajos de M. G. de Longchamps (*Journal de Mathématiques spéciales*, 1885, página 176; y en *Supplément au Cours de Mathématiques spéciales*, pág. 113; *Annuaire de l'Association française*, Congreso de Grenoble, 1885, pág. 131), etc.

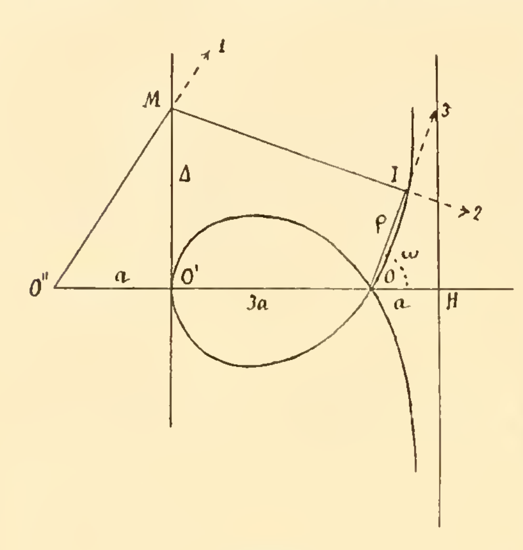


Figura 1.

Trazado y ecuación. — Consideremos tres puntos en línea recta O, O', O'', y supongamos (fig. 1) que

$$OO' = 3 \,.\, O'\,O'',$$

hagamos luego la construcción (1, 2, 3), y si $O'\,O'' = a$ se tendrá, para ecuación del lugar descrito por el punto I, en coordenadas polares

$$\rho = \frac{a}{\cos . \omega} - 4a \,.\, \cos . \omega,$$

y en coordenadas cartesianas

$$x\,(x^2 + y^2) = a\,(y^2 - 3\,x^2);$$

la curva presentará la forma manifiesta en la figura, y ella es la trisectriz de Mac-Laurin.

Tangente.—Sea I un punto de la trisectriz, punto que corresponde al punto M de la recta Δ como se acaba de ver. Proyectemos O sobre $O''M$ (fig. 2) en P, y tracemos IJ paralela á OO'', se notará que el lugar del punto J es una trisectriz igual y paralela á la descrita por el punto I, y que el lugar de P es el círculo descrito sobre OO'' como diámetro. Los dos puntos P y J son isotómicos sobre $O''M$.

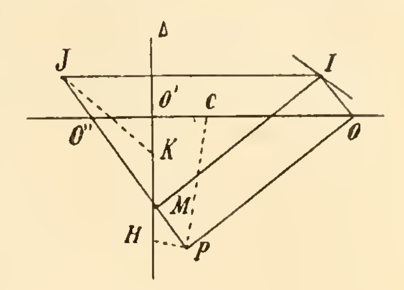


Figura 2.

Si ahora consideramos dos posiciones infinitamente próximas de la figura móvil, el principio de las transversales recíprocas prueba que las tangentes á los lugares descritos por J y P cortan á Δ en dos puntos H, K simétricos con relación á M. Así, pues, después de tomar el punto C medio de OO'', se levanta en P una perpendicular PH á CP y se tomará $MK = HM$; la recta KJ obtenida es paralela á la tangente buscada.

Trocoide.

Del griego, τροχοειδής.

Definición.—Es la línea engendrada por un punto cualquiera del plano de una curva rodando sin resbalar sobre otra curva fija. La línea fija se denomina *base* y la línea móvil *rotativa*.

Las curvas de esta clase más frecuentemente empleadas son las *cicloidales*, *epicicloidales* y *evolventes de círculo* (ver estas voces).

Historia.—Este nombre de *trocoide* fué aplicado en un principio á la cicloide y aun á la epicicloide, debiéndose hoy conservar para todas las curvas comprendidas en la definición expuesta, y de las que éstas no son más que casos particulares. Así, pues, su historia no se puede separar de aquellas de las curvas expresadas habiendo tratados y libros que llevan este nombre, si bien se ocupan de propiedades de la cicloide ó epicicloide.

Así tenemos, por ejemplo, las obras de Pascal, después de su famoso reto, tituladas: *Histoire de la roulette appelée autrement trochoide ou cycloide. Suite de la roulette. Dimensions des lignes courbes de touttes les roulettes* (1647). En estas obras, así como en *De trochoide,*

ejusque spatio, de Roberval *(Recueil des mémoires de l'Académie des sciences,* 1690), se encuentran las principales propiedades de estas curvas, entre ellas la notable, indicada por Pascal, de que la longitud de la cicloide, alargada y reducida, dependía de la rectificación de la elipse, y que Nicolle demuestra para las epicicloides *(Mémoires de la Académie des sciences,* 1708). Nicolle publicó también la obra *Essai sur la théorie des roulettes* (1706).

La Hire tiene un *Traité des roulettes* (1704).

Descartes, con motivo de trazar tangentes á estas curvas, ideó el medio que se funda en la consideración del movimiento, indicando que en la trocoide la normal pasa á cada instante por el punto de contacto de las dos curvas que la originan, medio que Roberval empleó más tarde, siendo generalizado en estos últimos tiempos por Charles *(Aperçu historique pour l'origine et le developpement des méthodes en géométrie,* pág. 548, 1837), constituyendo un verdadero método, que todos conocemos, para el trazado de tangentes á las curvas en general.

Propiedades.—La propiedad fundamental de la trocoide es que «la normal en un punto cualquiera de esta curva pasa por el punto de contacto de la rotativa que la engendra con la curva fija»; pues, con efecto, este punto de contacto es, como se sabe, el centro instantáneo de toda figura plana ligada á la rotativa. Se saben, pues, construir las tangentes á las trocoides.

— Si ω designa la velocidad angular de la curva rotativa en el instante en que el contacto tiene lugar en a, la velocidad v del punto M que describe la trocoide está expresada por $\omega\ Ma$; y si ω es una cantidad constante, se ve que v es proporcional á Ma, es decir, que para una posición cualquiera de la rotativa la velocidad del punto generador es, por tanto, proporcional á su distancia al punto de contacto correspondiente de la curva rotativa con la curva base.

— Vamos á ocuparnos de su centro de curvatura. Sea ABS (fig. 1) la curva base, $AB'C$ la rotativa, A el punto de contacto actual, AC, AC' sus radios de curvatura R y R' en el punto A; AB, $A'B'$ los arcos infinitamente pequeños iguales, de tal suerte, que el punto B' se deba venir á aplicar en B al cabo de un instante, M el punto descrito, r la distancia AM, i el ángulo MAC'.

Para construir la posición M', que será la que vendrá á ocupar el punto M cuando el punto B' llegue á B, es fácil señalar que la normal $B'C'$ habrá venido á colocarse en la prolongación de CB, la línea $B'M$ se colocará en BM, de modo que forme con esta prolongación un ángulo igual á $MB'C'$.

Representando MA la normal en M á la trayectoria del punto M, y M_1B la normal á esta misma trayectoria en M_1; MA y M_1B, prolongadas hasta que se corten en X, nos darán, aproximadamente, el centro de curvatura buscado. El límite de las posiciones de X será este centro de curvatura.

El principio sobre el cual nos apoyamos para encontrar la posición de este punto X consiste en esta verdad evidente: que cuando una figura cualquiera se mueve de una manera cualquiera en un plano, las dos posiciones, inicial y final de una recta cualquiera ligada á la figura, forman entre sí un ángulo constante.—Este ángulo es el que se dice ser girado por la figura en su plano.

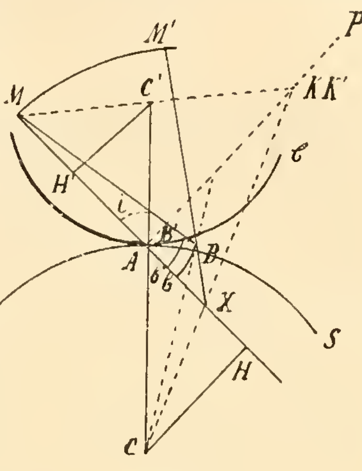


Figura 1.

En la cuestión actual este ángulo es el de CB con $B'C'$, ó aquel de XB con $B'M$; el primero es igual á $BCA + AC'B'$, y el segundo á $BXA + AMB'$. Igualando estas dos sumas se obtiene la expresión propia para dar el radio de curvatura $\rho = XM$ de esta curva trocoidal. — Llamando á los arcos iguales AB, AB', ds, los ángulos BCA y $AC'B'$ estarán representados por $\frac{ds}{R}$ y $\frac{ds}{R'}$. En cuanto á los ángulos BXA y AMB', en suponiendo Bb y $B'b'$ perpendiculares á MA, estarán representados por

$$\frac{Bb}{Xb} \quad ó \quad \frac{Bb}{XM - AM} \quad ó \quad \frac{Bb}{\rho - r},$$

y por

$$\frac{Bb'}{Mb'} \quad ó \quad \frac{Bb'}{MA} \quad ó \quad \frac{Bb'}{r}.$$

Por otra parte, los triángulos rectángulos ABb y $AB'b'$ nos darán:

$$Bb = B'b' = ds \,.\, \cos \,.\, \varphi.$$

Luego la ecuación buscada es:

$$\frac{ds}{R} + \frac{ds}{R'} = \cos . \varphi \left(\frac{ds}{r} + \frac{ds}{\rho - r} \right),$$

ó más sencillamente

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \cos . \varphi \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\rho - r} \right).$$

Esta fórmula encierra dos cambios de signos: R' deberá ser reemplazado por $-R'$, si la rotativa tiene su concavidad hacia el mismo lado que la curva fija; ρ cambia también de signo si la concavidad de la curva trocoidal cambia de sentido, y, por último, r cambia también de signo si el punto M pasa al interior de la curva fija.

Esta fórmula da un medio fácil, dado por Savary, profesor de la Escuela Politécnica, de París, para construir el centro de la curvatura X de la curva trocoidal.—He aquí la regla: «Unase el punto descrito M al centro de curvatura C' de la curva rotativa; prolónguese hasta que encuentre en K á la perpendicular AP á AM, y, por último, únase KC' que pasa por el punto buscado X. Esta construcción es aplicable á todos los casos, mientras que la fórmula precisa ser modificada en los signos, conforme á las prescripciones indicadas arriba.

Círculo de rodadura.—La fórmula anterior indica que ρ permanece el mismo si R y R' varían al mismo tiempo, de manera que $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$ permanezca constante; he aquí por qué se ha imaginado de cambiar la base de la rotativa ó la curva fija por su tangente en A, lo que viene á ser su radio de curvatura infinito y á reemplazar el círculo osculador á la rotativa por un círculo llamado de *rodadura*, que tiene su radio a definido por la condición:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \quad \text{de donde} \quad a = \frac{RR'}{R + R'}.$$

La fórmula vendrá á ser ahora:

$$\frac{1}{a . \cos . i} = \frac{1}{r} + \frac{1}{\rho - r} \quad \text{de donde} \quad \rho = \frac{r^2}{r - a . \cos . i}.$$

Si $C'A$ es el radio del círculo de rodadura, la construcción de Savary se reduce á trazar MC', prolongarla hasta K y á dirigir KX perpendicular á la recta AT, que ha reemplazado la base de la rotativa.

Si el punto viene á colocarse en M_1 sobre la circunferencia descrita sobre AC' como diámetro, la recta M_1C' no encontrará á AP sino en el infinito, de donde se concluye que la trayectoria del punto M_1 tendrá en M_1 un punto de inflexión; la tangente en este punto será M_1C'.

La circunferencia AM_1C' ha sido por este motivo nombrada *circunferencia de las inflexiones.*

Si se nos da el centro de curvatura X de la trayectoria (fig. 2) de un punto y se quiere obtener este punto, que deberá estar sobre XA, es fácil dirigir XK paralela á AC', trazar KC' y prolongarla hasta M. Ahora, si el punto X está dado en X_1 sobre la circunferencia simétrica de la circunferencia de las inflexiones, el punto K vendrá á K_1 sobre esta circunferencia de las inflexiones, y K_1C', siendo paralela á K_1A, el punto buscado estará en el infinito. Así la circunferencia OA es el lugar de los centros de curvatura de los puntos del infinito ligados á la rotativa. Estos puntos describen círculos, y es porque la circunferencia OA ha recibido el nombre de *circunferencia de los centros.*

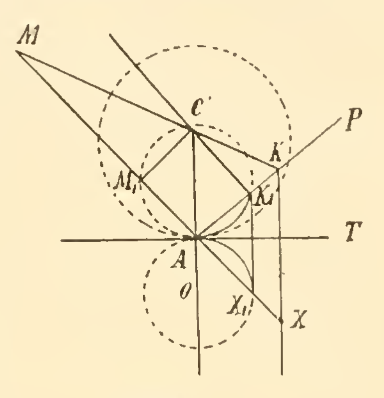


Figura 2.

— Si un arco de curva rueda sin resbalar, primero sobre la convexidad y luego sobre la concavidad de otra curva, de manera que en estos dos rodajes los mismos puntos de la curva móvil vengan á estar sucesivamente en contacto con los mismos puntos de la curva fija:

1.° La suma ó la diferencia de dos arcos descritos por un punto cualquiera del plano de la curva móvil, será independiente de la curva fija—la suma, si el radio de curvatura de la fija es, en cada uno de los puntos de contacto, mayor que el de la curva móvil—, la diferencia en el caso contrario.

2.° Si se considera en cada uno de estos dos rodajes el área del cuadrilátero mixtilíneo limitado por el arco de la curva fija, el arco de la trocoide descrita y las dos líneas rectas que unen los primeros

y últimos extremos de estos arcos, la suma de dos cuadriláteros será una cantidad constante, es decir, independiente de la naturaleza de la curva fija (en lugar de la suma será la diferencia en las mismas circunstancias de arriba).

— Se deben distinguir con respecto á la línea fija tres casos: 1.° Si la línea fija es una línea recta, entonces no hay diferencia entre su concavidad y su convexidad; por tanto, la longitud y el área de la trocoide sobre una recta es siempre mitad de la suma (ó diferencia) de las longitudes y áreas de dos trocoides descritas sobre concavidad y convexidad de una curva cualquiera. 2.° Si se toma por curva fija una curva idéntica á la curva móvil. Y 3.° Cuando en los puntos correspondientes de la curva fija y de la curva rotativa, los dos radios de curvatura tienen constantemente la misma relación, como en las epicicloides.

— Se deduce de los principios anteriores, que cuando una cónica rueda sobre sí misma, cada uno de sus focos describe una circunferencia, y, por tanto, que las diversas trocoides, descritas por el foco de una cónica, dependen su rectificación y cuadratura de la cuadratura del círculo.

— Mr. Transon ha dado (*Journal Liouville*, pág. 149, t. IX) la siguiente expresión para el valor del radio de curvatura R de la trocoide en uno de sus puntos:

Siendo r y r' los radios de curvatura de las dos curvas, base y rotativa;

ρ = distancia del centro de curvatura de la trocoide á este punto;
ρ' = distancia del punto descrito al de contacto;
i = ángulo de la normal de la trocoide con la normal común de las dos curvas;

$$R = \rho + \rho' = \rho'^2 \frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}}{\rho'\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) - \cos . i},$$

para cuando las curvas se presentan respectivamente su convexidad; y

$$R = \rho - \rho' = \rho'^2 \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}}{\rho'\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right) - \cos . i},$$

si rueda la una en la concavidad de la otra.

Si

$$r' = r; \qquad \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = \frac{2}{r \,.\, \cos \,.\, i}$$

que es precisamente la relación entre las dos distancias conjugadas ρ' y ρ en la reflexión de la luz.

— Teniendo en cuenta el teorema de M. Quetelet sobre la *cáustica por reflexión*, ó sea que ésta es la evoluta de una curva que este geómetra llama *cáustica secundaria* (ver esta voz), y que es la envolvente de una serie de círculos que tienen sus centros sobre la curva reflejante y pasan todos por el foco luminoso, se deduce que la cáustica secundaria es la trocoide que describe el punto luminoso si se hace girar sobre sí misma la curva reflejante.

— Para más detalles sobre estas curvas puede verse la Memoria escrita sobre las mismas por Mr. Abb. Aoust.

— Una generalización de esta línea ha sido estudiada con el nombre de *pseudotroide* por E. Wölffing, en su artículo publicado en *Zeitchrift für Mathematick*, t. XLIV, páginas 139 á 166.

Tromba.

Ecuación. — Si en las ecuaciones

$$r^m = a^m \,.\, \omega \qquad p^2 (m^2 r^{2m} + a^{2m}) = m^2 r^{2m+2}$$

que se encuentran en la obra *Sulla Geometria Analitica delle linee piane*, citada en el artículo (Rodoráceas), y en el cual detallamos el sistema de coordenadas de Sacchi, á las que se refieren las anteriores expresiones, se hace

$$m = -2$$

se encuentra la ecuación de la curva á la que se le ha dado el nombre de *tromba*, y que no presenta aplicación ninguna señalada en la ciencia.

Trópicos.

Del griego τρέῶω, yo retorno.

Definición. — Reciben este nombre, en Astronomía, dos círculos menores paralelos al Ecuador, que tocan á la ecliptica en los dos puntos solsticiales.

Clasificación. — Se distinguen dos trópicos: uno situado al N. del

Ecuador y se llama trópico de *Cáncer* (del latino *cáncer)* por tocar á la eclíptica en el primer punto de este signo, y otro situado al S. del Ecuador y se llama trópico de *Capricornio* (del latin *capricornus;* de *capra*, cabra, y *cornu*, cuerno) por responder al primer punto de este otro signo.

Propiedades. — Tocan estos círculos á la eclíptica en los puntos solsticiales, equidistantes del plano del Ecuador 23º 27′ 15″ y situados á lados distintos.

— Los puntos del círculo del horizonte, en que el sol sale y se pone en nuestros climas, cuando describe el trópico de Cáncer, se nombran el *oriente* y el *occidente de estío,* y aquéllos en que sale y se pone cuando describe el trópico de Capricornio, el *oriente* y el *occidente de invierno.*

— Los trópicos determinan la mayor distancia á que el sol se puede apartar del Ecuador, tanto en uno como en otro hemisferio, de manera que, al llegar á estos círculos, retrocede ó vuelve otra vez hacia el Ecuador, razón por la que se les conoce con este nombre.

— La posición de los trópicos varía lentamente con la inclinación de la elíptica sobre el Ecuador; la villa de Sigena (Assuan), en el Alto Egipto, que estaba en la época de Hiparco en el plano del trópico austral, puesto que el sol al medio día del día del solsticio de verano iluminaba con sus rayos el fondo de los pozos, está hoy á unos 16′.

Aplicaciones.—Los trópicos sirven para determinar en un lugar cualquiera de la tierra la mayor duración del día y la mayor de la noche del año. En efecto; el sol, por su movimiento diurno aparente, parece describir el trópico de Cáncer hacia el 21 de Junio, lo que nos da el mayor día del año para los habitantes del hemisferio septentrional de la tierra; y el trópico de Capricornio hacia el 21 de Diciembre, lo que da para los mismos habitantes el día más corto del año. Lo contrario sucede á los habitantes del hemisferio meridional, para los cuales el día mayor es aquel en que el sol parece describir el trópico de Capricornio, y el más corto para cuando verifica el de Cáncer.

— En Geografía se da también el nombre de *trópicos* á dos círculos que se suponen trazados sobre el globo terrestre, á un lado y otro del Ecuador, á la distancia de 23°27′; y que comprenden entre sí la zona tórrida. Estos paralelos pasan por los puntos del globo que

tienen el sol en su cenit en la época de los solsticios; es decir, en la época del solsticio de estío para los puntos situados sobre el trópico de Cáncer, y en la época del solsticio de invierno para los que lo están sobre el trópico de Capricornio.

Tschirnhausen (Curvas de).

Definición.—Curvas descritas por la punta de un estilo tendiendo un hilo sujeto por sus extremos á dos puntos fijos y resbalando sobre una curva.

Historia.—La idea de la generación de las curvas, conforme á la manera expresada, fué propuesta por Tschirnhausen en su obra *Medicina mentis seu tentamen genuinæ lógicæ, in qua disscritur de méthodo detegendi incognitas veritates* (Amsterdam, 1687, y Leipzig, 1695), dando el autor un método para construir la tangente á la curva descrita.

Hermann *(Acta eruditorum*, 1712) se ocupa de este sistema de generación y expone un método para construir sus radios de curvatura.

Turquesa.

Definición.—En las artes del dibujo se da este nombre á la curva que resulta de la combinación de las llamadas perla indiana y sinusoide.

Clasificación.—Se distinguen principalmente dos clases: la repre-

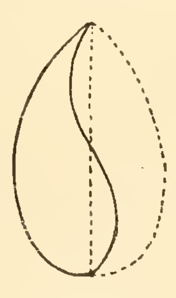


Figura 1.

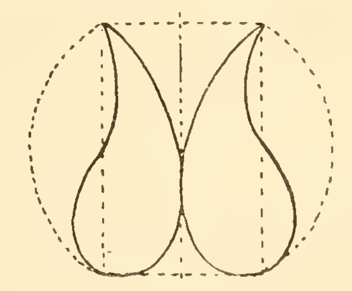


Figura 2.

sentada por la figura 1, que recibe el nombre de *turquesa indiana*, y la por la figura 2, que se llama *turquesa gemela*.

— Estas curvas, en sus combinaciones con la sinusoide, dan lugar á hacer con ellas el trazado de la flor de *lotus*, que, como se sabe, usaban los egipcios en sus decoraciones como emblema del alimento del cuerpo.

U

Umbilical.

Definición. — Se suele dar este nombre á la curva lugar de los puntos umbílicos de una superficie.

Esta línea se la llama también *línea de curvaturas esféricas* (ver *Líneas de curvatura)*, atendiendo á que los umbílicos son los puntos en los que las curvaturas principales de la superficie son iguales.

Ecuación. — La ecuación de la proyección sobre el plano de las xy de esta línea es, según se vió, en la locución citada,

$$[(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t]^2 - 4(1+p^2+q^2)(rt-s^2) = 0,$$

que se descompone en otras que, reducidas, se pueden escribir:

$$\frac{1+p^2}{r} = \frac{1+q^2}{t} = \frac{pq}{s}. \qquad (1)$$

— Pues bien; cuando estas dos ecuaciones se reducen á una sola verdaderamente distintas, ella, unida á la ecuación $F(x, y, z) = 0$ de la superficie, determina sobre ésta una curva en que todos sus puntos son umbílicos, es decir, la curva umbilical ó línea de las curvaturas esféricas.

Caso particular. — La superficie de la esfera es la única que ofrece una curvatura uniforme alrededor de cada normal. Se puede decir que cada uno de sus puntos es un umbílico, observando que la condición (1) se encuentra satisfecha para todo sistema de valores de las coordenadas x, y, z que convienen á la ecuación de la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2;$$

en efecto, las diferentes diferenciales deducidas de esta ecuación serán:

$$p = \frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z}$$

$$q = \frac{dz}{dy} = -\frac{y}{z}$$

$$r = \frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{z^2 + x^2}{z^3}$$

$$s = \frac{d^2z}{dx\,dy} = -\frac{xy}{z^3}$$

$$t = \frac{d^2z}{dy^2} = -\frac{z^2 + y^2}{z^3},$$

de donde

$$\frac{1 + p^2}{r} = -z, \quad \frac{pq}{s} = -z \quad \text{y} \quad \frac{1 + q^2}{t} = -z.$$

— Se puede consultar para todo cuanto á estas lineas tienen referencia una Memoria de M. Poisson *(Journal de L'Ecole polytechnique,* cuaderno XXI).

Unicursales.

Definición. — Se dice que una curva es *unicursal* cuando las coordenadas de uno cualquiera de sus puntos son funciones racionales de un mismo parámetro.

Propiedades. — La linea recta es evidentemente unicursal.

— Las cónicas son asimismo unicursales, puesto que son del género cero. Si se quisiera verificar directamente y mostrar cómo se pueden expresar las coordenadas de un punto de la curva, en función de un parámetro variable t, podíamos hacerlo tomando el origen de las coordenadas en un punto de la curva, en cuyo caso la ecuación será:

$$Ax^2 + 2\,Bxy + Cy^2 + 2\,Dx + 2\,Ey = 0.$$

Ahora bien; una secante trazada por el origen, cuya ecuación

fuese $y = tx$, encontraría á la curva en otro punto distinto del origen, y cuyas coordenadas serían dadas por las dos ecuaciones

$$x = -\frac{2D + 2tE}{A + 2Bt + Ct^2}, \qquad y = -\frac{2Dt + 2Et^2}{A + 2Bt + Ct^2};$$

estas ecuaciones tomadas simultáneamente representan la curva, de la que se obtendrían todos sus puntos haciendo variar t de $-\infty$ á $+\infty$. En el caso en que el origen estuviese en el infinito, se tendría la curva unicursal contándola por rectas paralelas á una asíntota.

Si la ecuación de la cónica estuviera dada, según el método de descomposión en cuadrados, por alguna de las formas siguientes:

$$P^2 + Q^2 = h^2 \text{ (Elipse)},$$
$$P^2 - Q^2 = H^2 \text{ (Hipérbola)},$$
$$P^2 = mQ \text{ (Parábola)};$$

representando P y Q formas líneales $d'x$ y $d'y$, y h, H, m, constantes reales, y haciendo

$$\left.\begin{aligned} P &= h\frac{2t}{t^2+1} \\ Q &= h\frac{t^2-1}{t^2+1} \end{aligned}\right\} \text{ (en el primer caso)},$$

$$\frac{P+Q}{H} = \frac{H}{P-Q} = t \text{ (en el segundo caso)},$$

$$\left.\begin{aligned} P &= t \\ Q &= \frac{t^2}{m} \end{aligned}\right\} \text{ (en el tercer caso)},$$

la expresión de las coordenadas (x, y) de un punto móvil sobre una cónica, en función de un parámetro variable t, se obtendrá resolviendo las ecuaciones precedentes con relación á x y á y.

— Si una curva unicursal corresponde á las fórmulas

$$\frac{x}{f(t)} = \frac{y}{\rho(t)} = \frac{z}{\psi(t)},$$

el coeficiente angular m_t de la tangente en el punto M, que corresponde al valor t del parámetro variable, está dado por la igualdad

$$m_t = \frac{\varphi'\psi - \psi'\varphi}{f'\psi - \psi' f},$$

porque, en efecto,

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t},$$

y como

$$y'_t = \frac{\varphi'\psi - \psi'\varphi}{\psi^2}$$

$$x'_t = \frac{f'\psi - \psi' f}{\psi^2}$$

se obtendrá dividiendo estas dos igualdades el valor asignado á m_t.

— Una cúbica que tiene un punto doble es unicursal; y, en general, una curva del grado p que tiene un punto múltiplo del orden $(p-1)$ es unicursal.

Sabemos que una curva del grado m no puede tener más que $N = \frac{(m-1)(m-2)}{2}$ puntos dobles; que este número N, ó su equivalente, es completo cuando la curva es unicursal, y, recíprocamente, que toda curva unicursal del grado m tiene un número de puntos dobles igual á N, ó un número de puntos múltiples equivalentes á N puntos dobles.

— Las ecuaciones

$$x = \frac{f(t)}{\varphi(t)}, \qquad y = \frac{f_1(t)}{\varphi(t)};$$

en las que las funciones f, φ, f_1 son polinomios del grado m, representan una curva unicursal del mismo grado m. En efecto; busquemos los puntos de encuentro de la curva con una recta, cuya ecuación sea

$$Ax + By + C = 0.$$

Los valores de t que convendrán á dichos puntos, estarán dados por la ecuación

$$Af(t) + Bf_1(t) + C\varphi(t) = 0;$$

esta ecuación, siendo de grado m, la curva será también del grado m.

En algunos casos particulares, no todos los polinomios son del grado m, ó bien las fracciones que representan x é y no son irreducibles; pero no examinaremos aquí sino el caso más general, pues esto otro nos haría entrar en demasiados detalles.

Sean t y t' los valores de t que convienen á dos puntos de la curva; busquemos la ecuación de la recta que los une, sea

$$Ax + By + C = 0$$

la ecuación de esta recta, se deberá tener

$$Af(t) + Bf_1(t) + C\varphi(t) = 0,$$
$$Af(t') + Bf_1(t') + C\varphi(t') = 0;$$

la ecuación buscada será, por lo tanto,

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ f(t) & f_1(t) & \varphi(t) \\ f(t') & f_1(t') & \varphi(t') \end{vmatrix} = 0.$$

Por consiguiente, la ecuación de la tangente en un punto definido por t, será

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ f(t) & f_1(t) & \varphi(t') \\ f'(t) & f'_1(t) & \varphi'(t) \end{vmatrix} = 0.$$

Del mismo modo los valores de t que convienen á los puntos de inflexión, estarán dados por la ecuación:

$$\begin{vmatrix} f(t) & f_1(t) & \varphi(t) \\ f'(t) & f'_1(t) & \varphi'(t) \\ f''(t) & f''_1(t) & \varphi''(t) \end{vmatrix} = 0.$$

Para que un punto sea doble, es necesario que para dos valores diferentes de t, x é y tengan un mismo valor; sean t y t' dos de estos valores, se deberá tener:

$$\frac{f(t)}{\varphi(t)} = \frac{f(t')}{\varphi(t')}, \qquad \frac{f_1(t)}{\varphi(t)} = \frac{f_1(t')}{\varphi(t')}.$$

Se tienen así dos ecuaciones en t y t', que se las resolverá tomando como incógnitas auxiliares $t + t'$ y tt', después de desembarazar las dos ecuaciones del factor $t - t'$; á cada sistema de valores de $t + t'$ y de tt', corresponderá un punto doble.

Se tendrán asintotas paralelas á los ejes, si para un valor finito ó infinito de t, x, es, por ejemplo, infinito é y finito; siendo fácil de trazar la curva.

Ejemplo.—Sea á construir la cúbica que corresponde á la ecuación

$$x = \frac{t^2}{t^3 - 1}, \qquad y = \frac{2t - 1}{t^3 - 1};$$

los valores de t que anulan el numerador ó denominador de estas expresiones son:

$$t_1 = 0, \qquad t_2 = \frac{1}{2}, \qquad t_3 = 1.$$

Para $t = 1$, el coeficiente angular

$$\frac{y}{x} = \frac{2t - 1}{t^2},$$

es igual á 1 y el coeficiente de $y - x$ para este valor de $t = 1$

$$y - x = \frac{t^2 - 2t + 1}{t^3 - 1} = \frac{t - 1}{t^2 + t + 1}$$

es cero. Luego la primera bisectriz es asintota real de la curva.

Si $ax + by - 1 = 0$ es la ecuación de una tangente, se debe tener:

$$at^2 + b(2t - 1) - t^3 + 1 = 0,$$

$$2at + 2b - 3t^2 = 0,$$

$$a - 3t = 0;$$

y eliminando entre estas ecuaciones á a y b, se encuentra:

$$2t^3 - 3t^2 - 2 = 0,$$

ecuación que admite para t una sola raíz real comprendida entre

$$\frac{3}{2} \text{ y } 2.$$

El coeficiente angular y'_x de una tangente tiene por valor:

$$\frac{4t^3 - 3t^2 + 2}{t(t^3 + 2)}$$

para $t = 0$ y $t = \sqrt[3]{-2}$ se tendrán dos tangentes paralelas al eje de las y y para $t = +\infty$ ó t, comprendido entre $\sqrt[3]{-2}$ y 0, otras paralelas al eje de las x.

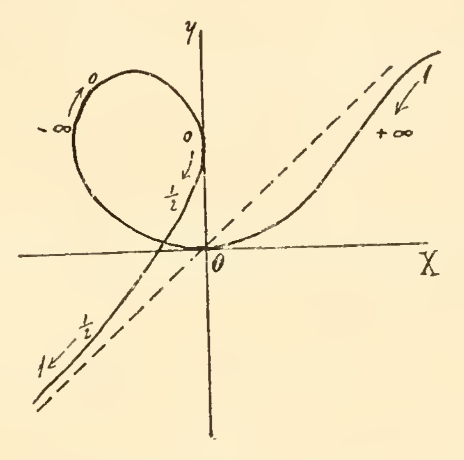


Figura 1.

Para hallar el punto doble se resolverán las ecuaciones

$$\frac{t^2}{t^3 - 1} = \frac{\theta^2}{\theta^3 - 1} \quad \text{y} \quad \frac{2t - 1}{t^3 - 1} = \frac{2\theta - 1}{\theta^3 - 1},$$

que se reducen á las

$$t^2\theta^2 + t + \theta = 0 \quad \text{y} \quad 2t\theta = t + \theta,$$

las cuales nos dan

$$t\theta = -2 \quad \text{y} \quad t + \theta = -4;$$

por tanto, t y θ son raíces de la ecuación

$$\alpha^2 + 4\alpha - 2 = 0,$$

y el punto doble corresponderá al valor $-2 - \sqrt{6}$ ó al $-2 + \sqrt{6}$, atribuídos á t.

Con estos resultados se puede construir la curva, que viene á tener la forma manifiesta en la figura.

— Un caso bastante frecuente de curvas unicursales es el dado por la envolvente de una recta en la ecuación de la cual entra racionalmente un parámetro λ, ó, lo que es lo mismo, un ángulo φ, dado por las potencias de sus senos ó cosenos.

En este caso, si

$$Ax + By + C = 0$$

es la ecuación de la recta, en la cual

$$A = f(\lambda) \qquad B = \varphi(\lambda) \qquad C = \psi(\lambda)$$

se tendrá la ecuación de la envolvente eliminando λ entre esta ecuación y su derivada con relación á λ; ó también, considerando las ecuaciones simultáneas en x é y,

$$\left.\begin{array}{l} A\,x + B\,y + C = 0 \\ A'_\lambda x + B'_\lambda y + C'_\lambda = 0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

y resolviéndolas con relación á estas variables, que nos darán las coordenadas de un punto de la envolvente en función racional de λ. Si uno de los puntos es doble, existirán dos valores de λ, que satisfarán á la vez á las ecuaciones (1) para los valores de x é y correspondientes á dicho punto.

Aplicaciones. — Estas curvas son de una gran aplicación en el cálculo integral. Sea, en efecto, la integral $\int f(x, y)dx$, en la que y está ligada con x por medio de una ecuación algebraica $F(x, y) = 0$; si esta ecuación es la de una curva unicursal, resulta que x é y pueden expresarse en función racional de un parámetro t, y, por consiguiente, la integral propuesta se refiere á la de una función racional.

— Entre otras, pueden ser consultadas las obras siguientes:

C. Juel, *Démostration géométrique de quelques propiétés des courbes unicursales du troisième et du quatrième ordre.*

Sur la rectification des cubiques planes unicursales, L. Raffi, en *Annales de L'Ecole Normale.*

T. N. Thiele, *Remarques sur les courbes dérreur asymétriques*, *Tidsskrift for Mathematik*, cuarta serie, 1878, páginas 54 á 57.

Unión de los baos.

Definición.— En construcción naval se da el nombre de curva de *unión de los baos* la que determina sobre la superficie interna del casco de un navío las extremidades de los baos.

Determinación.— Esta línea se representa por su proyección sobre el longitudinal, y se la obtiene del modo siguiente: uniendo la flecha de la curva formada por su arista superior y la altura por encima de la quilla de la cuerda de esta misma curva, cuerda que se llama la *línea recta del bao*, y sumando estos dos últimos elementos se obtiene la altura del punto medio del bao sobre la quilla.

Se obtendrán tres puntos de la línea mediana de puente, proyectadas sobre el longitudinal, y se les reune por medio de una línea curva, lo que nos dará la proyección de la línea mediana.

Esta proyección encuentra en diferentes puntos, que llamaremos A, B, C, D....., á las trazas horizontales de los planos de las costillas del navío. Se toman las alturas de estos puntos sobre la quilla y se llevan estas alturas sobre el eje del latitudinal, y se tendrán conocidas sobre este plano las proyecciones de los puntos medios de los baos correspondientes á las costillas sucesivas. Por estos puntos medios se harán pasar curvas paralelas á las del patrón del bao, supuesta trazada sobre el latitudinal, y se prolongan estas curvas paralelas hasta su encuentro con las aristas internas de las costillas correspondientes, que están igualmente trazadas sobre este plano.

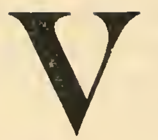
De esta manera, se tendrá á un lado y otro del eje una serie de puntos que nombraremos A', B', C', D'....., se tomarán las alturas de estos puntos por encima de la horizontal que pasa por la cara superior de la quilla; y luego, volviendo de nuevo al longitudinal, se tomarán estas alturas, á partir de la quilla, sobre las verticales de los puntos A, B, C, D....., lo que nos da nuevos puntos A'', B'', C'', D''..... pertenecientes á la proyección de la curva unión de los baos, que quedará conocida uniendo estos puntos por un trazado continuo.

Unipartita.

Definición. — Dase este nombre á uno de los dos tipos de curvas en que se encuentran clasificadas por Clebsch: las de tercer orden y las anexas de tercera clase.

— Las curvas de tercer orden unipartitas se componen de una rama única con tres puntos de inflexión. (Ver *Curvas de tercer orden.)*

— Las curvas de tercera clase unipartitas se componen de una parte única de tres tangentes de retroceso. (Ver *Curvas de tercera clase.)*



Vaguada ó Talveg.

De las palabras alemanas *thal* y *weg*, camino del valle.

Definición.—Se distingue en Topografía con estos nombres á una especie particular de curva de máxima pendiente (ver esta voz), la cual forma el fondo de los valles entre dos vertientes.

Clasificación.—Se señalan diferentes órdenes de vaguadas; los órdenes primeros forman los lechos de los ríos y arroyos de aguas constantes; los de los órdenes medios los arroyos que sólo las tienen en invierno, y los de los últimos solamente conducen las procedentes de las lluvias.

Propiedades.—No se puede recorrer camino alguno normalmente á una vaguada, sin verse obligado á subir ó ascender.

— La reunión de las vaguadas de todos los órdenes constituye el *sistema hidrográfico* de la región ó terreno que se describe topográficamente.

Aplicaciones.—La determinación y representación de este sistema hidrográfico, juntamente con el orográfico (ver *Divisoria)*, en sus posiciones relativas da á conocer, de una manera completa, la forma de la superficie terrestre en la extensión que se considera.

Variación (Curva de).

Ver el artículo *Magnéticas*.

Variedad (Curva de).

Ver el artículo *Género* (curva del).

Velaria.

Curva que afecta la vela de un barco bajo la acción del viento.

Jacobo Bernouilli se ocupó de esta línea *Curvatura veli (Acta Eruditorum*, 1692), demostrando ser idéntica á la catenaria.

Velocidades (Curva de las).

Definición.—Curva representativa de la ley de variación de la velocidad, y que se traza tomando por abscisas los tiempos y por ordenadas las velocidades correspondientes de un punto material, de cual se estudia su movimiento.

Determinación de la curva. — Trazada la curva de los espacios (ver esta voz), se puede determinar la velocidad en un instante cualquiera, y, dependiendo ésta del tiempo, nos dará una función

$$V = f'(t) \ldots\ldots (1),$$

siendo f' la derivada de f en la función $e = f(t)$.

La función (1) que expresa la ley de variación de la velocidad, y en la cual V y t representan la velocidad y el tiempo, puede ser construída por puntos refiriéndose á dos ejes rectangulares, originando una curva cuyas ordenadas serán los valores de V y las abscisas los de t. La longitdd destinada á representar la unidad de tiempo es naturalmente arbitraria, y, respecto á las ordenadas, se pueden tomar en una relación cualquiera á voluntad. Es, sin embargo, ventajoso adoptar la misma longitud para representar la unidad de tiempo y la de velocidad, el segundo y el metro.

Dando á t un número suficiente de valores, se trazarán cuantos puntos se juzguen necesarios para hacer el trazado de la curva á mano.

Si la ley que liga las velocidades á los tiempos no es conocida y si sólo algunos valores de V correspondientes á otros de t, se construirán estos valores y se trazará la curva uniendo los puntos así obtenidos por un trazo contínuo.

Propiedades y usos.—De cualquier modo que esta curva se obtenga, su forma es suficiente para dar una idea de la marcha de las velocidades. Sea $ABCDE$..... (fig. 1) esta curva. Si la ordenada aumenta, como sucede de A á B, la velocidad es creciente y el movimiento acelerado, y si la ordenada va disminuyendo, como tiene lugar entre B y C, el movimiento será retardado. Si la ordenada viene á ser negativa, como sucede de C á E, es que el movimiento tiene lugar en sentido contrario. Cuando la curva corta al eje de las abscisas, la velocidad es nula, lo cual, como se ve, tiene lugar en los puntos en que cambia de signo y pasa de positiva á negativa, como en C, ó de negativa á positiva, como en E.

Esta curva sirve asimismo para determinar geométricamente la aceleración, así como la curva de los espacios nos da la velocidad. En efecto; siendo la aceleración la derivada de la velocidad, considerada como una función del tiempo, viene á ser el coeficiente angular de la tangente á la curva de las velocidades, ó la tangente trigonométrica del ángulo que esta tangente forma con el eje sobre el cual se cuentan los tiempos. Así, pues, si MP es la velocidad correspondiente á un tiempo OP, se obtendrá la aceleración trazando

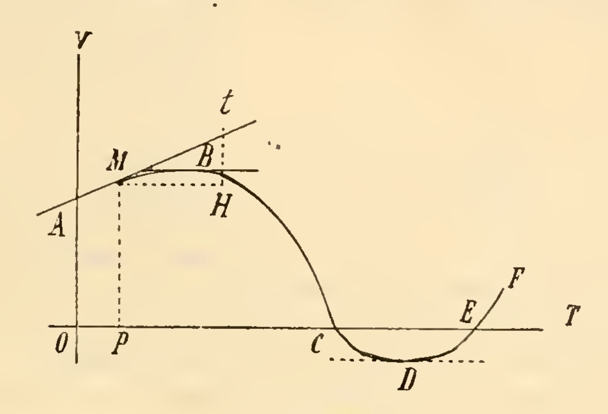


Figura 1.

la tangente en M, y la recta MH paralela al eje OT é igual á la unidad; la recta Ht perpendicular á la MH en H, y terminada en la tangente Mt, será la aceleración.

Resulta de este medio de representación que cuando la ordenada de la curva de las velocidades es creciente, la aceleración es positiva, y si decreciente, negativa. En los puntos en que la ordenada pasa por un máximo ó por un mínimo, la aceleración es nula.

— También se puede servir de la curva de las velocidades para calcular los valores del espacio recorrido por el móvil á partir de su posición inicial, el cual para la abscisa OP estará representado por la figura mixtilínea $OAMP$.

Cuando se estudia en Hidráulica el movimiento de las aguas en los canales descubiertos, se da el nombre de *curva de las velocidades* á la que se obtiene tomando por abscisa las profundidades del agua

á un punto determinado de observación, y como ordenadas correspondientes los valores de la velocidad.

Forma.— Todas las curvas de esta especie deducidas de las fórmulas del movimiento uniforme y de las fórmulas empíricas conocidas, afecta la forma parabólica expresa en la figura 2, es decir, que presentan su concavidad hacia el eje de las alturas.

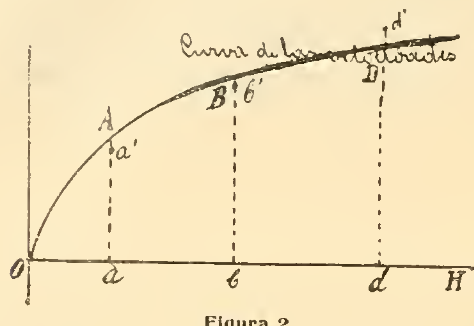


Figura 2.

Historia.—Esta ley se encuentra señalada en una Memoria sobre los efectos del dique de Pinay (*Savants étrangers*, t. XXI).

Determinación.— Por medio de aforos ejecutados en aquellas partes de régimen sensiblemente uniforme, usando los aparatos y procedimientos que en Hidráulica se conocen, se determinarán para un cierto número de valores H_1, H_2, H_3..... de profundidad, con respecto al punto de observación tomado de referencia, las velocidades medias V_1, V_2, V_3.

Tomemos sobre un eje horizontal OH á una cierta escala, las longitudes Oa, Ob, Od..... iguales á H_1, H_2, H_3..... y por los puntos a, b, c..... se levantan perpendiculares al eje de las H, sobre las cuales se tomarán las magnitudes $aA = V_1$, $bB = V_2$, $dD = V_3$; los puntos A, B, C, pertenecerán á la curva de las velocidades, y como sabemos que esta curva es una parábola, será fácil su trazado, haciéndola pasar por el origen y por lo más aproximada posible á los puntos encontrados, que no estarán exactamente sobre la línea por los errores particulares que llevan consigo siempre todas las operaciones prácticas.

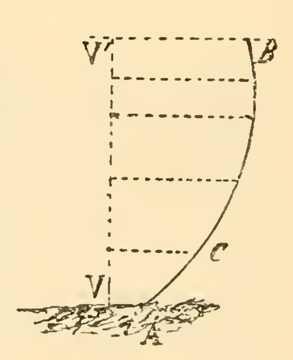


Figura 3.

Si pues se obtienen los valores V'_1, V'_2, V'_3..... rectificados por la construcción de la parábola y ω_1, ω_2, ω_3, las áreas de los perfiles en traviesa correspondientes á las alturas de agua observadas H_1, H_2, H_3....., los gastos q_1, q_2, q_3..... correspondientes á estos valores vendrán á ser $V'_1\,\omega_1$, $V'_2\,\omega_2$, $V'_3\,\omega_3$....., elementos que nos servirán para efectuar la construcción de la curva de los gastos

(ver *Gastos)*, la cual tiene una curvatura inversa de la de las velocidades que hemos determinado.

Cuando se estudian las diferentes velocidades de los filetes liquidos de una corriente á distintas alturas de una misma vertical, y sobre la perpendicular á dicha vertical se toman líneas proporcionales á las velocidades observadas, el lugar de los puntos obtenidos (figura 3) *ACB* es una curva, á la que también en Hidráulica se le da el nombre de curva de las *velocidades.*

— La forma de esta línea es la parabólica, y sirve, entre otras aplicaciones, para encontrar la velocidad media de la corriente.

Vertical.

Definición.— Se da este nombre en Astronomía á todo círculo máximo de la esfera celeste que pasa por el cenit por el nadir y un punto cualquiera del horizonte.

— A aquel de todos los círculos de esta especie que corta al horizonte en los verdaderos puntos del E. y el O., se le llama *primer vertical.*

— Estos círculos se conocen también con el nombre de *círculos de altura.*

Propiedades.—El primer vertical es perpendicular al meridiano y sus polos están en el horizonte, siendo los verdaderos puntos N. y S. y su eje la línea N. S.

— Estos círculos se emplean para medir las alturas de los astros ó su elevación sobre el horizonte de un lugar, asi como también para determinar sus azimuts.

Versiera.

Denominación dada por Agnesi en sus *Instituzioni Analitiche*, 1748, á la curva conocida hoy con el nombre de curva Agnesi (ver esta voz), y que fué antes estudiada por Fermat según á escrito Aubry, *Journal de Mathématique Spéciales*, 1896, pág. 180.

— La encuación de esta línea, siendo $\frac{1}{2}a$ el radio del círculo director, es

$$xy^2 = a^2(a - x),$$

y su área es πa^2, ó sea cuatro veces la de dicho círculo.

— La *pseudo-versiera*, nombrada así por Gino Loria, *Bibliotheca Mathematica*, 1897, es una línea que tiene por ordenadas el doble de las de la versiera, su ecuación es

$$y = \frac{2a^3}{a^2 + x^2},$$

y su área vale $2\pi a^2$, ó sea el doble de aquélla de la versiera.

Visibilidad ó visoria.

Definición.—Al establecer una gradería debe fijarse su pendiente de tal manera, que la vista de cada espectador pase sobre la cabeza del que tiene delante, de modo que vaya á dar sobre el lugar objeto de las visuales de todos. La curva, lugar geométrico de los diferentes puntos de vista con estas condiciones obtenidas, se denomina de la *visibilidad* ó *visoria*.

Historia.—En los anfiteatros antiguos, los escalones de las gradas servían de asiento; en los modernos, siendo preciso colocar banquetas ó asientos, á más dejar el paso entre ellos, y particularmente si están provistos de respaldos, exige un trazado especial, dependiente de la curva que nos ocupamos. El primer autor que ha tratado de esta materia, ha sido el arquitecto francés Mr. Lachez en su opúsculo *Acoustique et optique des salles de réunions publiques, theâtres et amphitheâtres*, etc., y la ecuación de esta curva la ha dado el arquitecto é ingeniero Sr. Saavedra en la *Memoria Descriptica* del *Proyecto de edificio para la Facultad de Ciencias de Madrid.*

Trazado gráfico.—Se fija gráficamente la altura de asientos en 0,35 centímetros y su ancho en 0,24; se establece 0,40 para el paso y 0,10 para la altura que está la vista de cada individuo sobre la cabeza del anterior; y la altura de las gradas se determina por la curva de *visibilidad* que se traza de la manera siguiente: dado el punto de mira (fig. 1), ó sea aquél que haya de ser distinguido de todas las partes, y la distancia de tal punto á la primera grada, se busca en la vertical de esta primera fila de asientos el punto á que corresponde la cabeza de un espectador de estatura media, que se calcula á 0,70 sobre el asiento; por dicho punto y el de mira se traza una recta, que se prolonga por detrás de la primera fila de asientos hasta encontrar la vertical correspondiente á la delantera de la segunda fila, y este punto debe corresponder á la situación del ojo del

espectador de dicha segunda fila. Por encima de la cabeza de éste, y por el punto de mira, se trazará una recta que servirá para determinar en la vertical de la tercera fila la nueva situación que ha de ocupar el ojo del espectador que en ella deba de sentarse, y así sucesivamente. Enlazando todos los puntos así determinados para situación de los ojos de los espectadores en las diversas filas de la gradería, se obtiene la curva de *visibilidad*. Trazada dicha curva, se toman en las ordenadas, por debajo del punto visual, una altura constante que corresponda á la de una persona sentada, y queda

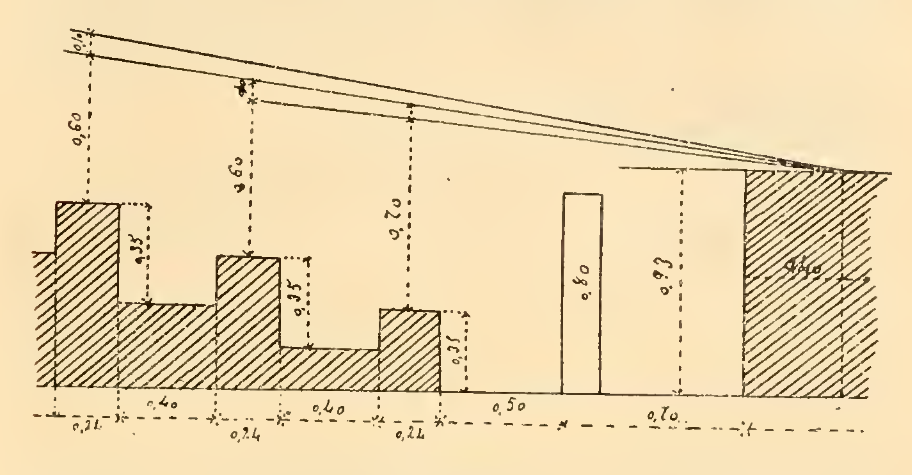


Figura 1.

determinado el plano del asiento; luego, con los datos al principio apuntados respecto á la altura del asiento, se fija la altura de la grada sobre el suelo.

Ecuación.—La ecuación transcendente de esta curva, por cuyo medio puede obtenerse desde luego un punto cualquiera de ella, es

$$y = \frac{p}{q}\, x + \frac{b}{a}\,(x + p)\, l\,.\, \frac{x + p - \frac{1}{2}\, a}{p + \frac{1}{2}\, a},$$

en que representan respectivamente: x, la distancia horizontal de un banco cualquiera al primero; y la altura de cada banco sobre el primero; p, la distancia del primer banco al objeto ó punto que ha de ser visto; q, la altura del ojo del que ocupa el primer banco so-

bre dicho objeto; a, la distancia entre dos bancos consecutivos, y b, la altura que media entre el plano de los ojos y el vértice de la cabeza de cada concurrente.

Visiera.

Definición.—Si por los extremos de un diámetro de una circunferencia se dirigen una tangente y varias secantes, el lugar de los puntos medios de los segmentos de secantes comprendidos entre la circunferencia y las tangentes es una curva que se denomina *visiera.*

Historia.— G. Peano, *(Appl. geom. del calcolo infinit.* Turín, 1887), la estudió y dió nombre.

Ecuación y propiedades.—Su ecuación polar es

$$r = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\operatorname{sen}\theta} + a\,.\operatorname{sen}.\theta\right) \quad \text{ó} \quad x^2 = 2y^2\frac{a-y}{2y-a}.$$

— Su asíntota es paralela á $0x$ á la distancia del centro $y = \frac{1}{2}a$.

— El área tiene por expresión $\frac{5}{32}\pi a^2$, es decir, los $\frac{5}{4}$ de la del círculo generador.

— Puede consultarse *Corso di Calcolo infinitesimale,* de J. D'Arcais, tomo I, pág. 531, y G. Agnesi, *Instituzioni Analitiche*, t. I, pág. 381.

Viviani (Curva de).

Definición.—Esta linea es el lugar de los puntos de la esfera, tales que los crecimientos son iguales en longitud y latitud (Juan Bernouilli).

Historia.—Viviani, en 1692, propuso el problema: *Percer une voute hemisphérique de quatre fenêtres égales, sous cette condition que le reste de la voute soit exactement carrable.* Leibnitz resuelve este problema al momento *(Acta Lipsiæ,* 1692), y Juan Bernouille da cinco soluciones; pudiéndose ver, á estos efectos, la *Histoire de la Académie des Sciences,* 1703.

— La bóveda cuadrable de Viviani parece coincidir con la curva nombrada *Paradoxos de Menelaos,* curva cuya verdadera naturaleza nos es desconocida. *Bulletin des Sciences Mathématiques,* 1883, pá-

gina 278. *Pour l'histoire des lignes et surfaces courbes dans l'antiquite*, por Tannery.

Propiedades.—Esta línea es la antiestereográfica de la lemniscata y de la strofoide. *Aubry.*

— La superficie lateral de dos cilindros de Viviani en la esfera, es cuadrable. *Montuela.*

— La proyección estereográfica de esta línea es una lemniscata. *D'Arrest.*

— Puede consultarse en *Journal de Mathématiques Spéciales*, 1893, página 95, un trabajo de Mr. Aubry, y *Des Méthodes en Géométrie*, de P. Serret, 1855, pág. 132, etc.

Weierstrass.

Ver *Journal de Crelle*, t. LXIX, pág. 29, y t. XC, pág. 221.

Z

Zigzageado.

Arco *zigzageado* ó en *zig-zag*. El formado por líneas en *zig-zag*, viene á ser como un angrelado ó festonado, en que los arquitos se hallan sustituídos por ángulos entrantes y salientes.

Ver *Diccionario Clairac*, páginas 257 y 262.

Zodiacales.

Definición. — Se da este nombre á las líneas descritas cada dia por el extremo de la sombra del estilo en los cuadrantes solares.

— Estas curvas se conocen también con el nombre de *líneas de declinación*, y A. Mahistre, en su obra *L'art de tracer les cadrans solaires*, las nombra *curva de un día*, dando á las descritas en los dos solsticios el nombre de *curva de las estaciones*.

Propiedades.— Estas líneas, en las diferentes épocas del año, excepción de las descritas en los equinoccios, que son líneas rectas *(la equinoccial)*, y en las latitudes medias, son aproximadamente *hipérbolas*, ó para decirlo con mayor generalidad, estas líneas son aproximadamente *secciones cónicas*; porque, en efecto, se puede considerar que el sol durante un día describe en el espacio un pararelo de la esfera celeste, y el rayo de este astro, que parte de su centro y toca al extremo del estilo, describirá durante este tiempo una superficie *cónica* que tiene su vértice en este punto, y por eje el eje del mundo, del cual forma parte el estilo del cuadrante, y la intersección de este cono con la superficie del cuadrante es precisamente la *zodiacal* para el día que se considera.

— Si suponemos, por ejemplo, un muro vertical perpendicular al meridiano, se verá que para los lugares situados en las zonas templadas ó en las glaciales el plano del muro corta á las dos hojas del cono antes indicado, y, por lo tanto, las líneas zodiacales serán

hipérbolas, excepción de la época de los equinoccios. En el trópico se tendrá una parábola en el instante del solsticio y elipses para el resto del año. Entre los trópicos habrá una época en que la zodiacal será una parábola, que será aquella en que la declinación del sol sea igual á la latitud del lugar: cuando la declinación sea mayor, se tendrá una hipérbola, y cuando menor, una elipse. Por último, en el polo las zodiacales serán también curvas hiperbólicas.

— En nuestros climas, las zodiacales serán líneas hiperbólicas, opuestas por su convexidad en las dos mitades del año. La curva-

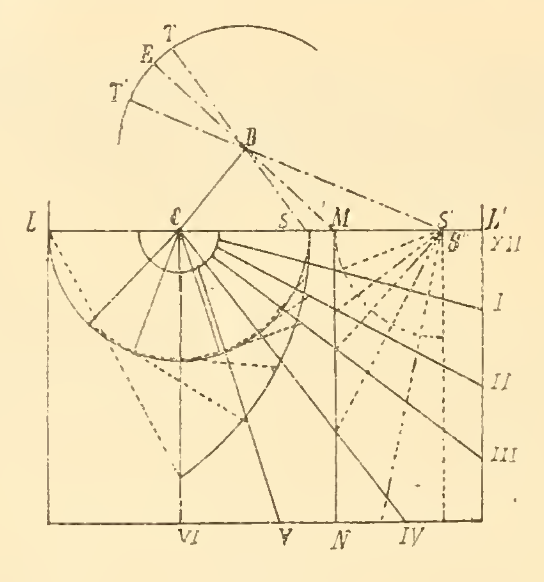


Figura 1.

tura de estas líneas disminuirán á medida que la declinación del sol sea menor, y cuando ésta llegue á ser nula ó que el sol esté en el Ecuador, estas curvas degenerarán en una línea recta.

Trazado.— Sea LL' el meridiano del cuadrante horizontal: lo que está por debajo de esta línea se supone sobre un plano paralelo al horizonte, y lo que por encima representa el plano del meridiano; CB es el estilo del cuadrante; MB una perpendicular, y nos dará la línea MN para equinoccial. MB' es igual á MB, y B' será el centro de un círculo que trazaremos con el radio MB', el cual servirá para encontrar los puntos de la equinoccial en que concurren las líneas horarias. Esto conocido, para trazar la zodiacal se harán las siguientes construcciones:

1.° Se prolonga la perpendicular MB una cantidad cualquiera BE, y desde B, con el radio BE, se describe un arco de círculo indefinido. Este arco será una porción de meridiano, y el punto E el punto de su intersección con el Ecuador.

2.° A un lado y otro del punto E se tomarán $ET = ET' = 23°,50$, y los puntos T y T' serán los lugares de la mayor declinación del sol, que corresponden á los solsticios.

3.° Por los puntos T y T', y por el extremo del estilo, se trazarán dos rectas que encontrarán á la meridiana en S y S', y estos puntos serán los que den la sombra del estilo al medio día en estas dos épocas. Si se trata del solsticio de estío, ó 21 de Junio, para el día que se quiera resolver el problema propuesto, el punto S será un punto de la curva buscada, la cual se compondrá de dos partes iguales, una para la mañana y otra para la tarde, que se reunirán en S. Para obtener otros puntos de esta curva, se buscarán aquellos en que la extremidad de la sombra del estilo encuentre en este día á las líneas de la *una* hora, de las *dos* horas, etc., lo que se hará continuando las operaciones como sigue:

4.° Desde el punto C con un radio igual á la longitud CB del estilo, se describe una semicircunferencia de círculo.

5.° Desde cada uno de los puntos de división de la equinoccial y con aberturas de compás iguales á la distancia de estos puntos al centro B', se cortará esta semicircunferencia en diversos puntos, y se trazarán desde su centro C radios á los puntos de división.

6.° En estos mismos puntos, y sobre estos mismos radios, se formarán ángulos iguales al ángulo CBS, y los puntos en que los segundos lados de estos ángulos corten á las líneas horarias correspondientes, serán aquéllos en que la sombra del estilo irá á terminar en cada hora el día 21 de Junio, y pertenecerán, por consiguiente, á la curva que se busca.

7.° Hecho esto, bastará pasar por todos los puntos así determinados una línea continua. Si se quiere mayor número de puntos, se pueden trazar las líneas horarias de media en media hora. La curva así encontrada será la pedida, ó sea la que recorrerá la sombra del vértice del estilo, el dia del solsticio de estío.

Si se quisiera trazar la zodiacal correspondiente al día del solsticio de invierno, los ángulos que debían tomarse serían iguales á CBS', el punto S' sería el origen de la curva, y los otros puntos se tomarían sobre las líneas horarias prolongadas por el otro lado de la equinoccial. Para otro día cualquiera del año se hará la misma

construcción, bastando que se conozca la declinación correspondiente del sol para dicho día.

Aplicaciones.—El trazado de estas líneas que corresponden á los solsticios es de necesidad para el emplazamiento de los cuadrantes, así como también son necesarias para el trazado de la meridiana del tiempo medio (ver esta voz).

LISTA DE LAS CURVAS ESTUDIADAS EN ESTA OBRA

Páginas.

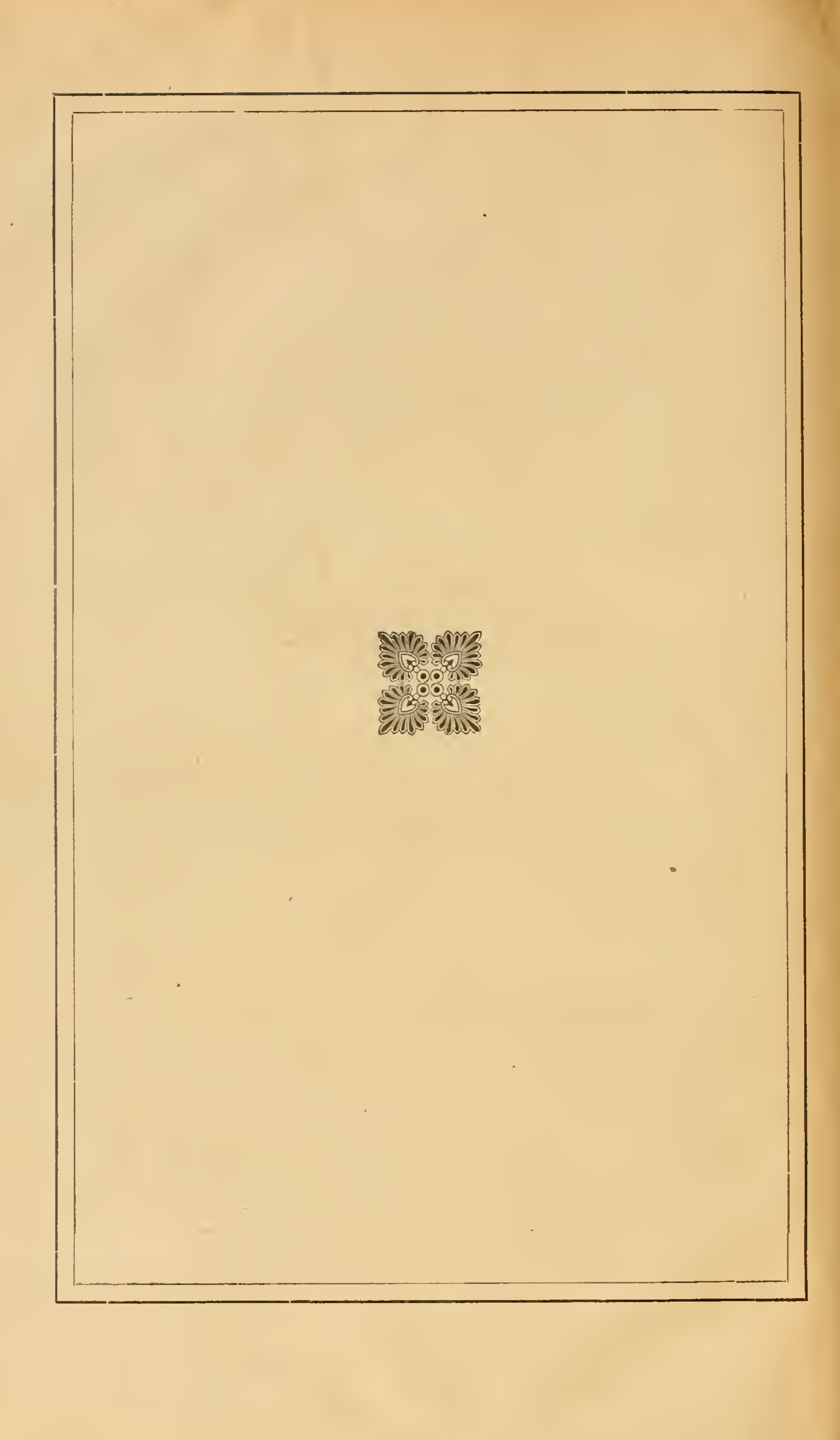
Páginas.

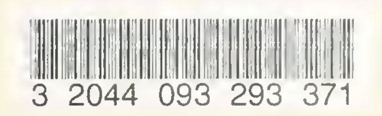
LISTA DE LOS AUTORES CITADOS

N

ERRATAS MAS IMPORTANTES

PÁGINA	LÍNEA	DICE	DEBE DECIR
148	8	$= a \frac{x'}{2} \ldots$	$a = \frac{x'}{2} \ldots$
164	1	$\rho = \pm \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}}$	$\rho = \pm \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}}$
208	última	$S_t = -\frac{y}{y}$	$S_t = -\frac{y}{y'}$
434	10	$R = \frac{ds}{d\tau} \sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + \rho^2}$	$R = \frac{ds}{d\tau} = \sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + \rho^2}$
631	10	$\rho = e^{\frac{1}{\sqrt{(w-1)(2-w)}}}$	$\rho = e^{\frac{-1}{\sqrt{(w-1)(2-w)}}}$
871	34	$\frac{PC}{(\text{sen}\,.\,\alpha + 2\theta)}$	$\frac{PC}{\text{sen}\,(\alpha + 2\theta)}$




3 2044 093 293 371

